ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙΙ - ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2010-11
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

Ασκηση 1. Διδεται η γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ η οποία έχει, ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^4$, τον παρακάτω πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε βάσεις για τον πυρήνα και την εικόνα τής παραπάνω απεικόνισης.

Ασκηση 2. Έστω ότι $V_1, \ldots, V_r$ είναι K-διανυσματικοί χώροι. Ορίζουμε το ευθύ τους άθροισμα $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ με τρόπο ανάλογο με αυτόν όταν $r = 2$. Έστω τώρα ότι οι $V_1, \ldots, V_r$ είναι διανυσματικοί υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
α) $V \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$.
β) Κάθε $v \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $v = v_1 + \cdots + v_r$, με $v_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, r$.

Ασκηση 3. Έστω $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ και βαθμού ≤ 3. Αν V ο υπόχωρος τού $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ που παράγεται από τα πολυώνυμα $1 + 2x$, $-3x + 5x^2$, να βρεθούν δύο διαφορετικοί υπόχωροι W_1, W_2 τού $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ έτσι ώστε $\mathbb{R}[x]_{\leq 3} \cong V \oplus W_1 \cong V \oplus W_2$.

Ασκηση 4. Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $\operatorname{Ker} \phi = \operatorname{Im} \phi$?. Ίδια ερώτηση για $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Ασκηση 5. Έστω $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad 2x + 3y + 4z = 0\}$ και $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ \ x + y + z = 0\}$. Δείξτε ότι οι V_1, V_2 είναι γραμμικοί υπόχωροι τού $\mathbb{R}^3$ και εξετάστε αν $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2$.

Ασκηση 6. Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $\phi(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$. Βρείτε τον πυρήνα της και εξετάσετε αν είναι επί.

Ασκηση 7. Έστω $\phi : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση με την ιδιότητα $\phi \circ \phi = \phi$. Δείξτε ότι $V \cong \operatorname{Ker}\phi \oplus \operatorname{Im} \phi$.

Ασκηση 8. Έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος διάστασης n και έστω $\phi : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση με την ιδιότητα $\dim \operatorname{Ker} \phi = n - 1$. Δείξτε ότι τουλάχιστον μία από τις γραμμικές απεικονίσεις $1 + f$, $1 - f$ είναι ισομορφισμός, όπου 1 είναι η ταυτοτική απεικόνιση τού V. (Υπόδειξη: Πάρτε τον πίνακα τής ϕ ως προς κατάλληλη βάση τού V).