ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙΙ - ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2010-11
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #4

Ασκηση 1. Βρείτε το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές λ και τούς αντίστοιχους ιδιόχωρους $V(\lambda)$ για τούς παρακάτω πίνακες

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Ασκηση 2. α) Έστω A ένας 2×2 πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{C}$. Δείξτε ότι ο A είναι όμοιος με έναν πίνακα που έχει μια από τις παρακάτω μορφές

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}.$$

β) Για κάθε φυσικό αριθμό n να υπολογιστεί ο πίνακας A^n όπου

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

γ) Δείξτε ότι κάθε 2×2 συμμετρικός πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{R}$ είναι διαγωνίσιμος.

Ασκηση 3. Βρείτε το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο των παρακάτω πινάκων

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ασκηση 4. Είναι ο παρακάτω πίνακας διαγωνίσιμος α) στο σώμα $\mathbb{R}$? β) στο σώμα $\mathbb{C}$?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Ασκηση 5. Έστω A ένας μηδενοδύναμος πίνακας, δηλ. $A^m = 0$ για κάποιον φυσικό αριθμό m. Τί μορφή έχει το ελάχιστο πολυώνυμο τού A? Σε ποιά περίπτωση ο A είναι διαγωνίσιμος?

Ασκηση 6. Έστω A ένας διαγωνίσιμος πίνακας. Δείξτε ότι ο πίνακας $A^2 + A$ είναι διαγωνίσιμος.

Ασκηση 7. Έστω A ένας πίνακας που ικανοποιεί την σχέση $A^3 = A$. Εξετάστε τί μορφή έχει το ελάχιστο πολυώνυμο τού A και συμπεράνατε ότι ο A είναι διαγωνίσιμος.

Ασκηση 8. Έστω $\phi : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση ($\dim_K V = n$).
α) Δείξτε ότι ο ϕ είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν $\chi_\phi(0) \neq 0$.
β) Δείξτε ότι ο ϕ είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν $m_\phi(0) \neq 0$. Σε αυτή την περίπτωση, αν $m_\phi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m$, δείξτε ότι $\phi^{-1} = \frac{-1}{a_0}(a_1\, 1_V + a_2\phi + \cdots + a_{m-1}\phi^{m-2} + \phi^{m-1})$.
γ) Να δειχθεί ότι η γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $\phi(x, y, z) = (x + y + 2z, y + 3z, 2z)$ είναι ισομορφισμός και να εκφραστεί η ϕ^{-1} ως συνδυασμός των $1_{\mathbb{R}^3}$ και ϕ.

Ασκηση 9. Δείξτε ότι η γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ με $\phi(f(x)) = f'(x)$ δεν είναι διαγωνίσιμη.

Ασκηση 10. Έστω ότι ο $n \times n$ πίνακας A έχει την μορφή

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

όπου A_1 ένας $k \times k$ πίνακας και A_2 ένας $(n-k) \times (n-k)$ πίνακας. Δείξτε ότι
α) $\chi_A(x) = \chi_{A_1}(x)\,\chi_{A_2}(x)$.
β) $m_A(x) =$ ε.κ.π. $(m_{A_1}(x),\, m_{A_2}(x))$. (*Υπόδειξη:* Άσκηση 4 στο φυλλάδιο 3).