

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙΙ - ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2010-11
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5

Άσκηση 1. Βρείτε την μορφή Jordan των παρακάτω πινάκων με στοιχεία στο \mathbb{C} :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 2. Βρείτε την μορφή Jordan των παρακάτω πινάκων με στοιχεία στο \mathbb{C} :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3. α) Δείξτε ότι δύο 3×3 μηδενοδύναμοι πίνακες είναι όμοιοι εάν και μόνον εάν έχουν τό ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

β) Βρείτε παράδειγμα δύο 4×4 μηδενοδύναμων πινάκων που έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο αλλά δεν είναι όμοιοι. (Υπόδειξη: Άσκηση 10, φυλλαδίου # 4).

Άσκηση 4. α) Έστω N ένας $n \times n$ μηδενοδύναμος πίνακας με δείκτη s . Δείξτε ότι $s \leq n$.

β) Έστω N ένας $n \times n$ μηδενοδύναμος πίνακας και I_n ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας. Δείξτε ότι ο πίνακας $I + N$ είναι αντιστρέψιμος.

γ) Έστω N ένας 3×3 μηδενοδύναμος πίνακας. $A = I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$. Δείξτε ότι $A^2 = I + N$.

Άσκηση 5. Έστω $\phi : V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_\phi(x) = (x - \lambda_1)^{t_1} \cdots (x - \lambda_k)^{t_k}$ και ελάχιστο πολυώνυμο $m_\phi(x) = (x - \lambda_1)^{s_1} \cdots (x - \lambda_k)^{s_k}$, $1 \leq s_i \leq t_i$. Έστω $W_i = \text{Ker}(\phi - \lambda_i 1_V)^{s_i}$, όπως στο μάθημα. Δείξτε ότι $\dim W_i = t_i$. (Υπόδειξη: γράψτε την μορφή Jordan τού ϕ που επάγεται από την ανάλυση $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$, όπως στο μάθημα. Ποιά είναι τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο τού $\phi_i = \phi|_{W_i} : W_i \rightarrow W_i$?).

Άσκηση 6. Έστω $\phi : V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_\phi(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 5)^3$.

α) Αν το ελάχιστο πολυώνυμο τής ϕ είναι το $m_\phi(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 5)$ βρείτε την μορφή Jordan τής ϕ .

β) Αν το ελάχιστο πολυώνυμο τής ϕ είναι το $m_\phi(x) = (x-1)(x-2)(x-5)^2$ βρείτε την μορφή Jordan τής ϕ .

γ) Αν το ελάχιστο πολυώνυμο τής ϕ είναι το $m_\phi(x) = (x-1)(x-2)(x-5)^3$ βρείτε την μορφή Jordan τής ϕ .

(Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε την παραπάνω άσκηση 5).

Άσκηση 7. Έστω $\phi : V \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_\phi(x) = (x-1)^2(x-2)^3$.

α) Αν το ελάχιστο πολυώνυμο τής ϕ είναι το $m_\phi(x) = (x-1)^2(x-2)^3$ βρείτε την μορφή Jordan τής ϕ .

β) Αν το ελάχιστο πολυώνυμο τής ϕ είναι το $m_\phi(x) = (x-1)^2(x-2)^2$ βρείτε την μορφή Jordan τής ϕ .

γ) Αν το ελάχιστο πολυώνυμο τής ϕ είναι το $m_\phi(x) = (x-1)(x-2)^2$ βρείτε την μορφή Jordan τής ϕ .