ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙΙ - ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2010-11
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #6

***Ασκηση* 1.** Έστω V διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο $<,>$. Δείξτε ότι αν $< u, w >= 0$ τότε $||u + w||^2 = ||u||^2 + ||w||^2$.

***Ασκηση* 2.** α) Δείξτε ότι τα διανύσματα $v_1 = \frac{1}{2} < 1+i, 1-i, 0 >$, $v_2 = \frac{1}{2} < 1, i, 1-i >$, $v_3 = \frac{1}{2} < 1, i, -1+i >$ αποτελούν ορθοκανονική βάση τού $\mathbb{C}^3$ ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο $< v, w >= v\bar{w}^T$.
β) Εκφράστε το διάνυσμα $v =< i, 2, -3 >$ ως προς την παραπάνω βάση.

***Ασκηση* 3.** Βρείτε έναν μοναδιαίο 3×3 πίνακα τού $M_3(\mathbb{C})$ με πρώτη στήλη το διάνυσμα $< 1, i, -2 >$.

***Ασκηση* 4.** Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένο με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο $< v, w >= vw^T$. Έστω W ο υπόχωρος τού $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $< 1, 2, -1, 0 >$ και $< 0, 2, 0, -1 >$. Βρείτε τον $V^{\perp}$.

***Ασκηση* 5.** Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία στους μιγαδικούς. Δείξτε ότι το $< A, B >= \mathrm{tr}(AB^*)$, όπου $B^* = \overline{B}^T$ και tr=το ίχνος, ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $M_n(\mathbb{C})$.

***Ασκηση* 6.** Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$. Δειξτε ότι $\det A^* = \overline{\det A}$.

***Ασκηση* 7.** Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ ένας μοναδιαίος πίνακας.
α) Αν λ είναι ιδιοτιμή τού A δείξτε ότι και το $1/\bar{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή τού A.
β) Δείξτε ότι $|\det A| = 1$.

***Ασκηση* 8.** Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $M_n(\mathbb{C})$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο τής άσκησης 5. Έστω W ο υπόχωρος των διαγώνιων πινάκων. Βρείτε το $W^{\perp}$.

***Ασκηση* 9.** Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$.
α) Δείξτε ότι ο A είναι κανονικός πίνακας
β) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση τού $\mathbb{C}^2$ που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα τού A.

***Ασκηση* 10.** Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$.
α) Δείξτε ότι ο A είναι κανονικός πίνακας
β) Γράψτε τον A ως $A = PDP^{-1}$, όπου D διαγώνιος και P μοναδιαίος.

Ασκηση 11. Αν $A \in M_n(\mathbb{C})$ είναι ένας κανονικός και μηδενοδύναμος πίνακας τότε ποιός είναι ο A?

Ασκηση 12. Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμού έως 3.
α) Δείξτε ότι το $< p(x), q(x) >= \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$ ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
β) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο Gram-Schmidt στην βάση $< 1, x, x^2, x^3 >$ για να βρείτε μια ορθοκανονική βάση τού χώρου.
γ) Έστω W ο γραμμικός υπόχωρος των σταθερών πολυωνύμων. Βρείτε το $W^{\perp}$.

Ασκηση 13. Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{C}^n$ εφοδιασμένο με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο $< v, w >= v\bar{w}^T$. Έστω W ένας γραμμικός υπόχωρος τού χώρου $\mathbb{C}^n$. Θεωρούμε την διάσπαση $\mathbb{C}^n = W \oplus W^{\perp}$. Αν $v \in \mathbb{C}^n$ τότε το v γάφεται μοναδικά ως $v = w + w'$ με $w \in W$, $w' \in W^{\perp}$. Ορίζουμε $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ως $\phi(v) = w - w'$.
α) Δείξτε ότι η ϕ είναι γραμμικός ισομορφισμός.
β) Έστω A ο πίνακας τής ϕ ως προς την κανονική βάση. Δείξτε ότι ο A είναι ερμητιανός και μοναδιαίος.

Ασκηση 14. Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο και έστω W ένας υπόχωρός του. Έστω $< w_1, \ldots, w_k >$ μια ορθοκανονική βάση τού W. Για κάθε $v \in V$ ορίζουμε $\pi_W(v) = \sum_{i=1}^k < v, w_i > w_i$.
α) Δείξτε ότι $\pi_W(v)$ ανήκει στον W και ότι $v - \pi_w(v)$ ανήκει στον $W^{\perp}$.
β) Δείξτε ότι το $\pi_W(v)$ είναι το μοναδικό σημείο τού W με την ιδιότητα ότι $||v - \pi_W(v)|| = \inf_{w \in W} ||v - w||$.