

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 2

A) Ασκήσεις 1.9, 1.11, 1.15, 1.16, 1.17, 1.22, 1.23 από τις σημειώσεις τού X. Κουρουγιώτη

B)

Άσκηση 1 Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

α) Βρείτε έναν 2×2 πίνακα C με την ιδιότητα $AC = I$.

β) Δείξτε ότι δεν υπάρχει 2×2 πίνακας D με την ιδιότητα $BD = I$.

Άσκηση 2 Θεωρούμε τους πίνακες A, B όπως στην άσκηση 1.

α) Βρείτε τον πίνακα A^2 (δηλ. τον πίνακα AA).

β) Ισχύει ότι $AB = BA$;

Άσκηση 3 Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x + by - z &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

Δείξτε ότι για ακριβώς μία τιμή τού b το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και για όλες τις υπόλοιπες τιμές τού b το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση. Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις βρείτε τις λύσεις τού συστήματος.

Άσκηση 4 α) Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε (με επαγωγή) ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$ έχουμε ότι

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 + 6n & 4n \\ -9n & 1 - 6n \end{bmatrix},$$

όπου με A^n συμβολίζουμε το γινόμενο του A με τον εαυτό του n φορές.

β) Εστω ότι για κάθε $n \geq 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 7x_n + 4y_n \\ y_{n+1} &= -9x_n - 5y_n \end{aligned}$$

Αν $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ υπολογίστε τα x_n, y_n ως εκφράσεις του n .