

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι - ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟ

Τρίτη 27 Σεπτεμβρίου: Συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και οι λύσεις τους. Γεωμετρική ερμηνεία των λύσεων ως σημείων τομής δύο ευθειών στο επίπεδο. Συστήματα τριών εξισώσεων με δύο αγνώστους και οι λύσεις τους. Γεωμετρική ερμηνεία των λύσεων ως σημείων τομής τριών ευθειών στο επίπεδο. Συστήματα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους και οι λύσεις τους. Γεωμετρική ερμηνεία των λύσεων ως σημείων τομής τριών επιπέδων στον χώρο και απαρίθμηση όλων των δυνατών περιπτώσεων. Ορισμός διανύσματος στο επίπεδο και οι βασικές πράξεις με διανύσματα.

Παρασκευή 30 Σεπτεμβρίου: Διανύσματα τού \mathbb{R}^n . Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων και η γεωμετρική του ερμηνεία. Διανυσματική μορφή γραμμικού συστήματος. Διαδικασίες που αφήνουν αναλλοίωτες τις λύσεις συστήματος. Απαλοιφή Gauss, πρώτα παραδείγματα.

Τρίτη 4 Οκτωβρίου: Απαλοιφή Gauss, πίνακας συντελεστών και επαυξημένος πίνακας γραμμικού συστήματος. Απαλοιφή Gauss με χρήση των παραπάνω πινάκων. Πίνακες με στοιχεία στο \mathbb{R} , γραμμές, στήλες, συμβολισμός των στοιχείων τού πίνακα, πολλαπλασιασμός πίνακα με σταθερά, άθροισμα πινάκων, γινόμενο πινάκων - ορισμοί παραδείγματα.

Παρασκευή 7 Οκτωβρίου: Παραδείγματα πολλαπλασιασμού πινάκων, η απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας τού πολλαπλασιασμού. Ο μηδενικός πίνακας και ο ταυτοτικός πίνακας και η συμπεριφορά τους ως προς τον πολλαπλασιασμό. Γραμμικά συστήματα m εξισώσεων με n αγνώστους και η έκφρασή τους στην μορφή $AX = B$ όπου A ο $m \times n$ πίνακας των συντελεστών, X ο $n \times 1$ πίνακας (στήλη) των μεταβλητών και B ο $m \times 1$ πίνακας (στήλη) των σταθερών. Η έκφραση τής διαδικασίας πρόσθεσης σε μια γραμμή ενός πίνακα ενός πολλαπλασίου μιας άλλης γραμμής ως γινόμενο πινάκων.

Τρίτη 11 Οκτωβρίου: Μελέτη των πινάκων $E_{ij}(\lambda)$ που αντιστοιχούν στην διαδικασία πρόσθεσης σε μια γραμμή ενός πίνακα ενός πολλαπλασίου μιας άλλης γραμμής. Αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες και ο αντίστροφος ενός πίνακα. Ο πίνακας $E_{ij}(-\lambda)$ ως ο αντίστροφος τού $E_{ij}(\lambda)$. Κάτω και άνω τριγωνικοί πίνακες. Το γινόμενο κάτω (αντ. άνω) τριγωνικών πινάκων είναι κάτω (αντ. άνω) τριγωνικός πίνακας. Παράδειγμα απαλοιφής Gauss με χρήση των πινάκων $E_{ij}(\lambda)$. Η γραφή ενός πίνακα A για τον οποίο η διαδικασία απαλοιφής Gauss δεν απαιτεί εναλλαγές γραμμών ως γινόμενο $A = LU$, όπου L ένας αντιστρέψιμος κάτω τριγωνικός πίνακας και U ένας άνω τριγωνικός πίνακας.

Παρασκευή 14 Οκτωβρίου: Στον σύντομο χρόνο τού μαθήματος (λόγω εκκένωσης τού κτηρίου) μελετήσαμε πώς μπορούμε να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα $AX = B$ με χρήση τής LU -παραγοντοποίησης τού πίνακα A .

Τρίτη 18 Οκτωβρίου: Η διαδικασία εναλλαγής γραμμών τού πίνακα A ως γινόμενο PA όπου P ο αντίστοιχος πίνακας μετάθεσης. Η γραφή ενός πίνακα A ως

$PA = LU$, όπου P ένας πίνακας μετάθεσης, L ένας αντιστρέψιμος κάτω τριγωνικός πίνακας και U ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Η μελέτη των γραμμικών συστημάτων n εξισώσεων με n αγνώστους. Ιδιόμορφα και μή ιδιόμορφα συστήματα. Η μοναδικότητα λύσης των μή ιδιόμορφων συστημάτων.

Τετάρτη 19 Οκτωβρίου (έκτακτο μάθημα): Οι αντιστρέψιμοι πίνακες και η μοναδικότητα του αντιστρόφου. Ο αντίστροφος ενός πίνακα μετάθεσης. Η εύρεση του αντιστρόφου ενός $m \times m$ μή ιδιόμορφου πίνακα A με την εκλεπτισμένη διαδικασία απαλοιφής Gauss - Jordan: $[A | I_m] \rightarrow [I_m | B]$ με $B = A^{-1}$.

Παρασκευή 21 Οκτωβρίου: Η απόδειξη τού ότι ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν είναι μή ιδιόμορφος. Ο αντίστροφος ενός άνω τριγωνικού πίνακα με μή μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο είναι άνω τριγωνικός. Ο αντίστροφος πίνακας ενός γινομένου αντιστρέψιμων πινάκων. Ο ανάστροφος ενός πίνακα. Ο ανάστροφος ενός αθροίσματος και ενός γινομένου πινάκων. Ο αντίστροφος πίνακας τού αναστρόφου ενός αντιστρέψιμου πίνακα. Ο αντίστροφος ενός κάτω τριγωνικού πίνακα με μή μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο είναι κάτω τριγωνικός.

Τρίτη 25 Οκτωβρίου: Η ανάλυση $PA = LDU'$ για έναν αντιστρέψιμο πίνακα A , όπου P πίνακας μετάθεσης, L κάτω τριγωνικός πίνακας με 1 στην διαγώνιο, D διαγώνιος πίνακας με μή μηδενικά στοιχεία στην διαγώνιο και U' άνω τριγωνικός με 1 στην διαγώνιο. Η μοναδικότητα τής ανάλυσης LU ενός αντιστρέψιμου πίνακα A . Η ανάλυση LDU' για έναν αντιστρέψιμο συμμετρικό πίνακα. Διανυσματικοί υπόχωροι τού \mathbb{R}^n . Ορισμός και παραδείγματα.

Τρίτη 1 Νοεμβρίου: Περιγραφή των διανυσματικών υπόχωρων των \mathbb{R}^1 , \mathbb{R}^2 και \mathbb{R}^3 . Ο υπόχωρος τού \mathbb{R}^n που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$. Ο χώρος στηλών $\mathcal{R}(A)$ ενός $m \times n$ πίνακα A . Η διανυσματική μορφή τού γραμμικού συστήματος $A \vec{x} = \vec{b}$. Τα ομογενή γραμμικά συστήματα $A \vec{x} = \vec{0}$ και ο μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A)$. Οι λύσεις τού ομογενούς συστήματος $A \vec{x} = \vec{0}$ στην περίπτωση που ο A είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας.

Τετάρτη 2 Νοεμβρίου (έκτακτο μάθημα): Η κλιμακωτή μορφή ενός πίνακα. Οι οδηγοί ενός κλιμακωτού πίνακα. Οι βασικές και οι ελεύθερες μεταβλητές τού ομογενούς συστήματος $U \vec{x} = \vec{0}$, όπου U ένας κλιμακωτός $m \times n$ πίνακας. Οι λύσεις τού ομογενούς συστήματος $A \vec{x} = \vec{0}$ εκπεφρασμένες ως προς τις ελεύθερες μεταβλητές και ως υπόχωρος τού \mathbb{R}^n που παράγεται από συγκεκριμένα διανύσματα.

Παρασκευή 4 Νοεμβρίου: Οι λύσεις τού συστήματος $A \vec{x} = \vec{b}$ ως έκφραση μιάς ειδικής λύσης και των λύσεων τού αντιστοίχου ομογενούς συστήματος. Η τάξη r ενός πίνακα και οι ιδιοτητές της. Η απόδειξη τού ότι το ομογενές σύστημα $A \vec{x} = \vec{0}$ έχει μόνο την μηδενική λύση στην περίπτωση $r = n$, όπου A ένας $m \times n$ πίνακας. Ορισμός τής γραμμικής ανεξαρτησίας διανυσμάτων τού \mathbb{R}^n .

Τρίτη 8 Νοεμβρίου: Ιδιότητες και παραδείγματα γραμμικώς ανεξάρτητων

και γραμμικώς εξηρητημένων διανυσμάτων. Οι μή μηδενικές γραμμές και οι στήλες που περιέχουν οδηγούς ενός κλιμακωτού πίνακα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα. Ο αντίστοιχος κλιμακωτός πίνακας ενός πίνακα με γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές δεν περιέχει μηδενικές γραμμές. Ο ορισμός τής βάσης ενός διανυσματικού υπόχωρου του \mathbb{R}^n .

Τρίτη 15 Νοεμβρίου: Εύρεση βάσης ενός διανυσματικού υπόχωρου του \mathbb{R}^n που παράγεται από ένα πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων με χρήση τής απαλοιφής Gauss. Ορισμός τής διάστασης ενός διανυσματικού υπόχωρου του \mathbb{R}^n .

Παρασκευή 18 Νοεμβρίου: Οι τέσσερις θεμελιώδεις υπόχωροι ενός $m \times n$ πίνακα A . Ιδιότητες και παραδείγματα. Εύρεση βάσεων των παραπάνω υπόχωρων. Η διάσταση των θεμελιωδών υπόχωρων.

Τρίτη 22 Νοεμβρίου: Συνέχεια περί θεμελιωδών υπόχωρων ενός πίνακα. Γραμμικές απεικονίσεις, ορισμοί και παραδείγματα. Ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνισης από το \mathbb{R}^n στο \mathbb{R}^m .

Παρασκευή 25 Νοεμβρίου: Η εικόνα και η προεικόνα ενός διανυσματικού υπόχωρου κάτω από μια γραμμική απεικόνιση. Ο πυρήνας μιας γραμμικής απεικόνισης. Ενεικονικές, επεικονικές και αμφιμονοσήμαντες γραμμικές απεικονίσεις. Κριτήρια σε σχέση με τις διαστάσεις και την τάξη του πίνακα παράστασης τής γραμμικής απεικόνισης. Παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων τού επιπέδου (στροφή ως προς γωνία θ , ανάκλαση ως προς ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία θ με τον x -άξονα).

Παρασκευή 2 Δεκεμβρίου: Μέτρο διανύσματος, κάθετα διανύσματα, ορθογώνια μεταξύ τους διανύσματα. Ορθογώνιοι υπόχωροι. Ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός υπόχωρου. Το άθροισμα τής διάστασης ενός διανυσματικού υπόχωρου του \mathbb{R}^n και του ορθογώνιου συμπληρώματός του ισούται προς n .

Τρίτη 6 Δεκεμβρίου: Το ορθογώνιο συμπλήρωμα τού χωρου γραμμών ενός πίνακα είναι ο μηδενόχωρος τού πίνακα. Το ορθογώνιο συμπλήρωμα τού χωρου στηλών ενός πίνακα είναι ο αριστερός μηδενόχωρος τού πίνακα. Προβολή σε διάνυσμα τού \mathbb{R}^n . Ο πίνακας προβολής.

Παρασκευή 9 Δεκεμβρίου: Προβολή σε υπόχωρο V τού \mathbb{R}^n . Ο πίνακας προβολής. Έκφραση τής προβολής σε υπόχωρο V ως γραμμικού συνδυασμού τής βάσης τού V . Ορθοκανονικά διανύσματα και γραμμική ανεξαρτησία.

Τρίτη 13 Δεκεμβρίου: Η εύρεση ορθοκανονικής βάσης με την ορθοκανονικοποίηση Gram - Schmidt. Η ανάλυση $A = QR$, όπου A ένας $n \times n$ πίνακας με γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες, Q ορθογώνιος πίνακας και R άνω τριγωνικός πίνακας. Ο ορισμός τής ορίζουσας ενός $n \times n$ πίνακα με ανάπτυξη ως προς μια γραμμή.

Παρασκευή 16 Δεκεμβρίου: Ιδιότητες των οριζουσών. Ένας $n \times n$ πίνα-

κας είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν η ορίζουσά του είναι $\neq 0$. Ο υπολογισμός τού αντιστόφου ενός πίνακα A με χρήση τού συζυγούς πίνακα $\text{adj}A$.

Τρίτη 20 Δεκεμβρίου: Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα. Χαρακτηριστικό πολυώνυμο πίνακα. Πίνακες με διαφορετικές ιδιοτιμές. Βάσεις ιδιοδιανυσμάτων. Διαγωνίσιμοι πίνακες. Εύρεση δυνάμεων πινάκων για διαγωνίσιμους πίνακες.