ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ - ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2015-16
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Ασκηση 1. Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι διανυσματικοί υπόχωροι τού $\mathbb{R}^3$;
α) $A = \{(x-y, x+y+1, y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$.
β) $B = \{(x, y+2, 3x),\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

Ασκηση 2. Βρείτε μια βάση τού υπόχωρου τού $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $< 3, 2, 4 >, < 2, 1, 3 >, < 5, 4, 6 >$.

Ασκηση 3. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{(x-y, 2x+3y, x+4y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος τού $\mathbb{R}^3$ και βρείτε μια βάση και την διάσταση τού A.

Ασκηση 4. Έστω $M_2(\mathbb{R})$ το σύνολο των 2×2 πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$\{A \in M_2(\mathbb{R}),\ \ A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A\}$$

είναι ένας $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος και βρείτε μιά βάση του.

Ασκηση 5. Έστω $k[x]_{\leq n}$ ο k-διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων μιάς μεταβλητής με συντελεστές στο σώμα k και βαθμού $\leq n$. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{f(x) \in k[x]_{\leq n},\ x^2 + 1 \mid f(x)\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος τού $k[x]_{\leq n}$ και βρείτε μια βάση του.

Ασκηση 6. Έστω $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\quad 2x + 3y + 4z = 0\}$ και $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\quad x + y + z = 0\}$. Δείξτε ότι οι V_1, V_2 είναι γραμμικοί υπόχωροι τού $\mathbb{R}^3$ και εξετάστε αν $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2$.

Ασκηση 7. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις
α) $\phi_1 : K[x]_{\leq n} \to K[x]_{\leq n-1}$ με $\phi_1(f) = f'$.
β) $\phi_2 : K[x]_{\leq n} \to K[x]_{\leq n+1}$ με $\phi_2(f) = \int f\,dx$.
Επιλέγοντας βάσεις για τούς παραπάνω χώρους, βρείτε τούς αντίστοιχους πίνακες των απεικονίσεων.

Ασκηση 8. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi : K[x]_{\leq n} \to K[x]_{\leq n-1}$ με $\phi[f(x)] = f(x+1) - f(x)$ είναι γραμμική. Επιλέγοντας βάσεις για τούς παραπάνω χώρους, βρείτε τον πίνακα τής απεικόνισης.

Ασκηση 9. α) Έστω V_1, V_2 υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V. Δείξτε ότι αν $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ τότε $V_1 + V_2 \cong V_1 \oplus V_2$.
β) Έστω $\phi : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση με $\phi \circ \phi = \phi$. Δείξτε ότι $V \cong \ker\phi \oplus \mathrm{Im}\phi$.
γ) Έστω $\phi : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση με $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ (id_V η ταυτοτική απεικόνιση τού V). Ορίζουμε $W_1 = \{v \in V,\ \phi(v) = v\}$ και $W_2 = \{v \in V,\ \phi(v) = -v\}$. Δείξτε ότι $V \cong W_1 \oplus W_2$.

δ) Έστω $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{R}$ και βαθμού ≤ 3. Αν V ο υπόχωρος τού $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ που παράγεται από τα πολυώνυμα $1 + 2x$, $-3x + 5x^2$, να βρεθούν δύο διαφορετικοί υπόχωροι W_1, W_2 τού $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ έτσι ώστε $\mathbb{R}[x]_{\leq 3} \cong V \oplus W_1 \cong V \oplus W_2$.

Ασκηση 10. Διδεται η γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ η οποία έχει, ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^4$, τον παρακάτω πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε βάσεις για τον πυρήνα και την εικόνα τής παραπάνω απεικόνισης.