ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ - ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2015-16
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

Ασκηση 1. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

α) Έστω $f(x) = (x-a)(x-d)$. Δείξτε ότι $f(A) = 0$.
β) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο τού A.

Ασκηση 2. Έστω A ένας 2×2 πίνακας. Δείξτε ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο $f(x)$ δευτέρου βαθμού με $f(A) = 0$. Ποιό είναι το ελάχιστο πολυώνυμο τού A;

Ασκηση 3. α) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},.$$

β) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο ενός διαγώνιου 3×3 πίνακα.
γ) Γενικότερα, βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο ενός διαγώνιου $n \times n$ πίνακα.

Ασκηση 4. α) Έστω ότι ο $n \times n$ πίνακας A έχει την μορφή

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

όπου A_1 ένας $k \times k$ πίνακας και A_2 ένας $(n-k) \times (n-k)$ πίνακας. Έστω ότι τα πολυώνυμα $f_1(x)$, $f_2(x)$ ικανοποιούν την σχέση $f_1(A_1) = 0$, $f_2(A_2) = 0$ (το 0 εδώ σημαίνει μηδενικός πίνακας). Δείξτε ότι το πολυώνυμο $g = f_1 f_2$ ικανοποιεί την σχέση $g(A) = 0$ (το 0 εδώ είναι πάλι μηδενικός πίνακας). *Υπόδειξη:* Τί είναι ο A^n;. Δείξτε ότι για κάθε πολυώνυμο $f(x)$ έχουμε ότι

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(A_1) & 0 \\ 0 & f(A_2) \end{bmatrix}.$$

β) Γενικότερα, έστω ότι ο $n \times n$ πίνακας A έχει την μορφή

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

όπου A_1, A_2 όπως παραπάνω και B ένας $n \times (n-k)$ πίνακας. Έστω ότι τα πολυώνυμα $f_1(x)$, $f_2(x)$ ικανοποιούν την σχέση $f_1(A_1) = 0$, $f_2(A_2) = 0$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $g = f_1 f_2$ ικανοποιεί την σχέση $g(A) = 0$.

Ασκηση 5. Έστω ότι οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.
α) Δείξτε ότι οι πίνακες A^n και B^n, $n \in \mathbb{N}$, είναι όμοιοι.

β) Δείξτε ότι οι πίνακες $A + \lambda I$ και $B + \lambda I$, όπου I ο ταυτοτικός πίνακας, είναι όμοιοι.

Ασκηση 6. Έστω V ένας K-διανυσματικός χώρος διάστασης n και έστω $\phi : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση με την ιδιότητα $\dim \operatorname{Ker} \phi = n - 1$. Δείξτε ότι τουλάχιστον μία από τις γραμμικές απεικονίσεις $1 + f$, $1 - f$ είναι ισομορφισμός, όπου 1 είναι η ταυτοτική απεικόνιση τού V. (Υπόδειξη: Πάρτε τον πίνακα τής ϕ ως προς κατάλληλη βάση τού V).