

**ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ - ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2015-16**  
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ #3**

**Άσκηση 1.** Έστω ότι ο  $n \times n$  πίνακας  $A$  έχει την μορφή

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

όπου  $A_1$  ένας  $k \times k$  πίνακας και  $A_2$  ένας  $(n - k) \times (n - k)$  πίνακας. Δείξτε ότι  $m_A(x) = \epsilon.κ.π. (m_{A_1}(x), m_{A_2}(x))$ .

**Άσκηση 2.** Βρείτε το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές  $\lambda$  και τούς αντίστοιχους ιδιόχωρους  $V_\lambda$  για τούς παρακάτω πίνακες

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

**Άσκηση 3.** α) Έστω  $A$  ένας  $2 \times 2$  πίνακας με στοιχεία στο  $\mathbb{C}$ . Δείξτε ότι ο  $A$  είναι όμοιος με έναν πίνακα που έχει μια από τις παρακάτω μορφές

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}.$$

β) Για κάθε φυσικό αριθμό  $n$  να υπολογιστεί ο πίνακας  $A^n$  όπου

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

γ) Δείξτε ότι κάθε  $2 \times 2$  συμμετρικός πίνακας με στοιχεία στο  $\mathbb{R}$  είναι διαγωνίσιμος.

**Άσκηση 4.** Βρείτε το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο των παρακάτω πινάκων

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Άσκηση 5.** Έστω  $A$  ένας διαγωνίσιμος πίνακας. Δείξτε ότι ο πίνακας  $A^2 + A$  είναι διαγωνίσιμος.

**Άσκηση 6.** Έστω  $\phi : V \rightarrow V$  μια γραμμική απεικόνιση ( $\dim_K V = n$ ).

α) Δείξτε ότι ο  $\phi$  είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν  $\chi_\phi(0) \neq 0$ .

β) Δείξτε ότι ο  $\phi$  είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν  $m_\phi(0) \neq 0$ . Σε αυτή την περίπτωση, αν  $m_\phi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{m-1}x^{m-1} + x^m$ , δείξτε ότι

$$\phi^{-1} = -a_0^{-1}(a_1 1_V + a_2 \phi + \dots + a_{m-1} \phi^{m-2} + \phi^{m-1}).$$

γ) Ναδειχθεί ότι η γραμμική απεικόνιση  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $\phi(x, y, z) = (x + y + 2z, y + 3z, 2z)$  είναι ισομορφισμός και να εκφραστεί η  $\phi^{-1}$  ως συνδυασμός των  $1_{\mathbb{R}^3}$  (=ταυτοτική) και  $\phi$ .

**Άσκηση 7.** Είναι ο παρακάτω πίνακας διαγωνίσιμος α) στο σώμα  $\mathbb{R}$ ; β) στο σώμα  $\mathbb{C}$ ;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

**Άσκηση 8.** Έστω  $A$  ένας πίνακας που ικανοποιεί την σχέση  $A^3 = A$ . Εξετάστε τι μορφή έχει το ελάχιστο πολυώνυμο του  $A$  και συμπεράνατε ότι ο  $A$  είναι διαγωνίσιμος.

**Άσκηση 9.** Δείξτε ότι η γραμμική απεικόνιση  $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n}$  με  $\phi(f(x)) = f'(x)$  δεν είναι διαγωνίσιμη.