ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ - ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2015-16
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #4

***Ασκηση* 1.** Βρείτε τήν μορφή Jordan τών παρακάτω πινάκων με στοιχεία στό $\mathbb{C}$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

***Ασκηση* 2.** Βρείτε τήν μορφή Jordan τών παρακάτω πινάκων με στοιχεία στό $\mathbb{C}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

***Ασκηση* 3.** α) Δείξτε ότι δύο 3×3 μηδενοδύναμοι πίνακες είναι όμοιοι εάν και μόνον εάν έχουν τό ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.
β) Βρείτε παράδειγμα δύο 4×4 μηδενοδύναμων πινάκων που έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο αλλά δεν είναι όμοιοι.

***Ασκηση* 4.** α) Έστω N ένας $n \times n$ μηδενοδύναμος πίνακας με δείκτη s. Δείξτε ότι $s \leq n$.
β) Έστω N ένας $n \times n$ μηδενοδύναμος πίνακας και I_n ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας. Δείξτε ότι ο πίνακας $I + N$ είναι αντιστρέψιμος.
γ) Έστω N ένας 3×3 μηδενοδύναμος πίνακας. $A = I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$. Δείξτε ότι $A^2 = I + N$.

***Ασκηση* 5.** Έστω $\phi : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_\phi(x) = (x - \lambda_1)^{t_1} \cdots (x - \lambda_k)^{t_k}$ και ελάχιστο πολυώνυμο $m_\phi(x) = (x - \lambda_1)^{s_1} \cdots (x - \lambda_k)^{s_k}$, $1 \leq s_i \leq t_i$. Έστω $V_i = \mathrm{Ker}(\phi - \lambda_i 1_V)^{s_i}$, όπως στο μάθημα. Δείξτε ότι $\dim V_i = t_i$. (Υπόδειξη: γράψτε τήν μορφή Jordan τού ϕ που επάγεται από την ανάλυση $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, όπως στό μάθημα. Ποιό είναι τότε τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο τού $\phi_i = \phi|_{V_i} : V_i \to V_i$;).

***Ασκηση* 6.** Έστω $\phi : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_\phi(x) = (x-1)(x-2)(x-5)^3$.
α) Αν τό ελάχιστο πολυώνυμο τής ϕ είναι τό $m_\phi(x) = (x-1)(x-2)(x-5)$ βρείτε τήν μορφή Jordan τής ϕ.
β) Αν τό ελάχιστο πολυώνυμο τής ϕ είναι τό $m_\phi(x) = (x-1)(x-2)(x-5)^2$ βρείτε τήν μορφή Jordan τής ϕ.
γ) Αν τό ελάχιστο πολυώνυμο τής ϕ είναι τό $m_\phi(x) = (x-1)(x-2)(x-5)^3$ βρείτε τήν μορφή Jordan τής ϕ.
(Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε τήν παραπάνω άσκηση 5).

Ασκηση 7. Έστω $\phi : V \to V$ μια γραμμική απεικόνιση με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_\phi(x) = (x-1)^2(x-2)^3$.
α) Αν τό ελάχιστο πολυώνυμο τής ϕ είναι το $m_\phi(x) = (x-1)^2(x-2)^3$ βρείτε τήν μορφή Jordan τής ϕ.
β) Αν τό ελάχιστο πολυώνυμο τής ϕ είναι το $m_\phi(x) = (x-1)^2(x-2)^2$ βρείτε τήν μορφή Jordan τής ϕ.
γ) Αν τό ελάχιστο πολυώνυμο τής ϕ είναι το $m_\phi(x) = (x-1)(x-2)^2$ βρείτε τήν μορφή Jordan τής ϕ.