ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ - ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2015-16
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #5

***Ασκηση* 1.** α) Δείξτε ότι τα διανύσματα $v_1 = \frac{1}{2} < 1+i, 1-i, 0 >$, $v_2 = \frac{1}{2} < 1, i, 1-i >$, $v_3 = \frac{1}{2} < 1, i, -1+i >$ αποτελούν ορθοκανονική βάση τού $\mathbb{C}^3$ ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο.
β) Εκφράστε το διάνυσμα $v =< i, 2, -3 >$ ως προς την παραπάνω βάση.

***Ασκηση* 2.** Βρείτε έναν μοναδιαίο 3×3 πίνακα τού $M_3(\mathbb{C})$ με πρώτη στήλη το διάνυσμα $< 1, i, -2 >$.

***Ασκηση* 3.** Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ ένας μοναδιαίος πίνακας.
α) Αν λ είναι ιδιοτιμή τού A δείξτε ότι και το $1/\bar{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή τού A.
β) Δείξτε ότι $|\mathrm{det} A| = 1$.

***Ασκηση* 4.** Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$.
α) Δείξτε ότι ο A είναι κανονικός πίνακας
β) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση τού $\mathbb{C}^2$ που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα τού A.

***Ασκηση* 5.** Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$.
α) Δείξτε ότι ο A είναι κανονικός πίνακας
β) Γράψτε τον A ως $A = PDP^{-1}$, όπου D διαγώνιος και P μοναδιαίος.

***Ασκηση* 6.** Αν $A \in M_n(\mathbb{C})$ είναι ένας κανονικός και μηδενοδύναμος πίνακας τότε ποιός είναι ο A;

***Ασκηση* 7.** Βρείτε τίς γραφικές παραστάσεις τών παρακάτων καμπύλων τού $\mathbb{R}^2$.
α) $3x^2 + 3y^2 - 2xy = 5$.
β) $5x^2 + 5y^2 - 4xy = 10$.

***Ασκηση* 8.** Βρείτε τίς γραφικές παραστάσεις τών παρακάτων καμπύλων τού $\mathbb{R}^2$.
α) $x^2 - 4xy - 2y^2 = 4$.
β) $x^2 - 4xy - 2y^2 + x - y = 4$.

***Ασκηση* 9.** Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{C}^n$ εφοδιασμένο με τό κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Έστω W ένας γραμμικός υπόχωρος τού χώρου $\mathbb{C}^n$. Θεωρούμε την διάσπαση $\mathbb{C}^n = W \oplus W^\perp$. Αν $v \in \mathbb{C}^n$ τότε τό v γράφεται μοναδικά ως $v = w + w'$ με $w \in W$, $w' \in W^\perp$. Ορίζουμε $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ως $\phi(v) = w - w'$.
α) Δείξτε ότι η ϕ είναι γραμμικός ισομορφισμός.
β) Έστω A ο πίνακας τής ϕ ως προς τήν κανονική βάση. Δείξτε ότι ο A είναι ερμητιανός και μοναδιαίος.

Ασκηση 10. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ θετικά ορισμένοι συμμετρικοί πίνακες.
α) Δείξτε ότι ο πίνακας $A + B$ είναι θετικά ορισμένος.
β) Έστω $\lambda > t > 0 \in \mathbb{R}$ και $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ με $a_{ij} = t$ όταν $i \neq j$ και $a_{ii} = \lambda$. Δείξτε ότι ο A είναι θετικά ορισμένος.

Ασκηση 11. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ συμμετρικός πίνακας. Δείξτε ότι ο A^2 είναι θετικά ημιορισμένος.

Ασκηση 12. Έστω $P \in M_n(\mathbb{R})$ μοναδιαίος (ορθογώνιος) πίνακας.
α) Αν $x \in \mathbb{R}^n$ με $|x| = 1$ και $y = P^t x$ δείξτε ότι $|y| = 1$.
β) Έστω $q'(x) = y^t D y$, όπου D ένας $n \times n$ πραγματικός διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία $\lambda_i,\ i = 1, \dots, n$. Έστω $M = \max\{q'(y),\quad |y| = 1\}$ και $m = \min\{q'(y),\ |y| = 1\}$. Δείξτε ότι $M = \max_i \lambda_i$ και $m = \min_i \lambda_i$.
γ) Έστω $q(x) = x^t A x$, όπου A ένας πραγματικός $n \times n$ συμμετρικός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_i,\ i = 1, \dots, n$. Έστω $M = \max\{q(x),\quad |x| = 1\}$ και $m = \min\{q'(x),\quad |x| = 1\}$. Δείξτε ότι $M = \max_i \lambda_i$ και $m = \min_i \lambda_i$.
δ) Βρείτε τήν μέγιστη και τήν ελάχιστη τιμή τής $q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 2xy + xz + yz$ όταν $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.