

Γραμμική Άλγεβρα II, Χειμερινό Εξάμ. 2015-16
ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Παράγραφοι από τό βιβλίο που αντιστοιχούν στην διδαχθείσα θεωρία:

Τά μαθήματα τών 22/9, 24/9, 29/9 ήταν επανάληψη από τήν προηγούμενη Γραμμική Άλγεβρα και αφορούν τίς παραγράφους 4, 5 και 6 (ΜΕΡΟΣ I τού βιβλίου).

Τά επόμενα μαθήματα αναφέρονται στο ΜΕΡΟΣ II τού βιβλίου και μέχρι τό μάθημα τής 17/12 αντιστοιχούν στίς παραγράφους: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 2.1, 2.2, 2.4, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5.

Αναλυτικό ημερολόγιο μαθήματος:

Τρίτη 22 Σεπτεμβρίου: Διανυσματικοί χώροι πάνω από σώμα k . Παραδείγματα. Συστήματα γεννητόρων, γραμμική ανεξαρτησία, βάσεις, διάσταση, γραμμικοί υπόχωροι, υπόχωροι που παράγονται από ένα σύνολο στοιχείων τού διανυσματικού χώρου.

Πέμπτη 24 Σεπτεμβρίου: Διανυσματικοί χώροι πηλίκων και η διάστασή τους. Γραμμικές απεικονίσεις. Πυρήνας - εικόνα. Το θεμελιώδες θεώρημα των γραμμικών απεικονίσεων. Η υλοποίηση ενός χώρου πηλίκων δια μέσου τού θεμελιώδους θεωρήματος.

Τρίτη 29 Σεπτεμβρίου: Η αντιστοιχία γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων. Ο ισομορφισμός τού δακτύλιου (k -άλγεβρας) $M_n(k)$ τών $n \times n$ πινάκων με στοιχεία στο k με τον δακτύλιο (k -άλγεβρα) $\text{End}_k(V)$ τών ενδομορφισμών τού k -διανυσματικού χώρου V διάστασης n . Το άθροισμα δύο υπόχωρων ενός διανυσματικού χώρου και η διάστασή του. Το ευθύ άθροισμα δύο k -διανυσματικών χώρων και η βάση του.

Πέμπτη 1 Οκτωβρίου: Δακτύλιοι, ομομορφισμοί δακτυλίων, ιδεώδη. Ιδεώδη που παράγονται από στοιχεία τού δακτυλίου. Ο πυρήνας ενός ομομορφισμού είναι ιδεώδες. Τα ιδεώδη τού $k[x]$, k = σώμα. Παραδείγματα ομομορφισμών τής μορφής $\phi : k[x] \rightarrow R$, R = δακτύλιος, και ιδιαίτερα ο ομομορφισμός $F_A : k[x] \rightarrow M_n(k)$ με $F_A(f(x)) = f(A)$, όπου A ένας $n \times n$ πίνακας.

Τρίτη 6 Οκτωβρίου: Ο πυρήνας τού F_A είναι $\neq \{0\}, K[x]$. Τό ελάχιστο πολυώνυμο f_A τού πίνακα A . Τό f_A διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο τού A .

Πέμπτη 8 Οκτωβρίου: Παραδείγματα εύρεσης ελάχιστου πολυωνύμου πίνακα. Ο ομομορφισμός $F_\phi : k[x] \rightarrow \text{End}_k(V)$ με $F_\phi(f(x)) = f(\phi)$, όπου ϕ ένας ενδομορφισμός $\phi : V \rightarrow V$. Αν A ο πίνακας τού ϕ ως προς οποιαδήποτε βάση τού V τότε $\text{Ker}F_A = \text{Ker}F_\phi$. Όμοιοι πίνακες έχουν τό ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Τρίτη 13 Οκτωβρίου: Διάσπαση διανυσματικού χώρου σε ευθύ άθροισμα υπόχωρων. ϕ -αναλλοιώτοι υπόχωροι ενός ενδομορφισμού $\phi : V \rightarrow V$. Ο πίνακας τού ενδομορφισμού (ως προς κατάλληλα επιλεγμένη βάση) όταν ο V διασπάται σε ευθύ άθροισμα ϕ -αναλλοιώτων υπόχωρων.

Πέμπτη 15 Οκτωβρίου: Επανάληψη στις ορίζουσες. Ιδιοδιτιμές και ιδιοδιανύσματα ενός ενδομορφισμού. Εύρεση ιδιοτιμών με την χρήση τού πίνακα τού ενδομορφισμού (ως προς μια επιλογή βάσης). Συζητήσαμε τις ασκήσεις τού φυλλαδίου 1.

Τρίτη 20 Οκτωβρίου: Τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_\phi(x)$ ενός ενδομορφισμού $\phi : V \rightarrow V$ - τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$ ενός τετραγωνικού πίνακα A . Ιδιότητες τού χαρακτηριστικού πολυωνύμου: βαθμός, μεγιστοβάθμιος και σταθερός όρος. Ο γραμμικός υπόχωρος ιδιοδιανυσμάτων V_λ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ και η διάστασή του.

Πέμπτη 22 Οκτωβρίου: Αν $s = \dim_K V_\lambda$ τότε $(x - \lambda)^s \mid \chi_\phi(x)$. Το θεώρημα Cayley-Hamilton. Τό ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Τό ελάχιστο πολυώνυμο και τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχουν τό ίδιο σύνολο ριζών.

Τρίτη 27 Οκτωβρίου: Συζητήσαμε τις ασκήσεις τού φυλλαδίου 2.

Πέμπτη 29 Οκτωβρίου: Σχετικά με τό χαρακτηριστικό και τό ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα με διαγώνια μπλόκς ή ενός μπλόκ - άνω τριγωνικού πίνακα. Τό χαρακτηριστικό και τό ελάχιστο πολυώνυμο ενός διαγώνιου πίνακα. Διαγωνίσιμοι πίνακες και διαγωνίσιμες απεικονίσεις. Μια γραμμική απεικόνιση $\phi : V \rightarrow V$ είναι διαγωνίσιμη αν και μόνον αν ο V έχει βάση ιδιοδιανυσμάτων. Αποδείξαμε ένα Λήμμα που θα τό χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε τήν ανεξαρτησία τών χώρων ιδιοδιανυσμάτων V_λ , όπου λ ιδιοτιμή τής $\phi : V \rightarrow V$.

Τρίτη 3 Νοεμβρίου: Οι χώροι ιδιοδιανυσμάτων ενός ενδομορφισμού είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Κριτήριο διαγωνισιμότητας που εμπεριέχει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο: Η $\phi : V \rightarrow V$ είναι διαγωνίσιμη αν και μόνον αν $\chi_\phi(x) = (x - \lambda_1)^{s_1} \cdots (x - \lambda_k)^{s_k}$ με $s_i = \dim_K V_{\lambda_i}$, όπου $\lambda_i, i = 1, \dots, k$ οι διαφορετικές ιδιοτιμές τής ϕ .

Πέμπτη 5 Νοεμβρίου: Κριτήριο διαγωνισιμότητας που εμπεριέχει το ελάχιστο πολυώνυμο: Η $\phi : V \rightarrow V$ είναι διαγωνίσιμη αν και μόνον αν $m_\phi(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$, όπου $\lambda_i, i = 1, \dots, k$ οι διαφορετικές ιδιοτιμές τής ϕ .

Τρίτη 10 Νοεμβρίου: Ο πίνακας παράστασης ενός μηδενοδύναμου ενδομορφισμού $\phi : V \rightarrow V$ με ελάχιστο πολυώνυμο $m_\phi(x) = x^n, n = \dim_K V$. Συζητήσαμε τις ασκήσεις τού φυλλαδίου 3.

Πέμπτη 12 Νοεμβρίου: Συζητήσαμε τις ασκήσεις τού φυλλαδίου 3. Έστω $\phi : V \rightarrow V$ ενδομορφισμός με $m_\phi(x) = p(x)q(x)$ με $(p(x), q(x)) = 1$ μονικά πολυώνυμα. Τότε έχουμε διάσπαση $V = V_p \oplus V_q$ σε ϕ -αναλλοίωτους υπόχωρους. Επίσης, αν $\phi_p = \phi|_{V_p}$ και $\phi_q = \phi|_{V_q}$ τότε $m_{\phi_p}(x) = p(x)$ και $m_{\phi_q}(x) = q(x)$.

Τρίτη 17 Νοεμβρίου: Αργία

Πέμπτη 19 Νοεμβρίου: Έστω $\phi : V \rightarrow V$ ενδομορφισμός με $m_\phi(x) = p_1(x)^{s_1} \cdots p_k(x)^{s_k}$ η ανάλυση του $m_\phi(x)$ σε ανάγωγα μονικά πολυώνυμα. Τότε έχουμε διάσπαση $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ σε ϕ -αναλλοιώτους υπόχωρους. Επίσης, αν $\phi_i = \phi|_{V_i}$ τότε $m_{\phi_i}(x) = p_i(x)^{s_i}$. Εφαρμογή του παραπάνω στην περίπτωση που το σώμα $K = \mathbb{C}$. Πίνακες $n \times n$ με μιγαδικά στοιχεία και ελάχιστο πολυώνυμο x^s , $s \leq n$. Η διατύπωση του θεωρήματος του Jordan.

Τρίτη 24 Νοεμβρίου: Η απόδειξη του θεωρήματος του Jordan.

Πέμπτη 19 Νοεμβρίου: Συζητήσαμε τις ασκήσεις του φυλλαδίου 4.

Τρίτη 1 Δεκεμβρίου: Κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Ορθοκανονικές βάσεις. Θεώρημα Gram-Schmidt.

Πέμπτη 3 Δεκεμβρίου: Μοναδιαίοι πίνακες. Ερμητιανοί πίνακες.

Τρίτη 8 Δεκεμβρίου: Το θεώρημα διαγωνοποίησης ερμητιανών και συμμετρικών πινάκων. Τό λήμμα του Schur.

Πέμπτη 10 Δεκεμβρίου: Κανονικοί πίνακες. Αλλαγές συντεταγμένων. Τετραγωνικές μορφές.

Τρίτη 15 Δεκεμβρίου: Γραφήματα καμπυλών που αντιστοιχούν σε τετραγωνικές μορφές. Θετικά (αρνητικά) ορισμένες και ημιορισμένες τετραγωνικές μορφές. Ο ανάλογος ορισμός για συμμετρικούς πίνακες. Συζητήσαμε τις ασκήσεις του φυλλαδίου 5.

Πέμπτη 17 Δεκεμβρίου: Συζητήσαμε τις ασκήσεις του φυλλαδίου 5.