

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2005-06
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 1

Πρόβλημα 1. Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:

α) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$

β) $x \frac{dy}{dx} + y^3 = 1$

γ) $x \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + 1}$

δ) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$

ε) $2\sqrt{xy} \frac{dy}{dx} = 1$

στ) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+y^2}{x^2}$.

Πρόβλημα 2. Να βρεθούν οι λύσεις των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων, με τις δοσμένες αρχικές συνθήκες:

α) $\frac{dy}{dx} = x - y$ με $y(0) = 1$.

β) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy+y^2}{3x^2+2xy}$ με $y(1) = 2$.

γ) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$ με $y(1) = 1$.

δ) $\frac{dy}{dx} + y^2 - 2xy + x^2 - 1 = 0$ με $y(-2) = 1$.

Πρόβλημα 3. Να λυθούν οι παρακάτω ασκήσεις από το βιβλίο *Απειροστικός Λογισμός*, τόμος 1, των Finney - Weir - Giordano:

α) Άσκηση #16 παραγράφος 6.4: Σε ορισμένες χημικές αντιδράσεις ο χρονικός ρυθμός μεταβολής της ποσότητας μιας ουσίας είναι ανάλογος της ήδη υπάρχουσας ποσότητας. Για την μετατροπή της δ-γλυκονολακτόνης σε γλυκονικό οξύ, είναι για παράδειγμα $\frac{dy}{dt} = -0.6y$, όπου ο χρόνος t μετριέται σε ώρες. Αν αρχικά υπάρχουν 100 g γλυκονολακτόνης πόσα γραμμάρια θα έχουν απομείνει μετά την πρώτη ώρα;

β) Άσκηση #17 παραγράφος 6.4: Η επεξεργασία της ακατέργαστης ζάχαρης περιλαμβάνει ένα στάδιο κατά το οποίο μεταβάλλεται η μοριακή δομή της. Όταν ξεκινήσει η διαδικασία αυτή, ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας της ακατέργαστης ζάχαρης είναι ανάλογος της εναπομείνουσας ποσότητας. Αν 1000 kg μετατραπούν σε 800 kg κατεργασμένης κατά τις πρώτες 10 ώρες, πόση ακατέργαστη ζάχαρη θα έχει απομείνει μετά από παρέλευση άλλων 14 ωρών;

γ) Άσκηση #3 παραγράφος 6.5: Λύστε την διαφορική εξίσωση $x \frac{dy}{dx} + 3y = \frac{\sin x}{x^2}$.

δ) Άσκηση #7 παραγράφος 6.5: Λύστε την διαφορική εξίσωση: $2 \frac{dy}{dx} = e^{x/2} + y$.

ε) Άσκηση #11 παραγράφος 6.5: Λύστε την διαφορική εξίσωση: $(t-1)^3 \frac{ds}{dt} + 4(t-1)^2 s = t + 1$.

στ) Άσκηση #16 παραγράφος 6.5: Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών: $t \frac{dy}{dt} + 2y = t^3$ με $y(2) = 1$.

ζ) Άσκηση # 20 παραγραφος 6.5: Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών: $\frac{dy}{dx} + xy = x$ με $y(0) = -6$.

η) Άσκηση # 25 παραγραφος 6.5: Μια δεξαμενή περιέχει αρχικά 100lt άλμης στην οποία είναι διαλυμένα 5kg αλατιού. Ένα δεύτερο διάλυμα άλμης που περιέχει 0.2kg/lit αλατιού χύνεται στην δεξαμενή με ρυθμό 5lt/min. Το μείγμα ομογενοποιείται με ανάδευση και εκχύνεται από την δεξαμενή με ρυθμό 4lt/min.

- i) Με ποιό ρυθμό kg/min εισέρχεται αλάτι στην δεξαμενή τη χρονική στιγμή t ;
- ii) Ποιός είναι ο όγκος τής άλμης στην δεξαμενή την χρονική στιγμή t ;
- iii) Με ποιό ρυθμό kg/min εξέρχεται αλάτι από την δεξαμενή την χρονική στιγμή t ;
- iv) Γράψτε την διαφορική εξίσωση τού προβλήματος (με τις αρχικές τιμές) που περιγράφει την διαδικασία τής αναμείξεως και λύστε την εξίσωση αυτή.
- v) Βρείτε την συγκέντρωση τού αλατιού στην δεξαμενή 25min μετά την έναρξη τής διαδικασίας.

θ) Άσκηση # 26 παραγραφος 6.5: Μια δεξαμενή χωρητικότητας 200lt είναι κατά το ήμισυ γεμάτη με αποσταγμένο νερό. Την χρονική στιγμή $t = 0$ ένα διάλυμα που περιέχει μια ουσία σε συγκέντρωση 0.5kg/lit εισρέει στην δεξαμενή με ρυθμό 5lt/min και κατόπιν το καλά αναδευμένο μείγμα αντλείται με ρυθμο 3lt/min.

- i) Σε ποιά χρονική στιγμή θα γεμίσει η δεξαμενή;
- ii) Την στιγμή που είναι γεμάτη η δεξαμενή, πόσα kg τής ουσίας θα περιέχει;