

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2005-06**  
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5**

**Πρόβλημα 1** Θεωρούμε τούς πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Λύστε τα συστήματα

$$AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AX = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

**Πρόβλημα 2** Εστω

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- α) Βρείτε τις λύσεις του ομογενούς συστήματος  $AX = 0$ .  
β) Βρείτε τις λύσεις του συστήματος  $AX = B$ .  
γ) Διαλέξτε έναν  $4 \times 1$  πίνακα  $C$  έτσι ώστε το σύστημα  $AX = C$  να μην έχει λύση.

**Πρόβλημα 3** Βρείτε τη λύση των παρακάτω συστημάτων:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

**Πρόβλημα 4** Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & a \end{bmatrix}.$$

- α) Βρείτε για ποιές τιμές του  $a$  ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος.  
β) Για τις παραπάνω τιμές του  $a$ , βρείτε τον αντίστροφο πίνακα  $A^{-1}$  του  $A$ .

**Πρόβλημα 5** Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον αντίστροφό του.

**Πρόβλημα 6** Δείξτε ότι οι παρακάτω πίνακες  $A, B$  είναι αντιστρέψιμοι και βρείτε τους αντίστροφούς τους.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$