ΘΕΩΡΙΑ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2005-06
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Πρόβλημα 1. Ποιά από τα επόμενα είναι δακτύλιοι και γιατί:
α) Το σύνολο των θετικών ακεραίων με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.
β) Το σύνολο των απεικονίσεων $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ από ένα σύνολο X στους πραγματικούς αριθμούς, με πράξεις: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ και $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
γ) Το σύνολο $\{\frac{m}{n},\ \ m, n$ ακέραιοι και το 4 δεν διαιρεί τον $m\}$, με πράξεις τη πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.
δ) Το υποσύνολο $R \subset \mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων με σταθερό όρο ίσο με το μηδεν.
ε) Το υποσύνολο $S \subset \mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων με σταθερό όρο ίσο με την μονάδα.
στ) Τα πολυώνυμα $\mathbb{Z}_m[x]$ μεταβλητής x με συντελεστές στο $\mathbb{Z}_m$, με πράξεις τις επαγόμενες από αυτές τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_m$.

Πρόβλημα 2. Ποιοί από τούς παρακάτω δακτυλίους είναι ακέραια περιοχή;
α) Τα πολυώνυμα $\mathbb{Z}_7[x]$.
β) Τα πολυώνυμα $\mathbb{Z}_8[x]$.

Πρόβλημα 3. **α)** Έστω R μια ακέραια περιοχή με $x^2 = x$ για κάθε $x \in R$. Δείξτε ότι ο R έχει δύο μόνο στοιχεία.
β) Εστω R ένας δακτύλιος με $x^2 = x$ για κάθε $x \in R$. Δείξτε ότι ο R είναι αντιμεταθετικός.

Πρόβλημα 4. Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία (μονάδες) στους επόμενους δακτύλιους:
α) $\mathbb{Z}[x]$, **β)** $\mathbb{Z}_5[x]$, **γ)** $\mathbb{R}[x]$.

Πρόβλημα 5. Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία (μονάδες) τού δακτυλίου $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}[\omega]$, όπου $\omega \neq 1$ είναι ρίζα τής εξίσωσης $x^3 - 1 = 0$.

Πρόβλημα 6. Είναι το $\bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{3}$ αντιστρέψιμο στοιχείο τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_4[x]$;

Πρόβλημα 7. **α)** Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] := \{a + b\sqrt{3},\ \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ αποτελεί υπόσωμα τού σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
β) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] := \{a + b\sqrt{3},\ \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ δεν αποτελεί υπόσωμα τού σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Πρόβλημα 8. Ένα στοιχείο a ενός δακτυλίου R λέγεται μηδενοδύναμο αν υπάρχει φυσικός αριθμός n με $a^n = 0_R$.
α) Δείξτε ότι αν το $a \neq 0_R$ είναι μηδενοδύναμο, τότε είναι μηδενοδιαιρέτης.
β) Βρείτε τα μηδενοδύναμα στοιχεία των δακτυλίων $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_{10}$.
γ) Υποθέτουμε ότι ο δακτύλιος R έχει μοναδιαίο στοιχείο το 1_R και έστω a κάποιο μηδενοδύναμο στοιχείο του. Δείξτε ότι το στοιχείο $1_R + a$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο τού R.