ΘΕΩΡΙΑ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2005-06
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

Πρόβλημα 1. **α)** Δείξτε ότι κάθε υποδακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο τού σώματος $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών περιέχει τον δακτύλιο των ακεραίων.
β) Βρείτε ένα γνήσιο υποδακτύλιο με μοναδιαίο στοιχείο τού σώματος $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών που δεν ταυτίζεται με τον δακτύλιο των ακεραίων.
γ) Δείξτε ότι κάθε υπόσωμα των πραγματικών αριθμών περιέχει το σώμα των ρητών αριθμών.

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ που ορίζεται ως $\phi(a+ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ είναι μονομορφισμός δακτυλίων.

Πρόβλημα 3. Έστω R δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο 1_R γιά τον οποίο ισχύει ότι κάθε υποδακτύλιός του είναι και ιδεώδες. Δείξτε ότι $R = 0$ ή $R = \mathbb{Z}$ ή $R = \mathbb{Z}_n$ (*Υπόδειξη:* Κάνετε χρήση τού ομομορφισμού δακτυλίων $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ που ορίζεται ως $\phi(m) = m1_R$). Βρείτε παράδειγμα δακτυλίου χωρίς μοναδιαίο στοιχείο που κάθε υποδακτύλιός του είναι και ιδεώδες.

Πρόβλημα 4. Δείξτε ότι ένας ομομορφισμός από ένα σώμα F σε ένα δακτύλιο R είναι είτε μονομορφισμός είτε ο μηδενικός ομομορφισμός.

Πρόβλημα 5. Έστω I ιδεώδες ενός δακτυλίου R. Δείξτε ότι το σύνολο $r(I) = \{x \in R, \text{ με } xa = 0 \text{ γιά κάθε } a \in I\}$ ορίζει ένα ιδεώδες τού R.

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $M_2(\mathbb{Q})$ των 2×2 πινάκων με στοιχεία στους ρητούς αριθμούς δεν έχει άλλα ιδεώδη εκτός των προφανών (δηλ. $I = \{0\}$ και $I = M_2(\mathbb{Q})$) (*Υπόδειξη:* Αν $I \neq \{0\}$ τότε για να δείξετε ότι $I = M_2(\mathbb{Q})$ αρκεί να δείξετε ότι περιέχει κάποιο αντιστρέψιμο στοιχείο. Εφαρμόστε τον αλγόριθμο τού Gauss). Ισχύει το ίδιο για τον δακτύλιο $M_2(\mathbb{Z})$ των 2×2 πινάκων με στοιχεία στους ακέραιους αριθμούς;

Πρόβλημα 7. Δείξτε ότι τα αντιστρέψιμα στοιχεία τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_{10}[x]$ είναι τα σταθερά πολυώνυμα που θεωρούμενα ως στοιχεία τού $\mathbb{Z}_{10}$ είναι αντιστρέψιμα. (*Υπόδειξη:* Ορίσατε φυσιολογικούς ομομορφισμούς δακτυλίων $\phi : \mathbb{Z}_{10}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_5[x]$ και $\psi : \mathbb{Z}_{10}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_2[x]$. Δείξτε ότι αν $f \in \mathbb{Z}_{10}[x]$ αντιστρέψιμο τότε και τα $\phi(f) \in \mathbb{Z}_5[x]$, $\psi(f) \in \mathbb{Z}_2[x]$ είναι αντιστρέψιμα στοιχεία των αντίστοιχων δακτυλίων).