**ΘΕΩΡΙΑ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2005-06**
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ #3**

**Πρόβλημα 1.** **α)** Υπάρχει, μη μηδενικός, ομομορφισμός δακτυλίων από το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών στον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων;
**β)** Υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων από τον δακτύλιο $2\mathbb{Z}$ στον δακτύλιο $3\mathbb{Z}$;

**Πρόβλημα 2.** Βρείτε τα πρώτα και τα μέγιστα ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbf{Z}_{12}$.

**Πρόβλημα 3.** Εστω $R$ αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Δείξτε ότι αν το $I$ είναι πρώτο ιδεώδες τέτοιο ώστε ο δακτύλιος πηλίκων $R/I$ να έχει πεπερασμένα στοιχεία, τότε το $I$ είναι μέγιστο ιδεώδες.

**Πρόβλημα 4.** Εστω $\mathcal{C}([0,1])$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από το διάστημα $[0,1]$ με τιμές στους πραγματικούς αριθμούς.
**α)** Δείξτε ότι το $\mathcal{C}([0,1])$ είναι δακτύλιος με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό συναρτήσεων.
**β)** Εστω $\gamma \in [0,1]$. Δείξτε ότι το $M_\gamma = \{f(x) \in \mathcal{C}([0,1]),\ f(\gamma) = 0\}$ είναι μέγιστο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathcal{C}([0,1])$. (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήσατε τον ομομορφισμό δακτυλίων $\phi : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $\phi(f) = f(\gamma)$).
**γ)** Δείξτε ότι αν $I$ είναι ένα μέγιστο ιδεώδες τού $\mathcal{C}([0,1])$ τότε $I = M_\gamma$, γιά κάποιο $\gamma \in [0,1]$. (*Υπόδειξη:* Αν όχι, τότε για κάθε $\gamma \in [0,1]$ υπάρχει $f_\gamma \in I$ με $f_\gamma(\gamma) \neq 0$. Τότε, λόγω συνέχειας υπάρχει και ανοικτή περιοχή $U_\gamma$ τού $\gamma$ στην οποία η $f_\gamma$ δεν μηδενίζεται. Λόγω συμπαγειας, υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη τού $[0,1]$ από τέτοιες περιοχές, έστω $U_{\gamma_1}, \ldots, U_{\gamma_n}$. Θεωρώντας τις αντίστοιχες συναρτήσεις $f_{\gamma_1}, \ldots, f_{\gamma_n}$ κατασκευάστε τότε ένα αντιστρέψιμο στοιχείο το οποίο ανήκει στο ιδεώδες $I$.)

**Πρόβλημα 5.** Εστω $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ η ανάλυση τού φυσικού αριθμού $n$ σε πρώτους αριθμούς. Δείξτε ότι $< n >=< p_1^{a_1} > \cap \cdots \cap < p_k^{a_k} >$.

**Πρόβλημα 6.** Εστω $\phi : R \longrightarrow S$ επιμορφισμός δακτυλίων και έστω $I$ ιδεώδες τού $R$.
**α)** Δείξτε ότι το $\phi(I)$ είναι ιδεώδες τού $S$.
**β)** Εστω $\ker\phi \subseteq I$. Δείξτε ότι το $I$ είναι πρώτο ιδεώδες τού $R$ εάν και μόνον εάν το $\phi(I)$ είναι πρώτο ιδεώδες τού $S$.

**Πρόβλημα 7.** **α)** Δείξτε ότι το ιδεώδες $< x >$ δεν είναι μέγιστο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$.
**β)** Δείξτε ότι το ιδεώδες $< x+1, 5 >$ είναι μέγιστο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$.

**Πρόβλημα 8.** Εστω $I =< x^4 + x, 5 \mathrm{mod} 6\, x^2 >$ ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_6[x]$.
**α)** Δείξτε ότι $I \neq \mathbb{Z}_6[x]$.
**β)** Δείξτε ότι το $I$ είναι κύριο ιδεώδες τού $\mathbb{Z}_6[x]$.
**γ)** Δείξτε ότι το $I$ δεν είναι μέγιστο ιδεώδες τού $\mathbb{Z}_6[x]$.

**Πρόβλημα 9.** Δείξτε ότι το σύνολο των μηδενοδύναμων στοιχείων ενός αντιμεταθετικού δακτυλίου (βλ. πρόβλημα 8, φυλλάδιο 1) είναι ιδεώδες.

**Πρόβλημα 10.** Έστω $p$ ένας πρώτος αριθμός. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ που ορίζεται ως $\phi(a\mathrm{mod}p) = a^p\mathrm{mod}p$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων. Βρείτε την εικόνα και τον πυρήνα του.

**Πρόβλημα 11.** Ποιά από τα παρακάτω είναι σώματα;
**α)** $\mathbb{Q}/ < x^2 - 5x + 6 >$
**β)** $\mathbb{Q}/ < x^2 - 6x + 6 >$
**γ)** $\mathbb{R}/ < x^2 - 6x + 6 >$