ΘΕΩΡΙΑ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2005-06
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #4

Πρόβλημα 1. **α)** Δείξτε ότι στον δακτύλιο $\mathbb{R}[x, y]$ το κύριο ιδεώδες (x) είναι πρώτο αλλά όχι μέγιστο ιδεώδες.
β) Δείξτε ότι στον δακτύλιο $\mathbb{R}[x, y]$ το ιδεώδες (x, y) είναι μέγιστο ιδεώδες.

Πρόβλημα 2. **α)** Αποδείξτε οτι το ιδεώδες (x, y) δεν είναι κύριο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbf{R}[x, y]$.
β) Αποδείξτε οτι στον δακτύλιο $(\mathbf{R}(x))[y]$, όπου $\mathbf{R}(x)$ το σώμα κλασμάτων τού δακτυλίου $\mathbf{R}[x]$, έχομε ότι $(x, y) = (\mathbf{R}(x))[y]$.

Πρόβλημα 3. Βρείτε τον πυρήνα τού ομομορφισμού δακτυλίων $\phi : \mathbf{R}[x, y] \longrightarrow \mathbf{R}[x]$ ρου ορίζεται από $\phi(f(x, y)) = f(x, x)$.

Πρόβλημα 4. Εστω R μια ακέραια περιοχή και F_R το σώμα κλασμάτων της. Δείξτε ότι κάθε πολυώνυμο $f(x) \in F_R[x]$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή $f(x) = a^{-1} f_1(x)$, όπου $a \in R$ και $f_1(x) \in R[x]$.

Πρόβλημα 5. Έστω $I \neq R$ ιδεώδες δακτυλίου R που δεν είναι πρώτο ιδεώδες. Δείξτε τότε ότι υπάρχουν ιδεώδη J_1, J_2 του R τέτοια ώστε $I \subsetneq J_1$, $I \subsetneq J_2$ και $J_1 J_2 \subseteq I$.

Πρόβλημα 6. Εστω $\mathbb{Z}[i] = \{n + mi,\ n, m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.
α) Δείξτε ότι ο $\mathbb{Z}[i]$ είναι δακτύλιος (ονομάζεται ο δακτύλιος των ακεραίων τού Gauss).
β) Έστω p ενας πρώτος αριθμός. Ορίζουμε τον επιμορφισμό δακτυλίων $\phi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[i]$ με $\phi(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{f}(i)$. Δείξτε ότι ο πυρήνας τού ϕ είναι το ιδεώδες $(x^2 + 1)$.
γ) Δείξτε ότι ο ϕ επάγει επιμορφισμό δακτυλίων $\bar{\phi} : \mathbb{Z}_p[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[i]/(p)$. Γράψτε τον τύπο γιά τον $\bar{\phi}$ (δείξτε ότι είναι καλά ορισμένος) και δείξτε ότι ο πυρήνας τού $\bar{\phi}$ είναι το ιδεώδες $(x^2 + \bar{1})$ τού $\mathbb{Z}_p[x]$.
δ) Δείξτε ότι ο πρώτος αριθμός p είναι πρώτο στοιχείο τού δακτυλίου $\mathbb{Z}[i]$ εάν και μόνον εάν το πολυώνυμο $x^2 + \bar{1}$ είναι ανάγωγο στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_p[x]$.