

**ΘΕΩΡΙΑ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2005-06**  
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5**

**Πρόβλημα 1.** Εστω  $\omega$  μιά ρίζα της εξίσωσης  $x^2 = -5$ . Δείξτε ότι το 3 δεν διαιρεί το  $1 + 2\omega$  στον δακτύλιο  $\mathbb{Z}[\omega] = \{m + n\omega, m, n \in \mathbb{Z}\}$ .

**Πρόβλημα 2.** Εστω  $\omega$  μιά ρίζα της εξίσωσης  $x^2 = -3$ . Δείξτε ότι στον δακτύλιο  $\mathbb{Z}[\omega]$  (ορισμός όπως παραπάνω) τα στοιχεία  $1 + \omega$  και  $1 - \omega$  είναι πρώτα μεταξύ τους.

**Πρόβλημα 3.** Εστω  $\omega$  μιά ρίζα της εξίσωσης  $x^2 = -7$ . Δείξτε ότι στον δακτύλιο  $\mathbb{Z}[\omega]$  (ορισμός όπως παραπάνω) το 8 μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο αναγώγων στοιχείων του  $\mathbb{Z}[\omega]$ , όπως επίσης και ως γινόμενο τριών αναγώγων στοιχείων του  $\mathbb{Z}[\omega]$ .

**Πρόβλημα 4.** Εστω  $\omega^2 = -5$  και  $\mathbb{Z}[\omega] = \{n + m\omega, n, m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ .

α) Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου  $\mathbb{Z}[\omega]$ .

β) Δείξτε ότι το στοιχείο 6 έχει δύο διαφορετικές αναλύσεις ως γινόμενο αναγώγων στοιχείων του  $\mathbb{Z}[\omega]$ .