ΘΕΩΡΙΑ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2005-06
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #6

Πρόβλημα 1. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^4 + 2x + 2$ είναι ανάγωγο πάνω από το σώμα $\mathbf{Q}$ των ρητών αριθμών

Πρόβλημα 2. Έστω $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{m + n\omega,\ m, n \in \mathbb{Z}\}$, όπου $\omega^2 = -5$. Δείξτε ότι στον παραπάνω δακτύλιο το στοιχείο $2 + \omega$ είναι ανάγωγο αλλά όχι πρώτο.

Πρόβλημα 3. Έστω $S = \{a + xf(x, y),$ όπου $a \in \mathbb{Z}$ και $f(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]\}$.
α) Δείξτε ότι το S είναι υποδακτύλιος τού $\mathbb{Z}[x, y]$
β) Έστω

$$I_0 =< x >,\ I_1 =< x, xy >,\ I_2 =< x, xy, xy^2 >, \dots, I_n =< x, xy, xy^2, \dots, xy^n >, \dots$$

Δείτε ότι τα παραπάνω ιδεώδη σχηματίζουν μιά άπειρη γνησίως αύξουσα ακολουθία ιδεωδών.

Πρόβλημα 4. Εστω R Π.Μ.Α. και $a \in R$. Δείξτε ότι υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος κύρια ιδεώδη που περιέχουν το ιδεώδες $< a >$.

Πρόβλημα 5. Έστω R μια Π.Μ.Α. Δείξτε ότι κάθε μή σταθερός διαιρέτης ενός πρωταρχικού πολυωνύμου τού $R[x]$ είναι, επίσης, πρωταρχικό πολυώνυμο.

Πρόβλημα 6. Έστω $S = \{a + x^3 f(x, y) + xyg(x, y) + y^3 h(x, y),$ όπου $a \in \mathbb{R}$ και $f(x, y), g(x, y), h(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]\}$.
α) Δείξτε ότι το S είναι υποδακτύλιος τού $\mathbb{R}[x, y]$
β) Δείξτε ότι x^3, xy, y^3 είναι ανάγωγα αλλά όχι πρώτα στοιχεία τού δακτυλίου S.
γ) Είναι κάθε υποδακτύλιος μιάς Π.Μ.Α. και αυτός Π.Μ.Α. ;