

ΘΕΩΡΙΑ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2005-06
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 7

Πρόβλημα 1. Έστω E Ευκλείδεια περιοχή με στάθμη $\nu : E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Δείξτε τα ακόλουθα:

α) $\nu(1) \leq \nu(a)$ για κάθε $a \in E \setminus \{0\}$.

β) $\nu(a) = \nu(1)$ εάν και μόνον εάν το a είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του δακτυλίου E .

γ) Εάν a και b είναι συνεταιρικά στοιχεία του δακτυλίου E τότε $\nu(a) = \nu(b)$.

Πρόβλημα 2. Έστω ω μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 = -6$. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\omega]$ δεν είναι Ευκλείδεια περιοχή.

Πρόβλημα 3. Έστω $\mathbb{Z}[i]$ ο δακτύλιος των ακεραίων του Gauss με στάθμη ν .

α) Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{Z}[i]$.

β) Δείξτε ότι αν $\nu(a)$ είναι πρώτος αριθμός τότε το a είναι ανάγωγο στοιχείο του $\mathbb{Z}[i]$.

Ισχύει το αντίστροφο;

Πρόβλημα 4. Έστω $\mathbb{Z}[i]$ ο δακτύλιος των ακεραίων του Gauss.

α) Βρείτε ένα μέγιστο κοινό διαιρέτη των $3 + 4i$ και $18 - i$.

β) Γράψτε το ιδεώδες $\langle 11 + 7i, 18 - i \rangle$ ως κύριο ιδεώδες του $\mathbb{Z}[i]$.

Πρόβλημα 5. Δείξτε ότι κάθε σώμα είναι Ευκλείδεια περιοχή.