Τελική εξέταση στο μάθημα Ανάλυση Ι 13/01/2013 Ομάδα Α

ΘΕΜΑ 1 :Δίνεται μη κενό άνω φραγμένο $A \subseteq R$.Ορίζουμε $2A = \{2x : x \in A\}$
Δείξτε ότι το $2A$ είναι άνω φραγμένο και $\sup(2A) = 2\sup A$.

ΘΕΜΑ 2 :Δίνεται $a \in R$ και ακολουθία πραγματικών αριθμών x_n ώστε για τις υπακολουθίες x_{2n}, x_{2n+1} να ισχύει $x_{2n} \to a$ και $x_{2n+1} \to a$.Δείξτε ότι η x_n συγλίνει και μάλιστα $x_n \to a$.

ΘΕΜΑ 3 :Εξετάστε ως προς την απλή και την απόλυτη σύγκλιση τις σειρές
i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ και ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p+1}$ για τις διάφορες τιμές του $p > 0$.

ΘΕΜΑ 4 :Δίνεται $f : [a,b] \to R$ συνεχής με την ιδιότητα : για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει $y \in [a,b]$ ώστε $| f(y) | \le \frac{| f(x) |}{3}$.Δείξτε ότι υπάρχει $\ell \in [a,b]$ ώστε $f(\ell)=0$.

ΘΕΜΑ 5 : Δίνεται $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$ συνεχής .Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ώστε $f(\xi) = \sin\xi$.

ΘΕΜΑ 6 :Δίνεται $f : R \to R$ παραγωγίσιμη ώστε $f'(x) \ge 3$ για κάθε $x > 0$.Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

ΘΕΜΑ 7 :Δίνεται $f : [a,b] \to R$ συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι άνω φραγμένη .

ΘΕΜΑ 8 :Δίνεται $f : [0,+\infty) \to R$ συνεχής ώστε να υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη..

Διάρκεια της εξέτασης 2 ώρες.Το κάθε θέμα βαθμολογείται με 1.5 μον. Το άριστα είναι το 10.Καλή επιτυχία.