Σημειώσεις για το μάθημα

Εισαγωγή στην Ανάλυση ΙΙ

Μ.Παπαδημητράκης
Μαθηματικό Τμήμα
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Ηράκλειο, Κρήτη

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Τοπολογία του $\mathbb{R}$

1.1 Γενικά

Ίσως η πιο σημαντική έννοια η οποία εξετάζεται στο μάθημα του Απειροστικού Λογισμού είναι η έννοια του *ορίου* - είτε ως όριο ακολουθίας είτε ως όριο συνάρτησης.

Στο κεφάλαιο αυτό πρόκειται να μελετήσουμε ορισμένες ακόμη έννοιες σχετικές με το σύνολο των πραγματικών αριθμών, οι οποίες είναι συνδεδεμένες με την έννοια του ορίου.

Ας θυμηθούμε μερικά σημαντικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.
$\emptyset$ το κενό σύνολο.
$\mathbb{Q}$ το σύνολο όλων των ρητών αριθμών.
$\mathbb{Z}$ το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών.
$\mathbb{N}$ το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων (δηλ. των φυσικών) αριθμών.
Ανοικτά διαστήματα: αυτά είναι σύνολα της μορφής
$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$,
$(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$ $(a\in\mathbb{R})$,
$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$ $(b\in\mathbb{R})$,
$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.
Κλειστά διαστήματα: δηλαδή σύνολα της μορφής
$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\leq b\}$ $(a,b\in\mathbb{R},a\leq b)$,
$[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\}$ $(a\in\mathbb{R})$,
$(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq b\}$ $(b\in\mathbb{R})$,
$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.
Ημι-ανοικτά (ή ημι-κλειστά) διαστήματα:
$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x<b\}$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$,
$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leq b\}$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$.

Παρατηρήστε ότι τις ημιευθείες $(a, +\infty), [a, +\infty), (-\infty, b), (-\infty, b]$ καθώς και την ευθεία $(-\infty, +\infty)$ τις αποκαλούμε διαστήματα. Η ευθεία $(-\infty, +\infty)$ αποκαλείται και ανοικτό και κλειστό διάστημα· το γιατί θα το δούμε λίγο παρακάτω. Μιλάμε για *φραγμένο* διάστημα στην περίπτωση κατά την οποία και τα δύο άκρα είναι πραγματικοί αριθμοί. Στην αντίθετη περίπτωση μιλάμε για *απέραντο* ή *μη-φραγμένο* διάστημα.

Ας θυμηθούμε ότι η απόσταση ανάμεσα σε δύο αριθμούς a, b εκφράζεται από τον αριθμό $|a - b|$.

Ορισμός 1 Αν $a \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, ονομάζουμε *ε-περιοχή του a ή περιοχή κέντρου a και ακτίνας ε* και συμβολίζουμε $N_a(\varepsilon)$ το σύνολο όλων των αριθμών οι οποίοι απέχουν από το a απόσταση μικρότερη από το ε. Δηλαδή

$$N_a(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Προφανώς , αν $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, τότε $N_a(\varepsilon_1) \subset N_a(\varepsilon_2)$ (Άσκηση 1). Όταν λέμε *περιοχή N_a του a* εννοούμε κάποια ε-περιοχή του a για κάποιο αδιευκρίνιστο $\varepsilon > 0$.

Στον Απειροστικό Λογισμό λέμε ότι η *ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x*, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε $|x_n - x| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Άλλη διατύπωση αυτού του ορισμού είναι: η $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε $x_n \in N_x(\varepsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$.

Ή αλλιώς : η $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x, αν για κάθε περιοχή N_x του x υπάρχει αντίστοιχος δείκτης n_0 ώστε όλοι οι όροι της $\{x_n\}$ με δείκτη $n \geq n_0$ ανήκουν στην περιοχή αυτή.

Ακόμη, έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Στον Απειροστικό Λογισμό το x_0 λέγεται *σημείο συσσώρευσης* (*ή οριακό σημείο*) *του A*, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχο $x = x(\varepsilon) \in A$ ώστε $|x - x_0| < \varepsilon$ και $x \neq x_0$.

Άλλη διατύπωση: το x_0 λέγεται σημείο συσσώρευσης του A αν κάθε περιοχή N_{x_0} του x_0 περιέχει στοιχείο του A, διαφορετικό από το x_0: $N_{x_0} \cap (A - \{x_0\}) \neq \emptyset$ (Ασκήσεις 3 και 15).

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι οι ορισμοί βασικών εννοιών του Απειρ. Λογισμού διατυπώνονται και με την «γλώσσα» των περιοχών.

Ορισμός 2 Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ λέγεται *ανοικτό*, αν για κάθε σημείο x του A υπάρχει κάποια περιοχή N_x του x η οποία περιέχεται στο A. Δηλαδή, αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ ώστε $N_x(\varepsilon) \subset A$.

Παραδείγματα

1. Έστω A οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα. Αν x είναι οποιοδήποτε σημείο του A, παίρνουμε ε ίσο με την απόσταση του x από το κοντινότερο προς το x άκρο του A. (Αν $A = (-\infty, +\infty)$, τότε παίρνουμε οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$). Τότε, προφανώς, $N_x(\varepsilon) \subset A$. (Κάθε μικρότερη περιοχή του x, δηλαδή με μικρότερο ε, περιέχεται και αυτή στο A).

Άρα κάθε ανοικτό διάστημα είναι ανοικτό σύνολο.

2. Έστω ότι το A είναι οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $[a, b]$. Δεν υπάρχει καμιά περιοχή του a η οποία περιέχεται στο A. Το ίδιο ισχύει και για το b. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του A του οποίου καμιά περιοχή δεν περιέχεται στο A. Άρα το A δεν είναι ανοικτό σύνολο.

Το ίδιο ισχύει και για τα διαστήματα της μορφής $[a, +\infty), (-\infty, b], [a, b)$, $(a, b]$.

Λέμε ότι μια *ακολουθία* $\{x_n\}$ *περιέχεται στο* A *ή ακολουθία* $\{x_n\}$ *στο* A *ή ακολουθία* $\{x_n\}$ *από το* A, αν όλοι οι όροι της είναι στοιχεία του A.

Ορισμός 3 Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ θα το λέμε *κλειστό*, αν έχει την εξής ιδιότητα: κάθε x το οποίο είναι όριο ακολουθίας από το A ανήκει στο A.

Παραδείγματα

1. Έστω A οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $[a, b]$ και οποιοδήποτε x το οποίο είναι όριο ακολουθίας $\{x_n\}$ από το $[a, b]$. Δηλαδή $a \leq x_n \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \longrightarrow x$.

Είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό ότι τότε $a \leq x \leq b$, δηλ. $x \in [a, b]$.

Άρα το A είναι κλειστό σύνολο.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι κάθε κλειστό διάστημα $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$ είναι κλειστό σύνολο.

2. Έστω οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα $A = (a, b)$. Υπάρχει ένα τουλάχιστον x, συγκεκριμένα το $x = a$ ή το $x = b$, το οποίο είναι όριο ακολουθίας στο (a, b), συγκεκριμένα της $x_n = a + (b - a)/2n$ ή της $x_n = b - (b - a)/2n$ αντιστοίχως, αλλά δεν ανήκει στο (a, b). Άρα το (a, b) δεν είναι κλειστό σύνολο.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι τα $(a, +\infty), (-\infty, b), [a, b)$, $(a, b]$ δεν είναι κλειστά σύνολα.

Παρατηρήσεις

1. Το $(-\infty, +\infty)$ είναι και ανοικτό σύνολο και κλειστό σύνολο. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο ονομάζεται και ανοικτό διάστημα και κλειστό διάστημα. Δεν υπάρχει, όμως, κανένα άλλο διάστημα το οποίο είναι και ανοικτό και κλειστό σύνολο ταυτοχρόνως. (Άσκ. 27).

2. Δεν πρέπει να μείνει η εντύπωση ότι κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ οφείλει να είναι είτε ανοικτό σύνολο είτε κλειστό σύνολο. Το $[a, b)$ δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό σύνολο!

Το επόμενο θεώρημα μας λέει ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στις έννοιες του ανοικτού συνόλου και του κλειστού συνόλου.

Θεώρημα 1 *Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ είναι ανοικτό αν και μόνον αν το συμπλήρωμά του είναι κλειστό σύνολο.*

Απόδειξη

Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έστω οποιοδήποτε x το οποίο είναι όριο ακολουθίας $\{x_n\}$ από το A^c. Θα δείξουμε ότι $x \in A^c$. Ας υποθέσουμε, για να φτάσουμε σε άτοπο, ότι $x \in A$. Τότε, αφού το A είναι ανοικτό, υπάρχει περιοχή N_x η οποία περιέχεται στο A. Δηλαδή η N_x δεν περιέχει κανένα στοιχείο του A^c. Όμως αυτό βρίσκεται σε αντίφαση με το ότι $x_n \to x$, αφού το τελευταίο συνεπάγεται ότι όλοι οι όροι της $\{x_n\}$ -δηλαδή στοιχεία του A^c- από έναν δείκτη και πέρα βρίσκονται στην N_x. Άρα $x \in A^c$.

Συμπεραίνουμε ότι το A^c είναι κλειστό.

Έστω, τώρα, ότι το A^c είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έστω $x \in A$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει περιοχή N_x η οποία περιέχεται στο A. Για να φτάσουμε σε άτοπο, υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ η $N_x(\varepsilon)$ δεν περιέχεται στο A. Δηλαδή ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει σημείο του A^c μέσα στην $N_x(\varepsilon)$. Το εφαρμόζουμε διαδοχικά για $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει σημείο x_nτου A^c στην $N_x(\frac{1}{n})$. Δηλαδή $|x - x_n| < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, επομένως, $x_n \to x$. Άρα η $\{x_n\}$ περιέχεται στο A^c, $x_n \to x$ και το A^c είναι κλειστό σύνολο. Άρα $x \in A^c$ και φτάσαμε σε άτοπο. Ο.Ε.Δ.

Άρα τα ανοικτά σύνολα είναι τα συμπληρώματα των κλειστών συνόλων και αντιστρόφως. Ως άμεση εφαρμογή έχουμε ότι το $\emptyset$ είναι και ανοικτό και κλειστό σύνολο αφού το συμπλήρωμά του, το $\mathbb{R}$, είναι και ανοικτό και κλειστό σύνολο.

Το επόμενο θεώρημα παρουσιάζει τρόπους κατασκευής κλειστών ή ανοικτών συνόλων από ήδη γνωστά κλειστά ή ανοικτά σύνολα.

Θεώρημα 2 *(α) Έστω οποιοδήποτε σύνολο δεικτών $\Lambda \neq \emptyset$, ανοικτά σύνολα A_λ για κάθε $\lambda \in \Lambda$ και M η ένωσή τους. Το M είναι ανοικτό.*

(β) Έστω πεπερασμένου πλήθους ανοικτά σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_N$ και M η τομή τους. Το M είναι ανοικτό.

(γ) Έστω οποιοδήποτε σύνολο δεικτών $\Lambda \neq \emptyset$, κλειστά σύνολα A_λ για κάθε $\lambda \in \Lambda$ και M η τομή τους. Το M είναι κλειστό.

(δ) Έστω πεπερασμένου πλήθους κλειστά σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_N$ και M η ένωσή τους. Το M είναι κλειστό.

Απόδειξη

(α) Έστω $x \in M$. Το x ανήκει σε κάποιο από τα A_λ, έστω στο A_{λ_0}. Αφού το A_{λ_0} είναι ανοικτό, υπάρχει περιοχή N_x η οποία περιέχεται στο A_{λ_0}. Επομένως , αφού $A_{\lambda_0} \subset M$, η N_x περιέχεται στο Μ.

(β) Έστω $x \in M$. Τότε $x \in A_1, x \in A_2, \ldots, x \in A_N$. Αφού κάθε A_j είναι ανοικτό υπάρχουν περιοχές $N_x(\varepsilon_1) \subset A_1, \ldots, N_x(\varepsilon_N) \subset A_N$.

Διαλέγουμε $\varepsilon \leq \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$, δηλαδή ε μικρότερο ή ίσο από όλα τα $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$. Τότε $N_x(\varepsilon) \subset N_x(\varepsilon_1) \subset A_1, \ldots, N_x(\varepsilon) \subset N_x(\varepsilon_N) \subset A_N$. Άρα $N_x(\varepsilon) \subset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N = M$.

(γ) Έστω οποιοδήποτε x το οποίο είναι όριο ακολουθίας $\{x_n\}$ από το M. Επειδή $M \subset A_\lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$, η $\{x_n\}$ περιέχεται σε καθένα από τα A_λ. Άρα, επειδή κάθε A_λ είναι κλειστό, το x ανήκει σε καθένα από τα A_λ. Άρα $x \in M$.

(δ) Έστω οποιοδήποτε x το οποίο είναι όριο ακολουθίας $\{x_n\}$ από το M. Αν καθένα από τα $A_1, \ldots, A_N$ περιέχει μονάχα πεπερασμένου πλήθους όρους της $\{x_n\}$, τότε το M θα περιέχει μονάχα πεπερασμένου πλήθους όρους της $\{x_n\}$. Όμως το M περιέχει όλη την ακολουθία. Άρα κάποιο από τα $A_1, \ldots, A_N$, έστω το A_j, περιέχει άπειρους όρους της $\{x_n\}$, δηλαδή ολόκληρη υπο-ακολουθία $\{x_{k_n}\}$ της $\{x_n\}$. Αφού $x_n \to x$, θα ισχύει ότι $x_{k_n} \to x$. Αφού το A_j είναι κλειστό, συνεπάγεται ότι $x \in A_j$. Άρα $x \in A$. Ο.Ε.Δ.

(Ασκήσεις 13, 14)

Παρατήρηση

Αν έχουμε άπειρου πλήθους ανοικτά σύνολα, η τομή τους είναι άλλοτε ανοικτό σύνολο και άλλοτε όχι. Π.χ. με $A_n = (0, 1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1)$, δηλαδή ανοικτό σύνολο. Αλλά με $A_n = (-1 - 1/n, 1 + 1/n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = [-1, 1]$, το οποίο δεν είναι ανοικτό. Τα ίδια μπορούμε να πούμε για κλειστά σύνολα και την ένωσή τους. Π.χ. με $A_n = [-1, 1]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = [-1, 1]$, δηλαδή κλειστό σύνολο, ενώ με $A_n = [-1 + 1/n, 1 - 1/n]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 1)$, το οποίο δεν είναι κλειστό σύνολο.

Παραδείγματα

1. Ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών διαστημάτων είναι κλειστό σύνολο.

2. Ένωση ανοικτών διαστημάτων είναι ανοικτό σύνολο.

3. Έστω το σύνολο $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$. Είναι κλειστό; Όχι, διότι υπάρχει το $x = 0$, το οποίο δεν ανήκει στο A και είναι όριο της $x_n = 1/n$ η οποία περιέχεται στο A. Ας προσθέσουμε, λοιπόν, το 0 στο A. Δηλαδή έστω το σύνολο $B = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$. Είναι το B κλειστό; Ένας τρόπος να απαντήσουμε είναι να κοιτάξουμε το B^c : $B^c = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \cup \left(\cup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{(n+1)}, \frac{1}{n})\right)$, το οποίο, ως ένωση ανοικτών διαστημάτων, είναι ανοικτό σύνολο. Άρα το B είναι κλειστό. (Άσκ. 23)

4. Το *σύνολο του Cantor:*

Θεωρούμε το κλειστό διάστημα $I_0 = [0, 1]$.

Παίρνουμε το υποσύνολο του I_0 : $I_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Κρατάμε, δηλαδή, τα δύο ακριανά διαστήματα μήκους, το καθένα, $1/3$ του αρχικού μήκους του I_0. Κάνουμε το ίδιο σε καθένα από τα δύο υποδιαστήματα του I_1 : $I_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$.

Συνεχίζουμε ομοίως για να φτιάξουμε τα $I_3, I_4, \ldots$ με επαγωγικό τρόπο.

Αν, δηλαδή, έχουμε το I_n ως ένωση κλειστών διαστημάτων, το καθένα από αυτά τα διαστήματα θα «γεννήσει» δύο καινούργια: τα δύο ακριανά του με μήκος, το καθένα, το $1/3$ του μήκους του. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι σε κάθε βήμα το πλήθος των διαστημάτων διπλασιάζεται και, επομένως, το I_n αποτελείται από 2^n κλειστά διαστήματα από τα οποία το καθένα έχει μήκος $1/3^n$, αφού σε κάθε βήμα το μήκος υποτριπλασιάζεται. Το κάθε I_n είναι κλειστό σύνολο με μήκος $2^n \cdot 1/3^n = (2/3)^n$.

Ορίζουμε $C = \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Το C ονομάζεται σύνολο του Cantor και, ως τομή κλειστών συνόλων, είναι κλειστό σύνολο.

Μπορείτε να «δείτε» το συμπλήρωμά του;

Μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα του C είναι ότι δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα. Πράγματι, έστω $(a, b) \subset C$. Τότε $(a, b) \subset I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $b - a \leq (2/3)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άτοπο, διότι $(2/3)^n \to 0$, ενώ $b - a > 0$. (Άσκηση 7).

Ορισμός 4 Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και x σημείο του A. Το x λέγεται *εσωτερικό σημείο* του A, αν υπάρχει περιοχή N_x η οποία περιέχεται στο A. Το σύνολο το οποίο έχει ως στοιχεία του όλα τα εσωτερικά σημεία του A (και μόνον αυτά) λέγεται *εσωτερικό του A* και συμβολίζεται A°.

Προφανώς $A^\circ \subset A$. Επίσης, από τους ορισμούς φαίνεται εύκολα ότι ένα σύνολο A είναι ανοικτό αν και μόνον αν κάθε σημείο του είναι εσωτερικό του σημείο. Δηλαδή το A είναι ανοικτό αν και μόνον αν $A^{\circ} = A$.

Πρόταση 1 *Αν $A \subset \mathbb{R}$, τότε το A° είναι το πιο μεγάλο ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχεται στο A.*

Απόδειξη

Θα δείξουμε πρώτα ότι το A° είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $x \in A^{\circ}$. Τότε υπάρχει $N_x \subset A$. Έστω $y \in N_x$. Η N_x, αφού είναι ανοικτό διάστημα, είναι ανοικτό σύνολο. Άρα υπάρχει $N_y \subset N_x \subset A$. Άρα το y είναι εσωτερικό σημείο του A. Επομένως: $y \in N_x \Rightarrow y \in A^{\circ}$. Οπότε $N_x \subset A^{\circ}$. Άρα το A° είναι ανοικτό σύνολο και $A^{\circ} \subset A$.

Κατόπιν, έστω ανοικτό σύνολο $B \subset A$. Θα δείξουμε ότι $B \subset A^{\circ}$ και θα έχουμε τελειώσει. Έστω $y \in B$. Τότε, αφού το B είναι ανοικτό, υπάρχει $N_y \subset B \subset A$. Άρα $y \in A^{\circ}$. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα

1. Αν $A = [a, b]$, τότε $A^{\circ} = (a, b)$.
Αν $A = \{a\}$, τότε $A^{\circ} = \emptyset$.
Αν $A = [a, +\infty)$, τότε $A^{\circ} = (a, +\infty)$.
Αν $A = (a, b]$, τότε $A^{\circ} = (a, b)$.

2. Το σύνολο C του Cantor. Το C δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα. Επομένως δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο: $C^{\circ} = \emptyset$.

3. $\mathbb{Q}^{\circ} = \emptyset = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\circ}$.

Ορισμός 5 Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$. Το x λέγεται *σημείο επαφής* του Α, αν είναι όριο ακολουθίας η οποία περιέχεται στο A. Το σύνολο το οποίο έχει ως στοιχεία όλα τα σημεία επαφής του A (και μόνον αυτά) λέγεται *κλειστή θήκη του A* και γράφεται $\overline{A}$.

Αν $x \in A$, τότε η σταθερή ακολουθία $x_n = x$, περιέχεται στο A και, προφανώς, $x_n \to x$. Άρα $x \in \overline{A}$. Δηλαδή $A \subset \overline{A}$.

Από τους ορισμούς προκύπτει αμέσως ότι ένα σύνολο A είναι κλειστό αν και μόνον αν περιέχει όλα τα σημεία επαφής του. Δηλαδή το A είναι κλειστό αν και μόνον αν $\overline{A} = A$.

Πρόταση 2 *Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$. Το x είναι σημείο επαφής του A αν και μόνον αν κάθε περιοχή N_x του x περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A.*

Απόδειξη

Έστω ότι το x είναι σημείο επαφής του A και έστω οποιαδήποτε περιοχή N_x του x. Τότε υπάρχει $\{x_n\}$ η οποία περιέχεται στο A και $x_n \to x$. Δηλαδή από έναν δείκτη και πέρα όλοι οι όροι της $\{x_n\}$ περιέχονται στην N_x. Άρα η N_x περιέχει στοιχεία του A.

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ η $N_x(\varepsilon)$ περιέχει στοιχεία του A. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρώντας $\varepsilon = 1/n$, βλέπουμε ότι υπάρχει αντίστοιχο $x_n \in A \cap N_x(1/n)$. Τότε, όμως, $x_n \to x$ και η $\{x_n\}$ περιέχεται στο A. Άρα το x είναι σημείο επαφής του A. Ο.Ε.Δ.
(Άσκηση 2)

Πρόταση 3 *Αν $A \subset \mathbb{R}$, τότε το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο το οποίο περιέχει το A.*

Απόδειξη

Κατ' αρχήν θα δείξουμε ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό σύνολο.

Έστω οποιοδήποτε x το οποίο είναι όριο ακολουθίας $\{x_n\}$ από το $\overline{A}$. Θα δείξουμε ότι $x \in \overline{A}$. Έστω, λοιπόν, περιοχή N_x του x. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει όρος x_{n_0} ώστε $x_{n_0} \in N_x$. Η N_x είναι ανοικτό σύνολο , άρα υπάρχει $N_{x_{n_0}} \subset N_x$. Επειδή $x_{n_0} \in \overline{A}$, υπάρχει $y \in A \cap N_{x_{n_0}}$ (Πρόταση 2). Άρα $y \in N_x$. Δηλαδή κάθε N_x περιέχει στοιχείο y του A. Άρα $x \in \overline{A}$ (πάλι: Πρόταση 2).

Ήδη γνωρίζουμε ότι $A \subset \overline{A}$ και μένει να δείξουμε ότι, αν το B είναι κλειστό σύνολο το οποίο περιέχει το A, τότε $\overline{A} \subset B$.

Αν $x \in \overline{A}$, τότε υπάρχει $\{x_n\}$ η οποία περιέχεται στο A και $x_n \to x$. Επομένως η $\{x_n\}$ περιέχεται και στο B και, αφού το B είναι κλειστό, $x \in B$. Άρα $\overline{A} \subset B$. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα

1. Αν $A = [a, b]$, τότε $\overline{A} = [a, b]$.
Αν $A = (a, b)$, τότε $\overline{A} = [a, b]$.
Αν $A = (a, +\infty)$, τότε $\overline{A} = [a, +\infty)$.
Αν $A = (a, b) \cup (b, c)$, τότε $\overline{A} = [a, c]$.

2. $\overline{C} = C$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$.

Ορισμός 6 Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$. Το x λέγεται *συνοριακό σημείο* του A, αν κάθε περιοχή N_x περιέχει και σημείο του A και σημείο του A^c. Το σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα συνοριακά σημεία του A (και μόνον αυτά) λέγεται *σύνορο του A* και γράφεται ∂A.

Παραδείγματα

1. Αν $A = (a, b)$ ή $[a, b]$, τότε $\partial A = \{a, b\}$.
Αν $A = (a, \infty)$, τότε $\partial A = \{a\}$.

2. $\partial C = C$, $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R} = \partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

(Ασκήσεις 4, 5, 8, 9, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 26, 28, 29)

Ας δούμε τώρα τι έχουμε να πούμε για τις έννοιες του ορίου συνάρτησης και της συνέχειας. Από τον Απειρ. Λογισμό γνωρίζουμε ότι η $f : A \mapsto \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $x_0 \in A$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε: $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Άλλη διατύπωση: η f είναι συνεχής στο x_0, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε: $x \in A \cap N_{x_0}(\delta) \Rightarrow f(x) \in N_{f(x_0)}(\varepsilon)$.

Αλλιώς: η f είναι συνεχής στο x_0, αν για κάθε περιοχή $N_{f(x_0)}$του $f(x_0)$ υπάρχει αντίστοιχη περιοχή N_{x_0} του x_0 ώστε η εικόνα της N_{x_0} μέσω της f περιέχεται στην $N_{f(x_0)}$

$$f(N_{x_0} \cap A) \subset N_{f(x_0)}.$$

Ακόμη , έστω $f : A \mapsto \mathbb{R}$, x_0 σημείο συσσώρευσης του A και $l \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε: $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Άλλη διατύπωση: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, αν για κάθε περιοχή N_l του l υπάρχει περιοχή N_{x_0} του x_0 ώστε η εικόνα της N_{x_0}, εκτός ίσως του x_0, μέσω της f περιέχεται στην N_l

$$f\left((N_{x_0} - \{x_0\}) \cap A\right) \subset N_l.$$

(Άσκηση 6)

Το επόμενο θεώρημα συνδέει την έννοια της συνέχειας με τις έννοιες του ανοικτού συνόλου και του κλειστού συνόλου.

Θεώρημα 3 *Έστω $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(β) Για κάθε ανοικτό $A \subset \mathbb{R}$ το $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(γ) Για κάθε κλειστό $A \subset \mathbb{R}$ το $f^{-1}(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

(α)$\Rightarrow$(γ) Έστω ότι το x είναι όριο ακολουθίας $\{x_n\}$ στο $f^{-1}(A)$. Θα δείξουμε ότι $x \in f^{-1}(A)$. Ισχύει ότι $f(x_n) \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, επειδή η f είναι συνεχής στο x, ότι $f(x_n) \longrightarrow f(x)$. Αφού το A είναι κλειστό, $f(x) \in A$. Άρα $x \in f^{-1}(A)$.

(γ)$\Rightarrow$(β) Ισχύει $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$ για κάθε $A \subset \mathbb{R}$. Έστω, λοιπόν, ότι το A είναι ανοικτό. Τότε το A^c είναι κλειστό και, επομένως, το $f^{-1}(A^c)$ είναι κλειστό. Άρα το $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό.

(β)⇒(α) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x.

Έστω οποιαδήποτε $N_{f(x)}$ του $f(x)$. Αφού αυτή είναι ανοικτό σύνολο, το $f^{-1}(N_{f(x)})$ είναι επίσης ανοικτό. Προφανώς $x \in f^{-1}(N_{f(x)})$. Άρα υπάρχει $N_x \subset f^{-1}(N_{f(x)})$ και, επομένως, $f(N_x) \subset N_{f(x)}$. Άρα η f είναι συνεχής στο x. Ο.Ε.Δ.

(Ασκ. 24, 25, 30)

Παραδείγματα:

Έστω $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν $a, b \in \mathbb{R}$:
το $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty))$ είναι ανοικτό,
το $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq b\} = f^{-1}((-\infty, b])$ είναι κλειστό,
το $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq f(x) \leq b\} = f^{-1}([a, b])$ είναι κλειστό,
το $\{x \in \mathbb{R} \mid a < f(x) < b\} = f^{-1}((a, b))$ είναι ανοικτό.

(Άσκ. 10, 11, 12)

1.2* Δομή των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$

Εάν έχουμε μια συλλογή από ξένα ανά δύο ανοικτά διαστήματα, τότε η ένωσή τους είναι ανοικτό σύνολο (Θεώρημα 2(α)). Τώρα θα αποδείξουμε το αντίστροφο και θα έχουμε μιαν ικανοποιητική «εικόνα» των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 4 *Έστω μη κενό ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}$. Τότε το A είναι ένωση ανά δύο ξένων ανοικτών διαστημάτων. Πιο συγκεκριμένα: υπάρχει σύνολο δεικτών $\Lambda \neq \emptyset$ και ανοικτά διαστήματα I_λ $(\lambda \in \Lambda)$ τα οποία είναι ξένα ανά δύο ώστε $A = \cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$. Επίσης, το Λ είναι αριθμήσιμο, δηλαδή είτε πεπερασμένο είτε άπειρο αριθμήσιμο. Τα διαστήματα I_λ $(\lambda \in \Lambda)$ ονομάζονται συνιστώσες του A.*

Απόδειξη

Θεωρούμε τυχόν $x \in A$ και κατ' αρχήν θα αποδείξουμε ότι υπάρχει *μέγιστο διάστημα* το οποίο περιέχει το x και περιέχεται στο A. Επειδή το A είναι ανοικτό, υπάρχει περιοχή $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ του x η οποία περιέχεται στο A. Η ιδέα είναι να «τεντώσουμε» την περιοχή αυτή όσο το δυνατόν περισσότερο χωρίς να «ξεφύγει» από το A. Κάτι τέτοιο γίνεται με αυστηρό τρόπο ως εξής. Θεωρούμε δύο σύνολα

$$K = \{y \in \mathbb{R} \mid [x, y) \subset A\}, \ \Lambda = \{z \in \mathbb{R} \mid (z, x] \subset A\}.$$

Παρατηρούμε ότι τα K, Λ είναι μη κενά διότι $x + \varepsilon \in K$, $x - \varepsilon \in \Lambda$.

Ως προς το K διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
1η περίπτωση: Το K δεν είναι άνω φραγμένο.

Αυτό σημαίνει ότι στο K περιέχονται αριθμοί y απεριόριστα μεγάλοι. Δηλαδή υπάρχουν απεριόριστα μεγάλα y ώστε $[x, y) \subset A$. Αυτό, όμως, συνεπάγεται ότι $[x, +\infty) \subset A$. Δηλαδή το A περιέχει ολόκληρη την ημιευθεία δεξιά του x. Πράγματι, έστω τυχόν $y_1 \in [x, +\infty)$. Υπάρχει y μεγαλύτερο από το y_1 ώστε $[x, y) \subset A$. Τότε, όμως, $y_1 \in [x, y)$ και, επομένως, $y_1 \in A$. Άρα $[x, +\infty) \subset A$.
2η περίπτωση: Το K είναι άνω φραγμένο.

Τότε το K έχει *supremum*, $\beta = \sup(K) < +\infty$. Είναι σχετικά εύκολο να αποδείξουμε ότι, τότε $[x, \beta) \subset A$. Πράγματι έστω τυχόν $y_1 \in [x, \beta)$. Επειδή $\beta = \sup(K)$, υπάρχει $y \in K$ ώστε $y_1 < y$. Επειδή $y \in K$, συνεπάγεται ότι $[x, y) \subset A$. Επειδή, όμως, $y_1 \in [x, y)$, έχουμε ότι $y_1 \in A$. Άρα $[x, \beta) \subset A$.

Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται ότι $\beta \notin A$. Πράγματι, έστω $\beta \in A$. Επειδή το A είναι ανοικτό θα υπάρχει περιοχή $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ του β η οποία περιέχεται στο A. Τότε, όμως, θα είχαμε ότι $[x, \beta + \delta) \subset A$, το οποίο σημαίνει ότι $\beta + \delta \in K$ και το οποίο αντιφάσκει με το ότι $\beta = \sup(K)$. Άρα $\beta \notin A$.

Άρα: $[x, \beta) \subset A$ και $\beta \notin A$. Δηλαδή το $[x, \beta)$ είναι το μέγιστο διάστημα δεξιά του x το οποίο περιέχεται στο A.

Ανακεφαλαιώνουμε: οι δύο περιπτώσεις για το K λένε ότι υπάρχει μέγιστο διάστημα $[x, \beta)$ δεξιά του x το οποίο περιέχεται στο A, όπου είτε $\beta = +\infty$ είτε $\beta \in \mathbb{R}$.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε -χρησιμοποιώντας το σύνολο Λ- ότι υπάρχει μέγιστο διάστημα $(\alpha, x]$ αριστερά του x το οποίο περιέχεται στο A, όπου είτε $\alpha = -\infty$ είτε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Άρα υπάρχει μέγιστο διαστήμα (α, β) το οποίο περιέχει το x και περιέχεται στο A. Το διάστημα αυτό το ονομάζουμε *συνιστώσα του A η οποία περιέχει το x* και το συμβολίζουμε $I(x)$.

Συλλέγουμε όλες τις συνιστώσες $I(x)$ του A καθώς το x διατρέχει το A. Οι συνιστώσες αυτές έχουν τις εξής ιδιότητες.

1. Αν $z \in I(x)$, τότε $I(x) \subset I(z)$.

   Διότι το $I(x)$ είναι ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το z και περιέχεται στο A και το $I(z)$ είναι το *μέγιστο* ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το z και περιέχεται στο A.

2. Αν $z \in I(x)$, τότε $I(x) = I(z)$.

   Από την 1. συνεπάγεται ότι $I(x) \subset I(z)$. Τότε, όμως, επειδή $x \in I(x)$, συνεπάγεται ότι $x \in I(z)$. Άρα, από την 1. συνεπάγεται ότι $I(z) \subset I(x)$.

3. Αν $x \in A$, $y \in A$ και $I(x) \cap I(y) \neq \emptyset$, τότε $I(x) = I(y)$.

   Διότι, έστω ότι $z \in I(x) \cap I(y)$. Τότε, λόγω της 2. $I(x) = I(z) = I(y)$.

Η ιδιότητα 3. σημαίνει ότι: δύο συνιστώσες του A είτε είναι ξένες είτε ταυτίζονται.

Θεωρούμε τώρα την συλλογή όλων των συνιστωσών του A. Όσες ταυτίζονται τις παίρνουμε μια φορά οπότε οι συνιστώσες αυτές είναι ξένες ανα δύο. Η ένωση τους ισούται με το A, αφού κάθε στοιχείο x του A περιέχεται σε κάποια απο τις συνιστώσες του A -συγκεκριμένα στην $I(x)$. Άρα το A είναι η ένωση των συνιστωσών του, οι οποίες είναι ξένα ανα δύο ανοικτά διαστήματα.

Κάθε ανοικτό διάστημα περιέχει τουλάχιστον ένα ρητό αριθμό.

Επιλέγουμε έναν ρητό αριθμό σε κάθε συνιστώσα του A. Επειδή οι συνιστώσες του A είναι ξένες ανα δύο οι ρητοί οι οποίοι αντιστοιχούν σε κάθε συνιστώσα είναι διαφορετικοί ανα δύο. Έχουμε έτσι μιαν αμφίμονοσήμαντη αντιστοιχία από το σύνολο των συνιστωσών του A σε ένα υποσύνολο Λ του $\mathbb{Q}$. Δηλαδή, σε κάθε ρητό $\lambda \in \Lambda$ αντιστοιχεί μια συνιστώσα του A την οποία συμβολίζουμε I_λ και καθώς το λ διατρέχει το Λ, το I_λ διατρέχει ολόκληρο το σύνολο των συνιστωσών του A.

Άρα (α) $A = \cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$, αφού το A είναι η ένωση των συνιστωσών του,
(β) τα διάφορα I_λ είναι ξένα ανα δύο,
(γ) το Λ είναι αριθμήσιμο, αφού είναι υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. Ο.Ε.Δ.

1.3 Ασκήσεις

Εύκολες

1. Αποδείξτε ότι $\cup_{\varepsilon>0} N_a(\varepsilon) = \mathbb{R}$ και $\cap_{\varepsilon>0} N_a(\varepsilon) = \{a\}$.

2. Ποια είναι η διαφορά μεταξύ σημείου επαφής και σημείου συσσώρευσης ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$; Υπάρχει παράδειγμα σημείου επαφής το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσης και παράδειγμα για το αντίστροφο;

3. Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνον αν κάθε περιοχή του x περιέχει άπειρα σημεία του A.

4. Αποδείξτε ότι κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ περιέχει και ρητούς και άρρητους αριθμούς.

5. Αν το $A \subset \mathbb{R}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο, αποδείξτε ότι $\sup A \in \overline{A}$.

6. Έστω $f : A \mapsto \mathbb{R}$, όπου $A \subset \mathbb{R}$. Αν το $x \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε αποδείξτε ότι: f συνεχής στο $x \Leftrightarrow \lim_{y\to x} f(y) = f(x)$. Αν το $x \in A$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x.

7. Αποδείξτε ότι το σύνολο C του *Cantor* περιέχει άπειρα σημεία.

8. **Ορισμός 7** Αν $A \subset \mathbb{R}$ τότε το σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσης του A ονομάζεται *παράγωγο σύνολο του* A και γράφεται A'.

   Για τα ακόλουθα σύνολα A απαντήστε αν είναι ανοικτά ή κλειστά ή τίποτε και βρείτε τα $A^\circ, \overline{A}, \partial A, A'$

   (α′) όλων των ειδών τα διαστήματα,
   (β′) οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$,
   (γ′) $\mathbb{Z}$,
   (δ′) $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
   (ε′) $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$,
   (ϛ′) $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$,
   (ζ′) $\{(-1)^n + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$,
   (η′) $\left\{\frac{(-1)^n}{1+1/n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$,
   (ϑ′) C, το σύνολο του Cantor.

9. Φτιάξτε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με ακριβώς τρία σημεία συσσώρευσης. (Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε την περίπτωση (ε′) της άσκησης 8).

10. Έστω $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι κλειστά σύνολα: $\{x \mid f(x) = a\}, \{x \mid f(x) \geq a\}$, $\{x \mid f(x) = a$ ή b ή $c\}$.

11. Αποδείξτε ότι τα $\{x \mid 2 < x^3 - x < 4\}, \{x \mid \frac{1}{2} sinx < e^x < sinx\}$ είναι ανοικτά σύνολα.

12. Έστω $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $\{x \mid f(x) < g(x)\}$ είναι ανοικτό σύνολο και ότι τα $\{x \mid f(x) \leq g(x)\}, \{x \mid f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστά σύνολα.

13. Έστω A ανοικτό και B κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $A \setminus B$ είναι ανοικτό και το $B \setminus A$ είναι κλειστό.

Μέτριες

14. Έστω οποιοδήποτε σύνολο δεικτών $\Lambda \neq \emptyset$ και A_λ ($\lambda \in \Lambda$), υποσύνολα οποιουδήποτε συνόλου X. Αποδείξτε τους νόμους του de Morgan: $\left(\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$, $\left(\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$.
Με τη βοήθειά τους αποδείξτε τις ισοδυναμίες (α)⇔(γ), (β)⇔(δ) στο Θεώρημα 2.

15. Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $x \in A'$ αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}$ στο A με $x_n \neq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x$.

16. Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

    (α΄) το A είναι κλειστό αν και μόνον αν $A' \subset A$,

    (β΄) το A είναι κλειστό αν και μόνον αν $\partial A \subset A$.

17. Έστω $A, B,\ A_1, A_2, \ldots, A_n,\ A_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

    (α΄) το A' είναι κλειστό,

    (β΄) $A' = (\overline{A})'$ (δηλ. τα A, $\overline{A}$ έχουν τα ίδια σημεία συσσώρευσης),

    (γ΄) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ και $A' \subset B'$,

    (δ΄) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $(A')' \subset A'$. Βρείτε σύνολο A ώστε $(A')' \neq A'$,

    (ε΄) $\overline{A} = A \cup A'$,

    (ϛ΄) $\overline{(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \ldots \cup \overline{A}_n$,

    (ζ΄) $\overline{\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \supset \cup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$. Βρείτε σύνολο δεικτών $\Lambda \neq \emptyset$ και υποσύνολα A_λ ($\lambda \in \Lambda$) του $\mathbb{R}$ ώστε $\overline{\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \neq \cup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$,

    (η΄) $\overline{\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \subset \cap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$. Βρείτε δύο σύνολα A, B ώστε $\overline{(A \cap B)} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

18. Έστω $A, B,\ A_1, A_2, \ldots, A_n,\ A_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

    (α΄) $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$,

    (β΄) $A^{\circ\circ} = A^\circ$,

    (γ΄) $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^\circ = {A_1}^\circ \cap {A_2}^\circ \cap \ldots \cap {A_n}^\circ$,

    (δ΄) $(\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^\circ \subset \cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\circ$. Βρείτε σύνολο δεικτών $\Lambda \neq \emptyset$ και υποσύνολα A_λ ($\lambda \in \Lambda$) του $\mathbb{R}$ ώστε $(\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^\circ \neq \cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\circ$, (ε′) $(\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^\circ \supset \cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^\circ$. Βρείτε δύο σύνολα A, B ώστε $(A\cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$.

19. Έστω $A\subset\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $A^\circ \subset \overline{A}^\circ$, $\overline{A^\circ}\subset\overline{A}$. Βρείτε σύνολο A ώστε $A^\circ \neq \overline{A}^\circ$ και σύνολο A ώστε $\overline{A^\circ}\neq\overline{A}$.

20. Έστω $A\subset\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $(A^c)^\circ = (\overline{A})^c$, $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$.

21. Έστω $A\subset\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $\partial A = \overline{A}\setminus A^\circ = \overline{A}\cap\overline{A^c}$, $\partial A = \partial(A^c)$, $\overline{A} = A\cup\partial A$.

22. (α′) Αν το A είναι ανοικτό ή αν το A είναι κλειστό, αποδείξτε ότι $(\partial A)^\circ = \emptyset$. Βρείτε σύνολο A με $(\partial A)^\circ = \mathbb{R}$.

    (β′) Αν $A, B\subset\mathbb{R}$, $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ και το A είναι κλειστό, αποδείξτε ότι $(A\cup B)^\circ = \emptyset$. Βρείτε σύνολα A, B με $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ και $(A\cup B)^\circ = \mathbb{R}$.

    (γ′) Αν $A, B\subset\mathbb{R}$ και $\overline{A}\cap\overline{B} = \emptyset$, αποδείξτε ότι $\partial(A\cup B) = \partial A\cup\partial B$.

23. Εφαρμόζοντας τον ορισμό αποδείξτε ότι το σύνολο $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ είναι κλειστό.

24. Στο Θεώρημα 3 αποδείξτε κατ′ ευθείαν τις (γ)⇔(α), (β)⇔(γ), (β)⇔(α).

25. Έστω $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

    (α′) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

    (β′) $f^{-1}(A^\circ)\subset\left(f^{-1}(A)\right)^\circ$ για κάθε $A\subset\mathbb{R}$.

    (γ′) $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ για κάθε $A\subset\mathbb{R}$.

Δύσκολες

26. (α′) Έστω A μη κενό $\subset\mathbb{R}$. Ορίζουμε το σύνολο $N_A(\varepsilon) = \{x\in\mathbb{R} \mid$ υπάρχει $y\in A : |y-x|<\varepsilon\}$. Αποδείξτε ότι το $N_A(\varepsilon)$ είναι ανοικτό και περιέχει το A.

    (β′) Αποδείξτε ότι κάθε μη κενό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι τομή αριθμήσιμου πλήθους ανοικτών συνόλων. (Υπόδ: Αν το A είναι κλειστό, τότε αποδείξτε ότι $A = \cap_{n=1}^{\infty} N_A(\frac{1}{n})$).

27. Έστω $A\subset\mathbb{R}$. Αν το A είναι και ανοικτό και κλειστό σύνολο, τότε αποδείξτε ότι είτε $A=\emptyset$ είτε $A=\mathbb{R}$.

28. **Ορισμός 8** Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Το x λέγεται *σημείο συμπύκνωσης του* A, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ η $N_x(\varepsilon)$ περιέχει υπεραριθμήσιμου πλήθους στοιχεία του A.

    (α′) Έστω A αριθμήσιμο. Αποδείξτε ότι το A δεν έχει κανένα σημείο συμπύκνωσης.

    (β′) Έστω A υπεραριθμήσιμο. Τότε, αν P είναι το σύνολο όλων των σημείων συμπύκνωσης του A, αποδείξτε ότι $P' = P$ και ότι το $A \backslash P$ είναι αριθμήσιμο.

29. **Ορισμός 9** Σύνολα P με την ιδιότητα $P' = P$ ονομάζονται *τέλεια*.

    Βρείτε μερικά απλά παραδείγματα τέλειων συνόλων. Είναι το C τέλειο σύνολο; Αν A είναι οποιοδήποτε κλειστό σύνολο, αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιο τέλειο σύνολο P και κάποιο αριθμήσιμο σύνολο Z ώστε $A = P \cup Z$ και $P \cap Z = \emptyset$.

30. Γενίκευση του Θεωρήματος 3 : Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $f : A \mapsto \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

    (α′) Η f είναι συνεχής στο A.

    (β′) Για κάθε ανοικτό $P \subset \mathbb{R}$ υπάρχει κάποιο ανοικτό $Q \subset \mathbb{R}$ ώστε $f^{-1}(P) = Q \cap A$.

    (γ′) Για κάθε κλειστό $P \subset \mathbb{R}$ υπάρχει κάποιο κλειστό $Q \subset \mathbb{R}$ ώστε $f^{-1}(P) = Q \cap A$.

Κεφάλαιο 2

Μετρικοί χώροι

2.1 Γενικά

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι στο σύνολο $\mathbb{R}$ μπορούμε να ορίσουμε ε-περιοχές, ανοικτά σύνολα και κλειστά σύνολα, και όλα αυτά έχουν άμεση σχέση με την έννοια του ορίου. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα δούμε ότι ανάλογες έννοιες μπορούν να ορισθούν και σε άλλα σύνολα, εκτός από το $\mathbb{R}$. Ας θυμηθούμε τον ορισμό της ε-περιοχής σημείου x:

$$N_x(\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{η απόσταση του } y \text{ από το } x \text{ είναι } < \varepsilon\}$$

Η καθοριστική ιδέα είναι ότι, αν δοθούν δύο οποιαδήποτε στοιχεία x, y του $\mathbb{R}$, μπορούμε να μετρήσουμε με κάποιον συγκεκριμένο και προκαθορισμένο τρόπο την απόσταση του ενός από το άλλο:

απόσταση του x από το y $= |x - y|$

Αν σε ένα μη κενό σύνολο X είναι καθορισμένη η «απόσταση» ανάμεσα σε κάθε δύο στοιχεία του και αν η «απόσταση» αυτή έχει μερικές «φυσιολογικές ιδιότητες», τότε μπορούμε να ορίσουμε έννοιες όπως τις: ε-περιοχή, ανοικτό σύνολο, κλειστό σύνολο, όριο ακολουθίας, όριο συνάρτησης κ.λ.π. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, από τη στιγμή που έχουμε ορίσει την έννοια της απόστασης στο $\mathbb{R}$, μπορούμε να ορίσουμε ε-περιοχές και ότι όλες οι υπόλοιπες έννοιες του προηγούμενου κεφαλαίου βασίζονται αποκλειστικά στην έννοια της περιοχής. Δεν ανακατεύτηκαν πουθενά οι υπόλοιπες ιδιότητες του $\mathbb{R}$: ούτε πρόσθεση, ούτε πολλαπλασιασμός, ούτε διάταξη, ούτε αξίωμα συνέχειας. Το ότι το $\mathbb{R}$ μπορεί να διαταχθεί πάνω σε μιαν απέραντη ευθεία μας βοήθησε μόνον ώστε να έχουμε μιαν εποπτική εικόνα των περιοχών (δηλ. ότι είναι διαστήματα της ευθείας). Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε ότι π.χ. και το επίπεδο και ο τρισδιάστατος χώρος εφοδιάζονται με μιαν «απόσταση» και ότι και σε αυτά τα δύο σύνολα χτίζεται το οικοδόμημα του πρώτου κεφαλαίου.

Εστω X ένα μη κενό σύνολο.

Ορισμός 1 Ονομάζουμε *μετρική στο* X *ή απόσταση στο* X κάθε συνάρτηση ρ ορισμένη στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times X$ και με πραγματικές τιμές
$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$
με τις παρακάτω ιδιότητες:
1. $\rho(x, y) \geq 0, \ x, y \in X$,
2. $\rho(x, y) = 0$ αν και μόνον αν $x = y$,
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x), \ x, y \in X$ (*συμμετρία*),
4. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \ x, y, z \in X$ (*τριγωνική ιδιότητα*).

Λέμε ότι το ζευγάρι (X, ρ) αποτελεί ένα *μετρικό χώρο*. Επίσης, την τιμή $\rho(x, y)$ στο ζευγάρι (x, y) την ονομάζουμε *απόσταση μεταξύ των* x, y.

Παράδειγμα

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $\rho(x, y) = |x - y|$ έχει τις παραπάνω ιδιότητες 1 εως 4. Δηλαδή η ρ είναι μετρική στο $\mathbb{R}$ και συμφωνεί με την συνηθισμένη «απόσταση» πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Άρα το $(\mathbb{R}, \rho)$ είναι μετρικός χώρος.

Παρατήρηση

Μετρικός χώρος είναι δύο πράγματα μαζί : ένα μη κενό σύνολο X και μια μετρική ρ. Τυπικά, δηλαδή, δεν μπορούμε να μιλάμε για «μετρικό χώρο X» παρά μόνον όταν έχουμε ήδη καθορίσει και εννοούμε μια συγκεκριμένη μετρική ρ. Επίσης, αντί να λέμε «ο μετρικός χώρος (X, ρ)» μπορούμε να λέμε «ο χώρος X εφοδιασμένος με τη μετρική ρ» ή «ο χώρος X με τη μετρική ρ».

Παράδειγμα

Έστω οποιοδήποτε μη κενό σύνολο X και η συνάρτηση $\rho : \ X \times X \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y \\ 1, & \text{αν } x \neq y \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς (Ασκ.1) ότι η ρ έχει τις τέσσερις ιδιότητες μιας μετρικής. Η ρ ονομάζεται *διακριτή μετρική* και είναι αξιοπρόσεκτο ότι ορίζεται για *οποιοδήποτε* μη κενό σύνολο X.

Επίσης βλέπουμε ότι, πράγματι, δεν μπορούμε να μιλάμε για «μετρικό χώρο X» χωρίς να καθορίσουμε μια μετρική ρ, αφού, για παράδειγμα, το $\mathbb{R}$ μπορεί να εφοδιαστεί με τουλάχιστον δύο διαφορετικές μετρικές: την «συνηθισμένη» $\rho(x, y) = |x - y|$ και την διακριτή. (Ασκ. 2)

Πριν δώσουμε άλλα παραδείγματα μετρικών χώρων θα επεκτείνουμε σε κάθε μετρικό χώρο (X, ρ) τις έννοιες τις οποίες γνωρίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Έστω, λοιπόν, ο μετρικός χώρος (X, ρ).

Ορισμός 2 Αν $a \in X$ και $\varepsilon > 0$, ονομάζουμε *ε-περιοχή του a ή περιοχή κέντρου a και ακτίνας ε* το σύνολο

$$N_a(\varepsilon) = \{x \in X \mid \rho(x, a) < \varepsilon\}$$

Η επόμενη πρόταση λέει κάτι, το οποίο στην περίπτωση του $\mathbb{R}$ είναι προφανές.

Παρατήρηση

Όταν αναφέρουμε το $\mathbb{R}$, θα εννοούμε ότι είναι εφοδιασμένο με την συνηθισμένη μετρική. Μόνον όταν εννοούμε άλλη μετρική στο $\mathbb{R}$ -για παράδειγμα την διακριτή μετρική- θα την αναφέρουμε ρητά.

Πρόταση 1 *Αν $x, y \in X$ και $x \neq y$, τότε υπάρχουν περιοχές N_x, N_y οι οποίες είναι ξένες.*

Απόδειξη

Αφού $x \neq y$, $\rho(x, y) > 0$. Θεωρούμε $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(x, y)$. Θα δείξουμε ότι $N_x(\varepsilon) \cap N_y(\varepsilon) = \emptyset$. Έστω $z \in N_x(\varepsilon) \cap N_y(\varepsilon)$. Τότε $2\varepsilon = \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) = \rho(z, x) + \rho(z, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Άτοπο!
(Παρατηρήστε ότι σ'αυτήν την απόδειξη χρησιμοποιήθηκαν *όλες* οι ιδιότητες της μετρικής). Ο.Ε.Δ.

Ορισμός 3 Έστω ακολουθία $\{x_n\}$ η οποία περιέχεται στο μετρικό χώρο (X, ρ). Λέμε ότι *η $\{x_n\}$ συγκλίνει στο $x \in X$ ή ότι το x είναι όριο της* $\{x_n\}$, και γράφουμε $x_n \to x$ ή $\lim x_n = x$, αν για κάθε περιοχή N_x του x υπάρχει αντίστοιχος δείκτης $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε όλοι οι όροι της $\{x_n\}$ με δείκτη $n \geq n_0$ περιέχονται στη N_x.
(Ασκ. 8, 9)

Πρόταση 2 *Καμιά ακολουθία δεν μπορεί να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια.*

Απόδειξη

Έστω $\{x_n\}$ στον (X, ρ) και $x_n \to x$, $x_n \to y$, $x \neq y$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1 υπάρχουν περιοχές N_x, N_y οι οποίες είναι ξένες. Υπάρχει δείκτης n_1 ώστε : $n \geq n_1 \Rightarrow x_n \in N_x$ και δείκτης n_2 ώστε : $n \geq n_2 \Rightarrow x_n \in N_y$.

Άρα, αν $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$, τότε $x_n \in N_x \cap N_y$. Άτοπο! Ο.Ε.Δ.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το όριο μιας ακολουθίας είναι μονοσήμαντα ορισμένο από την ακολουθία. Επομένως μπορούμε να λέμε «x είναι το όριο της $\{x_n\}$» όταν $x_n \to x$.

Πρόταση 3 *Έστω ακολουθία $\{x_n\}$ η οποία περιέχεται στον (X, ρ). Τότε: $x_n \to x$ αν και μόνον αν $\rho(x_n, x) \to 0$.*

Παρατήρηση
Η $\{\rho(x_n, x)\}$ είναι ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Όταν, λοιπόν, γράφουμε $\rho(x_n, x) \to 0$ εννοούμε ότι η $\{\rho(x_n, x)\}$ συγκλίνει στο 0 σύμφωνα με το Κεφάλαιο 1.

Απόδειξη
Κάθε γραμμή είναι ισοδύναμη με την προηγούμενή της:
$x_n \to x$
για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in N_x(\varepsilon)$
για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: $n \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x) < \varepsilon$
$\rho(x_n, x) \to 0$ Ο.Ε.Δ.

Ακριβώς όπως κάναμε στην περίπτωση του $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη απόσταση και αφού ορίσαμε τις έννοιες της περιοχής και του ορίου ακολουθίας σε κάθε μετρικό χώρο, μπορούμε να ορίσουμε τις έννοιες του *σημείου επαφής*, της *κλειστής θήκης*, του *σημείου συσσώρευσης*, του *εσωτερικού σημείου*, του *συνοριακού σημείου*, του *συνόρου*, του *ανοικτού συνόλου* και του *κλειστού συνόλου* σε κάθε μετρικό χώρο (X, ρ). Επίσης μπορούμε, αν αντικαταστήσουμε το $\mathbb{R}$ με τον οποιονδήποτε μετρικό χώρο (X, ρ), να ξαναδιατυπώσουμε και να επαναλάβουμε αυτολεξεί τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 1,2 και των Προτάσεων 1,2,3 του πρώτου κεφαλαίου.

Ορισμός 4 Έστω δύο μετρικοί χώροι (X, ρ) και (Y, τ) και συνάρτηση $f : A \to Y$, όπου $A \subset X$ και $x_0 \in A$. Λέμε ότι *η f είναι συνεχής στο x_0*, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε: $x \in A,\ \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \tau(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Πρόταση 4 *Έστω μετρικοί χώροι $(X, \rho), (Y, \tau)$, $A \subset X$, $f : A \to Y$, $x_0 \in A$. Η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνον αν : $\{x_n\}$ στο A και $x_n \to x_0$ στο $(X, \rho) \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$ στον (Y, τ)*

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω οποιαδήποτε $\{x_n\}$ η οποία περιέχεται στο A και $x_n \to x_0$ στον μετρικό χώρο (X, ρ). Διαλέγουμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε: $x \in A$, $\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \tau(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Κατόπιν, υπάρχει $n_0 = n_0(\delta)$ ώστε: $n \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_0) < \delta \Rightarrow \tau(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$. Το n_0 εξαρτάται από το δ και το δ εξαρτάται από το ε. Άρα το n_0 εξαρτάται από το ε. Επομένως: $f(x_n) \to f(x_0)$ στον μετρικό χώρο (Y, τ). Δεν κάναμε τίποτε άλλο από το να επαναλάβουμε την γνωστή απόδειξη της ίδιας πρότασης του Απειροστικού Λογισμού αντικαθιστώντας τα $|x - x_0|$, $|x_n - x_0|$, $|f(x) - f(x_0)|$, $|f(x_n) - f(x_0)|$ με τα $\rho(x, x_0)$, $\rho(x_n, x_0)$, $\tau(f(x), f(x_0))$, $\tau(f(x_n), f(x_0))$ αντιστοίχως. Ας κάνει ο αναγνώστης το ίδιο για να αποδείξει το αντίστροφο ! Ο.Ε.Δ.

Ας ξαναδιατυπώσει και ας αποδείξει ο αναγνώστης το Θεώρημα 3 του πρώτου κεφαλαίου για συνάρτηση $f : X \to Y$, όπου (X, ρ), (Y, τ) είναι μετρικοί χώροι. (Ασκ. 10, 11, 14, 15, 16)

Πρόταση 5 *Κάθε ε-περιοχή σε μετρικό χώρο (X, ρ) είναι ανοικτό σύνολο στον (X, ρ). Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του X είναι κλειστό στον (X, ρ).*

Απόδειξη

(α) Έστω $x_0 \in X$ και $N_{x_0}(\varepsilon)$. Έστω $x \in N_{x_0}(\varepsilon)$. Θα αποδείξουμε την ύπαρξη περιοχής $N_x(\delta)$ η οποία περιέχεται στην $N_{x_0}(\varepsilon)$. Αφού $x \in N_{x_0}(\varepsilon)$, $\rho(x_0, x) < \varepsilon$. Παίρνουμε $\delta = \varepsilon - \rho(x_0, x) > 0$. Αν $y \in N_x(\delta)$, τότε $\rho(x, y) < \delta$. Άρα $\rho(y, x_0) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_0) < \delta + \rho(x, x_0) = \varepsilon$. Επομένως: $y \in N_x(\delta) \Rightarrow y \in N_{x_0}(\varepsilon)$. Δηλαδή: $N_x(\delta) \subset N_{x_0}(\varepsilon)$.

(β) Έστω $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$. Αν $x \in A^c$, τότε $\rho(x, x_1) > 0, \ldots, \rho(x, x_n) > 0$. Θεωρούμε $\varepsilon = \min(\rho(x, x_1), \ldots, \rho(x, x_n)) > 0$. Προφανώς, τότε $N_x(\varepsilon) \cap A = \emptyset$, δηλ. $N_x(\varepsilon) \subset A^c$. Άρα το A^c είναι ανοικτό σύνολο, οπότε το A είναι κλειστό. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 6 *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε το X είναι και ανοικτό και κλειστό στον (X, ρ). Το ίδιο ισχύει και για το $\emptyset$.*

Απόδειξη

Για οποιοδήποτε $x \in X$ και για οποιαδήποτε $N_x(\varepsilon)$ έχουμε ότι $N_x(\varepsilon) \subset X$. Άρα το X είναι ανοικτό στον (X, ρ). Αν $\{x_n\}$ στον X και $x_n \to x$ τότε, προφανώς, $x \in X$. Άρα το X είναι κλειστό στον (X, ρ).
Για το $\emptyset$ ισχύει ότι $\emptyset^c = X$. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 7 *Αν $\{x_n\}$ είναι ακολουθία η οποία περιέχεται στον (X, ρ) και, μετά από κάποιον δείκτη, είναι σταθερή και ίση με x, τότε $x_n \to x$.*

Απόδειξη

Έστω ότι $n_0 \in \mathbb{N}$ και $x_n = x$ για $n \geq n_0$. Τότε για κάθε N_x υπάρχει το συγκεκριμένο n_0 ώστε : $n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x \in N_x$. Άρα $x_n \to x$. Ο.Ε.Δ.

Στο υπόλοιπο μέρος του κεφαλαίου θα εξετάσουμε μερικά παραδείγματα μετρικών χώρων.

Παράδειγμα 1

$X = \mathbb{R}$, ρ η συνηθισμένη μετρική: $\rho(x, y) = |x - y|$. Το παράδειγμα αυτό εξετάσθηκε εκτενώς στο πρώτο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 2

X οποιοδήποτε μη κενό σύνολο, ρ η διακριτή μετρική. Τότε:

$$N_x(\varepsilon) = \begin{cases} \{x\}, & \text{αν } 0 < \varepsilon \leq 1 \\ X, & \text{αν } 1 < \varepsilon \end{cases}$$

Αν μια ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x, τότε για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in N_x(\frac{1}{2}) = \{x\}$, δηλαδή $x_n = x$. Άρα η $\{x_n\}$ είναι, μετά από κάποιον δείκτη, σταθερή. Το αντίστροφο ισχύει σε κάθε μετρικό χώρο λόγω της Πρότασης 7. Άρα οι συγκλίνουσες ακολουθίες στον (X, ρ) είναι εκείνες (και μόνον) οι οποίες είναι, μετά από κάποιον δείκτη, σταθερές.

Οποιοδήποτε $A \subset X$ είναι ανοικτό στον (X, ρ), αφού, αν $a \in A$, τότε $N_a(\frac{1}{2}) = \{a\} \subset A$.

Επίσης, οποιοδήποτε $A \subset X$ είναι κλειστό στον (X, ρ), αφού, αν το x είναι όριο ακολουθίας $\{x_n\}$ από το A τότε, μετά από κάποιον δείκτη, $x_n = x$, δηλαδή $x \in A$.

Ο χώρος (X, ρ) είναι αρκετά απλοϊκός και, όπως είδαμε, γνωρίζουμε όλα τα ανοικτά και τα κλειστά υποσύνολά του και όλες τις συγκλίνουσες ακολουθίες του. Είναι πηγή παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων.

Παράδειγμα 3

Το σύνολο $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$, το οποίο έχει ως στοιχεία όλες τις διατεταγμένες n-άδες πραγματικών αριθμών:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) \mid x^{(j)} \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Προφανώς: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Ο $\mathbb{R}^2$ έχει ως στοιχεία όλα τα διατεταγμένα ζευγάρια πραγματικών αριθμών. Αυτά, γεωμετρικά, ταυτίζονται με τα σημεία ενός επιπέδου στο οποίο έχουν καθοριστεί δύο ορθογώνιοι άξονες με κοινό σημείο το O και όπου στο ζευγάρι $(x^{(1)}, x^{(2)})$ αντιστοιχεί το σημείο του επιπέδου το οποίο έχει ως προβολή στον οριζόντιο άξονα το $x^{(1)}$ και ως προβολή στον κατακόρυφο άξονα το $x^{(2)}$.

O $\mathbb{R}^3$ περιέχει όλες τις διατεταγμένες τριάδες πραγματικών αριθμών. Αυτές, γεωμετρικά, ταυτίζονται με τα σημεία του χώρου μας στον οποίο έχουν καθοριστεί τρεις ορθογώνιοι μεταξύ τους άξονες με κοινό σημείο το O και όπου στην τριάδα $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ αντιστοιχεί το σημείο του χώρου το οποίο έχει ως προβολή στον ένα άξονα το $x^{(1)}$, στον άλλο άξονα το $x^{(2)}$ και στον τρίτο άξονα το $x^{(3)}$.

Για $n \geq 4$ δεν υπάρχει αντίστοιχη γεωμετρική εποπτεία.

Το σύνολο $\mathbb{R}^n$ εφοδιάζεται με μια μετρική ρ, την ονομαζόμενη *Ευκλείδια μετρική* ή *Ευκλείδια απόσταση*, η οποία ορίζεται ως εξής:
αν $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$, $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)})$ τότε

$$\rho(x, y) = [(x^{(1)} - y^{(1)})^2 + \cdots + (x^{(n)} - y^{(n)})^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Αν $n = 1$, τότε $\rho(x, y) = [(x - y)^2]^{\frac{1}{2}} = |x - y|$ και, επομένως, η ρ συμπίπτει με την συνηθισμένη μετρική του $\mathbb{R}$. Αν $n \geq 2$, πρέπει να δείξουμε ότι η ρ ικανοποιεί τις τέσσερις ιδιότητες μιας μετρικής.

1. $\rho(x, y) \geq 0$ είναι προφανές.

2. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x^{(1)} - y^{(1)})^2 + \cdots + (x^{(n)} - y^{(n)})^2 = 0 \Leftrightarrow x^{(1)} = y^{(1)}, \ldots, x^{(n)} = y^{(n)} \Leftrightarrow x = y$.

3. $\rho(x, y) = [(x^{(1)} - y^{(1)})^2 + \cdots + (x^{(n)} - y^{(n)})^2]^{\frac{1}{2}} = [(y^{(1)} - x^{(1)})^2 + \cdots + (y^{(n)} - x^{(n)})^2]^{\frac{1}{2}} = \rho(y, x)$.

4. Για να αποδείξουμε την ιδιότητα 4, χρησιμοποιούμε την *ανισότητα Cauchy - Schwartz:* $(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$ για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.
   Με την βοήθειά της αποδεικνύεται η ανισότητα
   $[(a_1 + b_1)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2]^{\frac{1}{2}} \leq [a_1^2 + \cdots + a_n^2]^{\frac{1}{2}} + [b_1^2 + \cdots + b_n^2]^{\frac{1}{2}}$,
   αν η τελευταία υψωθεί στο τετράγωνο και γίνουν στοιχειώδεις πράξεις.

Αν, τώρα, θέσουμε $a_j = x^{(j)} - z^{(j)}, b_j = z^{(j)} - y^{(j)}$, τότε παίρνουμε την τριγωνική ανισότητα $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$. (Άσκηση 6)

Στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$, με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο σχήμα, συμπεραίνουμε ότι η $\rho(x, y)$ είναι η γνωστή «ευθύγραμμη» απόσταση στο επίπεδο ανάμεσα στα x, y.

Το ίδιο συμβαίνει σχετικά με το $\mathbb{R}^3$ και τον τρισδιάστατο χώρο.

Άρα η γεωμετρική εικόνα της $N_x(\varepsilon)$ στον $(\mathbb{R}^2, \rho)$ είναι δίσκος κέντρου x και ακτίνας ε (χωρίς τα σημεία της περιφέρειας), ενώ στον $(\mathbb{R}^3, \rho)$ είναι σφαιρική μπάλα κέντρου x και ακτίνας ε (χωρίς τα σημεία της επιφάνειας).

Μετά από την κατανόηση των περιοχών μπορούμε να αντιληφθούμε πώς μοιάζουν τα ανοικτά και τα κλειστά σύνολα στον $(\mathbb{R}^2, \rho)$ και στον $(\mathbb{R}^3, \rho)$ και τι σημαίνει $x_m \to x$.

Πρόταση 8 *Έστω* $x_m = (x_m^{(1)}, \dots, x_m^{(n)})$ $(m \in \mathbb{N})$*, ακολουθία στον* $\mathbb{R}^n$ *και* $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$*. Τότε:* $x_m \to x$ *στον* $(\mathbb{R}^n, \rho)$ *αν και μόνον αν* $x_m^{(j)} \to x^{(j)}$ *στον* $\mathbb{R}$ *για κάθε* $j = 1, 2, \dots, n$.

Απόδειξη

(α) Έστω $x_m \to x$ στον $(\mathbb{R}^n, \rho)$. Λόγω της Πρότασης 3, $\rho(x_m, x) \to 0$. Όμως για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$ ισχύει ότι $|x_m^{(j)} - x^{(j)}| \leq \rho(x_m, x)$. Άρα $x_m^{(j)} \to x^{(j)}$.

(β) Έστω, τώρα, ότι $x_m^{(j)} \to x^{(j)}$ για κάθε $j = 1, \dots, n$. Τότε $(x_m^{(j)} - x^{(j)})^2 \to 0$ για κάθε $j = 1, \dots, n$. Άρα $(x_m^{(1)} - x^{(1)})^2 + \cdots + (x_m^{(n)} - x^{(n)})^2 \to 0$, δηλαδή $\rho(x_m, x) \to 0$. Πάλι λόγω της Πρότασης 3, $x_m \to x$ στον $(\mathbb{R}^n, \rho)$. Ο.Ε.Δ.

Η πρόταση αυτή ανάγει τη σύγκλιση ακολουθιών στον $(\mathbb{R}^n, \rho)$ στη σύγκλιση ακολουθιών πραγματικών αριθμών. (Ασκ.3)

Διαισθητικά μπορούμε να διακρίνουμε πότε ένα σύνολο είναι ανοικτό στον $(\mathbb{R}^n, \rho)$ αν καταφέρουμε να φτιάξουμε μια γεωμετρική εικόνα του στο χαρτί (ή στο μυαλό μας).

Αν ένα σύνολο αποτελείται από όλα τα σημεία τα οποία βρίσκονται στη μια πλευρά μιας επιφάνειας τότε το σύνολο αυτό είναι ανοικτό. Η επιφάνεια είναι το σύνορο του συνόλου αυτού. Αν στο σύνολο αυτό επισυνάψουμε την επιφάνεια, τότε το καινούριο σύνολο είναι κλειστό. Ένας άλλος, πιο αυστηρός, τρόπος να διακρίνουμε ανοικτά σύνολα είναι να τα περιγράφουμε με ανισότητες, δηλαδή με τον παρακάτω τρόπο.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *συνεχής* στον $(\mathbb{R}^n, \rho)$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε το σύνολο $E = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > a\}$ είναι ανοικτό στον $(\mathbb{R}^n, \rho)$, επειδή $E = f^{-1}((a, +\infty))$ και, επομένως, το E είναι αντίστροφη εικόνα ανοικτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}$. Ομοίως, το $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) < a\}$ είναι ανοικτό, ενώ τα $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \geq a\}$ και $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \leq a\}$ είναι κλειστά στον $(\mathbb{R}^n, \rho)$.

Αυτό, βέβαια, προϋποθέτει ότι μπορούμε να αναγνωρίζουμε τις συνεχείς συναρτήσεις $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Οι επόμενες προτάσεις θα μας βοηθήσουν να αποκτήσουμε ένα σημαντικό απόθεμα συνεχών συναρτήσεων.

Πρόταση 9 *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $f, g : X \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $x_0 \in X$. Τότε :*
(α) η $\alpha f + \beta g$ είναι συνεχής στο x_0 $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$,
(β) η fg είναι συνεχής στο x_0,
(γ) η f/g είναι συνεχής στο x_0,αρκεί $g(x_0) \neq 0$.

Απόδειξη

Βάσει της πρότασης 4 (όπου ως (Y, τ) θεωρούμε τον $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική), υποθέτουμε ότι $x_n \to x_0$ στον (X, ρ). Τότε
(α) $(\alpha f + \beta g)(x_n) = \alpha f(x_n) + \beta g(x_n) \to \alpha f(x_0) + \beta g(x_0) = (\alpha f + \beta g)(x_0)$,
(β) $(fg)(x_n) = f(x_n) g(x_n) \to f(x_0) g(x_0) = (fg)(x_0)$,
(γ) $(f/g)(x_n) = f(x_n)/g(x_n) \to f(x_0)/g(x_0) = (f/g)(x_0)$. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 10 *Έστω $(X, \rho), (Y, \sigma), (Z, \tau)$ τρεις μετρικοί χώροι και $f : X \to Y, g : Y \to Z$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ και η g είναι συνεχής στο $y_0 = f(x_0) \in Y$ τότε η $h = gof : X \to Z$ είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη

Έστω $x_n \to x_0$ στον (X, ρ). Τότε: $f(x_n) \to f(x_0)$ στον (Y, σ). Επομένως $h(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) = h(x_0)$ στον (Z, τ). Ο.Ε.Δ.

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο προτάσεις μπορούμε, ξεκινώντας από πολύ απλές συνεχείς συναρτήσεις, να κατασκευάζουμε όλο και πιο πολύπλοκες.

Για παράδειγμα στον $(\mathbb{R}^n, \rho)$ η συνάρτηση *j-προβολή* $(1 \leq j \leq n)$

$$\Pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \text{με τύπο}$$
$$\Pi_j(x) = x^{(j)}, \quad x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$$

είναι συνεχής στον $(\mathbb{R}^n, \rho)$. Διότι, αν $x_m \to x$ στον $(\mathbb{R}^n, \rho)$, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 8: $\Pi_j(x_m) = x_m^{(j)} \to x^{(j)} = \Pi_j(x)$. Άρα, αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = g(x^{(j)}), \; x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$$

είναι συνεχής στον $(\mathbb{R}^n, \rho)$, διότι $f = go\Pi_j$. Άρα, *πολυωνυμικές συναρτήσεις*: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής:

$$f(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = \alpha (x^{(1)})^{\alpha_1} (x^{(2)})^{\alpha_2} \cdots (x^{(n)})^{\alpha_n} + \beta (x^{(1)})^{\beta_1} \cdots (x^{(n)})^{\beta_n} + \cdots$$

όπου οι εκθέτες είναι όλοι μη-αρνητικοί αριθμοί και το άθροισμα είναι πεπερασμένο, είναι συνεχείς στον $(\mathbb{R}^n, \rho)$. Ρητές συναρτήσεις, δηλαδή κλάσματα πολυωνυμικών, είναι επίσης συνεχείς (εκτός από τα σημεία στα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής) όπως και συναρτήσεις οι οποίες είναι απλοί συνδυασμοί εκθετικών, τριγωνομετρικών κ.λ.π συναρτήσεων των συντεταγμένων.
(Ασκ. 4,5,11,12,13,17,18,19).

2.2 Ασκήσεις

Οι ασκήσεις 1, 2, 3, 6, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 25, 26, 28, 29, 30 του πρώτου κεφαλαίου ισχύουν και στην περίπτωση γενικού μετρικού χώρου. Μπορείτε να τις ξαναδιατυπώσετε και να επαναλάβετε την απόδειξή τους.

Εύκολες

1. Αποδείξτε ότι η διακριτή μετρική ικανοποιεί τις τέσσερις ιδιότητες μιας μετρικής.

2. Για κάθε x, y στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε:
$\rho_1(x,y) = (x-y)^2, \rho_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}, \rho_3(x,y) = |x^2 - y^2|, \rho_4(x,y) = |x - 2y|, \rho_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.
Ποιές από τις $\rho_1, \ldots, \rho_5$ είναι μετρικές στο $\mathbb{R}$;
Για $x = (x^{(1)}, x^{(2)}), y = (y^{(1)}, y^{(2)})$ ορίζουμε $\rho(x,y) = [(x^{(1)} - y^{(1)})^2 + 4(x^{(2)} - y^{(2)})^2]^{1/2}$. Είναι η ρ μετρική στο $\mathbb{R}^2$;

3. Στον $(\mathbb{R}^n, \rho)$, όπου ρ είναι η Ευκλείδια μετρική, θεωρούμε τις ακολουθίες $\{x_m\}, \{y_m\}$ και ακολουθία αριθμών $\{\lambda_m\}$. Αν $x_m \to x, y_m \to y, \lambda_m \to \lambda$ αποδείξτε ότι $x_m + y_m \to x + y, x_m \cdot y_m \to x \cdot y, \lambda_m x_m \to \lambda x$ (όπου, αν $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}), y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$, τότε $x + y = (x^{(1)} + y^{(1)}, \ldots, x^{(n)} + y^{(n)}), \lambda x = (\lambda x^{(1)}, \ldots, \lambda x^{(n)}), x \cdot y = x^{(1)} y^{(1)} + \cdots + x^{(n)} y^{(n)}$)

4. Για τα παρακάτω σύνολα A στον $(\mathbb{R}^2, \rho)$, όπου ρ είναι η Ευκλείδια μετρική, απαντήστε αν είναι ανοικτά ή κλειστά ή τίποτε και βρείτε τα $A^0, \overline{A}, \partial A, A'$.

(α′) $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$,
(β′) $\{(x,y) \mid x^2+y^2\leq 1\}$,
(γ′) $\{(x,y) \mid x^2+y^2>1\}$,
(δ′) $\{(x,y) \mid x^2+y^2\geq 1\}$,
(ε′) $\{(x,y) \mid x^2-y^2<1\}$,
(ϛ′) $\{(x,y) \mid x^2-y^2\geq 1\}$,
(ζ′) $\{(x,y) \mid x>0\}$,
(η′) $\{(x,y) \mid x\geq 0\}$,
(ϑ′) $\{(n,0) \mid n\in\mathbb{N}\}$,
(ι′) $\{(\frac{1}{n},0) \mid n\in\mathbb{N}\}$,
(ια′) $\{(\frac{1}{n},\frac{1}{m}) \mid n,m\in\mathbb{N}\}$,
(ιβ′) $\{(x,0) \mid \alpha\leq x\leq\beta\},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$,
(ιγ′) $\{(x,0) \mid \alpha< x<\beta\},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$,
(ιδ′) $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$,
(ιε′) $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\cap[0,1]^2$,
(ιϛ′) $C\times C$ (το σύνολο του Cantor),
(ιζ′) $(\mathbb{Q}\cap[0,1])\times\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\}$,
(ιη′) $\mathbb{Q}\times(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$.

5. Έστω μη κενό σύνολο X και ρ η διακριτή μετρική στο X. Αποδείξτε για κάθε $A\subset X$ ότι: $\overline{A}=A^\circ=A,\ \partial A=\emptyset$.

6. Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz στον $\mathbb{R}^n$.

7. Βρείτε υποσύνολο του $(\mathbb{R}^2,\rho)$ με ακριβώς τρία σημεία συσσώρευσης.

8. Αν $x_n\to x$ σε μετρικό χώρο (X,ρ), αποδείξτε ότι για κάθε υποακολουθία $\{x_{\kappa_n}\}: x_{\kappa_n}\to x$

9. Έστω ότι $x_n\to x, y_n\to y$ σε μετρικό χώρο (X,ρ). Αποδείξτε ότι $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$.
   Υπόδειξη: αποδείξτε πρώτα ότι $|\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)|\leq\rho(x_n,x)+\rho(y_n,y)$

10. Έστω μετρικοί χώροι $(X,\rho),(Y,\sigma)$ και $f:A\to Y, A\subset X, x_0$ σημείο συσσώρευσης του A. Διατυπώστε τον ορισμό του

$$\lim_{A\ni x\to x_0} f(x)=y_0\in Y$$

και αποδείξτε ότι αυτός ο ορισμός ισοδυναμεί με : για κάθε $\{x_n\}$ η οποία περιέχεται στο A, με $x_n \to x$ στον (X, ρ) και $x_n \neq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $f(x_n) \to y_0$ στον (Y, σ).

11. Έστω μετρικός χώρος $(X, \rho), A \subset X$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A. Έστω $g, f : A \to \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \lim_{x \to x_0} g(x) = m$ τότε $\lim_{x \to x_0}(f+g)(x) = l + m, \lim_{x \to x_0}(fg)(x) = lm, \lim_{x \to x_0}(f/g)(x) = l/m$, αρκεί $m \neq 0$.

Μέτριες

12. **Ορισμός 5** Σε μετρικό χώρο (X, ρ) η *κλειστή ε-περιοχή* σημείου $a \in X$ είναι το σύνολο $\overline{N}_a(\varepsilon) = \{x \in X | \rho(x, a) \leq \varepsilon\}$.

    Αποδείξτε ότι:

    (α′) η $\overline{N}_a(\varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο.

    (β′) $\overline{N_a(\varepsilon)} \subset \overline{N}_a(\varepsilon)$

    (γ′) ισχύει πάντοτε $\overline{N}_a(\varepsilon) = \overline{N_a(\varepsilon)}$; (Υπόδειξη: διακριτή μετρική)

    (δ′) στον $(\mathbb{R}^n, \rho)$ ισχύει $\overline{N}_a(\varepsilon) = \overline{N_a(\varepsilon)}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$.

13. **Ορισμός 6** Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ λέγεται *κυρτό* αν για κάθε $x, y \in A$ και κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $0 < t < 1$ ισχύει ότι

$$tx + (1 - t)y \in A \ .$$

    Ποιά είναι η γεωμετρική σημασία (στους $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$) αυτού του ορισμού; Αποδείξτε ότι κάθε ε-περιοχή είναι κυρτό σύνολο και ότι, αν A είναι κυρτό,τότε τα $A^0, \overline{A}$ είναι επίσης κυρτά σύνολα.

14. **Ορισμός 7** Έστω μετρικός χώρος (X, ρ) και $A \subset X$. Το A ονομάζεται *πυκνό στον* (X, ρ) αν $\overline{A} = X$.

    Για παράδειγμα $A = \mathbb{Q}$, $X = \mathbb{R}$.

    Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής στον (X, ρ).Έστω A πυκνό στο (X, ρ). Αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, τότε αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in X$.

15. **Ορισμός 8** Έστω μη κενό υποσύνολο E μετρικού χώρου (X, ρ). Ορίζουμε την *απόσταση σημείου* $x \in X$ *από το* E ως εξής :

$$\rho_E(x) = \inf_{y \in E} \rho(x, y)$$

(α′) Αποδείξτε την ύπαρξη του infimum.

(β′) Αποδείξτε ότι: $\rho_E(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{E}$.

(γ′) Αποδείξτε ότι $|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \leq \rho(x, y), x, y \in X$ και ότι η $\rho_E : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον (X, ρ).

16. Έστω μη κενά κλειστά ξένα υποσύνολα A, B μετρικού χώρου (X, ρ). Ορίζουμε

$$f(x) = \frac{\rho_A(x)}{\rho_A(x) + \rho_B(x)},\ x \in X.$$

Αποδείξτε ότι:

(α′) η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον (X, ρ),

(β′) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B$ και $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$

Ορίζουμε $K = f^{-1}((-\infty, \frac{1}{2}))$, $\Lambda = f^{-1}((\frac{1}{2}, +\infty))$. Αποδείξτε ότι τα K, Λ είναι ανοικτά στον (X, ρ), ξένα και ότι $A \subset K, B \subset \Lambda$.

Δύσκολες

17. **Ορισμός 9** Μετρικός χώρος (X, ρ) λέγεται *διαχωρίσιμος* αν υπάρχει υποσύνολο του A με τις ιδιότητες:

(α′) A έχει αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων , και

(β′) $\overline{A} = X$ (δηλ. το A είναι πυκνό στον (X, ρ)).

Αποδείξτε ότι το (β') είναι ισοδύναμο με το παρακάτω

(γ′) οποιαδήποτε περιοχή N_x οποιουδήποτε σημείου $x \in X$ περιέχει στοιχείο του A.

Είναι ο $\mathbb{R}$ διαχωρίσιμος; Είναι ο $(\mathbb{R}^n, \rho)$, όπου ρ είναι η Ευκλείδια μετρική, διαχωρίσιμος;
(Υπόδειξη: Θεωρείστε το σύνολο A των σημείων των οποίων και οι n συντεταγμένες είναι ρητοί αριθμοί).

18. Έστω μετρικός χώρος (X, ρ) με την εξής ιδιότητα: οποιοδήποτε άπειρο υποσύνολο του X έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης. Αποδείξτε ότι ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος.

19. Έστω υποσύνολο A του $(\mathbb{R}^n, \rho)$, όπου ρ είναι η Ευκλείδια μετρική. Αν το A είναι και ανοικτό και κλειστό, αποδείξτε ότι είτε $A = \emptyset$ είτε $A = \mathbb{R}^n$. Υπάρχει μετρικός χώρος (X, ρ) και υποσύνολό του A με την ιδιότητα: $A \neq \emptyset$, $A \neq X$, A είναι και ανοικτό και κλειστό;
(Υπόδειξη: Σύνολο X με τουλάχιστον δύο στοιχεία εφοδιασμένο με την διακριτή μετρική).

Κεφάλαιο 3

Συμπάγεια

3.1 Γενικά

Μάθαμε ότι σε ένα μετρικό χώρο (και ειδικότερα στον $\mathbb{R}$) ορισμένα υποσύνολα χαρακτηρίζονται «ανοικτά» και ορισμένα «κλειστά». Υπάρχει και μια άλλη σημαντική κατηγορία συνόλων, αυτά τα οποία λέγονται «συμπαγή». Θα δώσουμε τον ορισμό και θα αποδείξουμε μερικές γενικές ιδιότητες. Μετά θα εξετάσουμε την περίπτωση του $(\mathbb{R}^n, \rho)$, όπου ρ είναι η Ευκλείδια μετρική. Τέλος, θα δούμε τη σχέση συμπάγειας και συνέχειας.

Ορισμός 1 Έστω M ένα υποσύνολο μετρικού χώρου (X, ρ). Το M ονομάζεται *συμπαγές*, αν κάθε ακολουθία η οποία περιέχεται στο M έχει τουλάχιστον μια υπο-ακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M.

Παραδείγματα

Στα παραδείγματα αυτά ο μετρικός χώρος είναι ο $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδια μετρική.

1. $M = (0, 1]$. Ας θεωρήσουμε την ακολουθία $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $x_n \to 0$, κάθε υπο-ακολουθία της συγκλίνει στο 0. Άρα η $\{x_n\}$ περιέχεται στο $(0, 1]$ και δεν έχει καμία υπο-ακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $(0, 1]$. Άρα το $(0, 1]$ δεν είναι συμπαγές.

2. $M = [0, 1]$. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία $\{x_n\}$ η οποία περιέχεται στο $[0, 1]$. Η $\{x_n\}$ είναι φραγμένη. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα των Bolzano-Weierstrass από τον Απειροστικό Λογισμό, η $\{x_n\}$ έχει τουλάχιστον μια υπο-ακολουθία η οποία συγκλίνει: $x_{k_n} \to x$. Επειδή το $[0, 1]$ είναι κλειστό και η $\{x_{k_n}\}$ περιέχεται στο $[0, 1]$, συνεπάγεται ότι $x \in [0, 1]$. Επειδή υποθέσαμε ότι η $\{x_n\}$ είναι *τυχούσα* ακολουθία η οποία περιέχεται στο $[0, 1]$, έχουμε αποδείξει ότι το $[0, 1]$ είναι συμπαγές.

3. $M = [0, +\infty)$. Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $x_n \to +\infty$, κάθε υπο-ακολουθία της αποκλίνει στο $+\infty$. Άρα η $\{x_n\}$ περιέχεται στο $[0, +\infty)$ και δεν έχει καμία υπο-ακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $[0, +\infty)$. Άρα το $[0, +\infty)$ δεν είναι συμπαγές.

Εν γένει, το να αποδείξουμε ότι ένα συγκεκριμένο σύνολο M *δεν είνα* συμπαγές είναι απλό πρόβλημα: αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα ακολουθίας η οποία περιέχεται στο M και καμιά υπο-ακολουθία της δεν συγκλίνει σε στοιχείο του M.

Ενώ, το να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο M *είναι* συμπαγές είναι πιο δύσκολο πρόβλημα: πρέπει να θεωρήσουμε την *τυχούσα* ακολουθία η οποία περιέχεται στο M και να αποδείξουμε ότι έχει υπο-ακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M.
(Ασκ. 4, 6, 9, 10, 14, 15, 16)

Ορισμός 2 Έστω M υποσύνολο μετρικού χώρου (X, ρ). Το M λέγεται *φραγμένο* αν υπάρχει $x_0 \in X$ και θετικός αριθμός R ώστε

$$M \subset N_{x_0}(R)$$

Παραδείγματα

Στο $\mathbb{R}$ ένα υποσύνολο M είναι φραγμένο αν και μόνον αν περιέχεται σε κάποιο φραγμένο διάστημα. Γενικά, στον $\mathbb{R}^n$ (όπως πάντα με την Ευκλείδια μετρική) ένα υποσύνολο M είναι φραγμένο αν και μόνον αν περιέχεται σε κάποιο *ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο*. Ορθογώνια παραλληλεπίπεδα είναι σύνολα της μορφής

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] =$$
$$= \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid \ a_j \le x_j \le b_j, \ j = 1, \ldots, n\}.$$

Στον $\mathbb{R}^2$ είναι τα συνηθισμένα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με πλευρές παράλληλες στους δύο άξονες και στον $\mathbb{R}^3$ τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με ακμές παράλληλες στους τρείς άξονες . Το $[a_j, b_j]$ ονομάζεται η j *ακμή* του ορθ. παραλληλεπιπέδου. Αν τα $[a_j, b_j]$ έχουν όλα το ίδιο μήκος, τότε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ονομάζεται *κύβος*. Οι επόμενες δύο προτάσεις είναι αρκετά χρήσιμες.

Πρόταση 1 *Έστω M συμπαγές υποσύνολο μετρικού χώρου (X, ρ). Το M είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη

Έστω x το οποίο είναι όριο ακολουθίας $\{x_n\}$ από το M. Επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχει τουλάχιστον μία υπο-ακολουθία $\{x_{k_n}\}$ η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M : $x_{k_n} \to y$, $y \in M$. Επειδή $x_n \to x$, συνεπάγεται ότι $x_{k_n} \to x$. Άρα $x = y$ και, επομένως, $x \in M$. Άρα το M είναι κλειστό.

Έστω ότι το M δεν είναι φραγμένο. Θεωρούμε τυχόν $x_0 \in X$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$: $M \not\subseteq N_{x_0}(n)$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει αντίστοιχο στοιχείο $x_n \in M$, $x_n \notin N_{x_0}(n)$. Δηλαδή $x_n \in M$, $\rho(x_n, x_0) \geq n$.

Η ακολουθία $\{x_n\}$ περιέχεται στο M και, επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχει κάποια υπο-ακολουθία $\{x_{k_n}\}$ η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M : $x_{k_n} \to x$, $x \in M$. Επομένως: $\rho(x_{k_n}, x_0) \to \rho(x, x_0)$.

Αλλά, από $\rho(x_{k_n}, x_0) \geq k_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται ότι $\rho(x_{k_n}, x_0) \to +\infty$. Καταλήγουμε σε αντίφαση.

Άρα το M είναι φραγμένο. Ο.Ε.Δ.

Ορισμός 3 Έστω A μη-κενό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, ρ). Ονομάζουμε *διάμετρο του* A και συμβολίζουμε $diam(A)$ το:

$$diam(A) = \sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Το σύνολο $\{\rho(x, y) \mid x, y \in A\}$ είναι μη κενό. Διότι το A είναι μη κενό και, αν $x \in A$, τότε το $\rho(x, x) = 0$ είναι στοιχείο του συνόλου αυτού. Επίσης το σύνολο αυτό είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και τα στοιχεία του είναι μη-αρνητικοί αριθμοί.

Αν το σύνολο αυτό είναι άνω-φραγμένο, τότε το *supremum* υπάρχει και είναι ≥ 0, ενώ αν το σύνολο αυτό δεν είναι άνω-φραγμένο, τότε ως *supremum* ορίζεται το $+\infty$. Άρα η διάμετρος του A είναι καλώς ορισμένη και

$$0 \leq diam(A) \leq +\infty.$$

Λήμμα 1 *Έστω A μη-κενό υποσύνολο μετρικού χώρου (X, ρ). Τότε: το A είναι φραγμένο αν και μόνον αν $diam(A) < +\infty$.*

Απόδειξη

Έστω ότι το A είναι φραγμένο. Δηλαδή υπάρχει $x_0 \in X$ και $R > 0$ ώστε: $A \subseteq N_{x_0}(R)$. Για κάθε $x, y \in A$ ισχύει ότι: $\rho(x, y) \leq \rho(x, x_0) + \rho(y, x_0) < R + R = 2R$. Άρα $diam(A) \leq 2R < +\infty$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $diam(A) < +\infty$. Θεωρούμε τυχόν $x_0 \in A$ και το κρατάμε σταθερό. Τότε για κάθε $x \in A$ έχουμε $\rho(x_0, x) \leq diam(A)$.

Αν θέσουμε $R := diam(A) + 1$, τότε για κάθε $x \in A$ ισχύει $\rho(x_0, x) < R$ και επομένως $x \in N_{x_0}(R)$. Άρα $A \subseteq N_{x_0}(R)$. Δηλαδή το A είναι φραγμένο.
Ο.Ε.Δ.
(Ασκ. 12, 13)

Το επόμενο αποτέλεσμα έχει αρκετές εφαρμογές.

Θεώρημα 1 *Έστω «εγκιβωτισμένη» ακολουθία μη-κενών συμπαγών υποσυνόλων* $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots \supseteq K_m \supseteq \ldots$ *ενός μετρικού χώρου* (X, ρ). *Τότε η τομή τους* $\cap_{m=1}^{+\infty} K_m$ *δεν είναι κενή. Δηλαδή υπάρχει στοιχείο το οποίο ανήκει σε όλα τα* K_m. *Αν επιπλέον υποτεθεί ότι* $diam(K_m) \to 0$, *τότε το κοινό στοιχείο είναι μοναδικό.*

Απόδειξη

Θεωρούμε οποιοδήποτε στοιχείο x_m του K_m. Σχηματίζουμε την ακολουθία $\{x_m\}$ η οποία περιέχεται στο K_1. Επειδή το K_1 είναι συμπαγές, υπάρχει υποακολουθία $\{x_{m_k}\}$ η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του K_1: $x_{m_k} \to x$, $x \in K_1$.

Θα αποδείξουμε ότι το x ανήκει σε όλα τα K_m.

Έστω τυχόν $m \in \mathbb{N}$. Από κάποιον δείκτη k_0 και πέρα: $m_k \geq m$. Άρα, αν $k \geq k_0$, τότε $x_{m_k} \in K_{m_k} \subseteq K_m$. Δηλαδή η ακολουθία $x_{m_{k_0}}, x_{m_{k_0+1}}, \ldots$ περιέχεται στο K_m. Επειδή το K_m είναι κλειστό, το όριο της ακολουθίας αυτής, δηλαδή το x, ανήκει στο K_m.

Έστω τώρα ότι $diam(K_m) \to 0$. Αν x, y ανήκουν και τα δύο σε όλα τα K_m, τότε $\rho(x, y) \leq diam(K_m)$. Άρα $\rho(x, y) = 0$ και, επομένως, $x = y$. Ο.Ε.Δ.

Θεώρημα 2 (Bolzano - Weierstrass) *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον* $\mathbb{R}^n$ *(με την Ευκλείδια μετρική) έχει συγκλίνουσα υπο-ακολουθία.*

Απόδειξη

Έστω $x_m = (x_m^{(1)}, \ldots, x_m^{(n)})$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$. Αν η $\{x_m\}$ είναι φραγμένη, τότε η $\{x_m^{(1)}\}$ είναι φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}$. Άρα έχει συγκλίνουσα υπο-ακολουθία $\{{x_{m_k}}^{(1)}\}$:

$$ {x_{m_k}}^{(1)} \to x_0^{(1)}. $$

Η υπο-ακολουθία $\{x_{m_k}\}$ της $\{x_m\}$ έχει, επομένως, συγκλίνουσες πρώτες συντεταγμένες. Η $\{{x_{m_k}}^{(2)}\}$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$, άρα έχει συγκλίνουσα υπο-ακολουθία $\{{x_{m_{k_\lambda}}}^{(2)}\}$:

$$ {x_{m_{k_\lambda}}}^{(2)} \to x_0^{(2)}. $$

Άρα, η υπο-ακολουθία $\{x_{m_{k_\lambda}}\}$ έχει συγκλίνουσες πρώτες και δεύτερες συντεταγμένες. Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο μέχρι τις n-οστές συντεταγμένες και παίρνοντας n διαδοχικές υπο-ακολουθίες της $\{x_m\}$ βρίσκουμε υποακολουθία της η οποία έχει όλες τις συντεταγμένες της συγκλίνουσες. Άρα (Πρόταση 8, Κεφ 2) η $\{x_m\}$ έχει συγκλίνουσα υπο-ακολουθία. Ο.Ε.Δ.

Θεώρημα 3 *Έστω υποσύνολο* M *του* $\mathbb{R}^n$ *(με την Ευκλείδια μετρική). Το* M *είναι συμπαγές αν και μόνον αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη

Η Πρόταση 1 αποδεικνύει την μία κατεύθυνση.

Έστω ότι το M είναι κλειστό και φραγμένο. Θεωρούμε τυχούσα $\{x_n\}$ η οποία περιέχεται στο M. Επειδή το M είναι φραγμένο, η $\{x_n\}$ είναι φραγμένη και, σύμφωνα με το Θεώρημα 2, έχει υπο-ακολουθία $\{x_{k_n}\}$ η οποία συγκλίνει: $x_{k_n} \to x$. Επειδή το M είναι κλειστό και η $\{x_{k_n}\}$ περιέχεται στο M, συνεπάγεται ότι $x \in M$. Άρα η τυχούσα ακολουθία $\{x_n\}$ η οποία περιέχεται στο M έχει υπο-ακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M. Επομένως το M είναι συμπαγές. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα

1. Οποιαδήποτε κλειστή μπάλα $\overline{N_{x_0}}(R)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, οποιοδήποτε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

2. Το σύνολο του Cantor C είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ διότι είναι κλειστό και φραγμένο.

(Ασκ. 1, 2, 7)

Παρατήρηση

Το Θεώρημα 3 λέει ότι το αντίστροφο της Πρότασης 1 ισχύει στο χώρο $\mathbb{R}^n$ (με την Ευκλείδια μετρική). Δεν είναι όμως σωστό ότι ισχύει σε κάθε μετρικό χώρο (Άσκ. 11).

Πρόταση 2 *Κάθε μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη

Έστω μη κενό συμπαγές υποσύνολο M του $\mathbb{R}$. Αφού το M είναι μη κενό και φραγμένο, το M έχει supremum: $\beta = \sup M$. Άρα υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}$ στο M ώστε $x_n \to \beta$. Αφού το M είναι κλειστό, $\beta \in M$. Άρα το β είναι το μέγιστο στοιχείο του M. Η απόδειξη είναι ίδια για την ύπαρξη ελαχίστου στοιχείου. Ο.Ε.Δ.

Και τώρα θα αποδείξουμε κάποια αποτελέσματα για τη σχέση ανάμεσα στις έννοιες της συμπάγειας και της συνέχειας.

Θεώρημα 4 *Έστω συμπαγές υποσύνολο M μετρικού χώρου (X, ρ) και δεύτερος μετρικός χώρος (Y, τ). Έστω συνάρτηση $f : M \to Y$ συνεχής στο M. Τότε το $f(M)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.*

Απόδειξη

Έστω $\{y_k\}$ οποιαδήποτε ακολουθία στο $f(M)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\{y_k\}$ έχει υπο-ακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $f(M)$.

Υπάρχει $x_k \in M$ ώστε $f(x_k) = y_k$. Αφού το M είναι συμπαγές υπάρχει υπο-ακολουθία της $\{x_k\}$ η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M: $x_{k_\lambda} \to x_0 \in M$. Αφού η f είναι συνεχής στο M, $y_{k_\lambda} = f(x_{k_\lambda}) \to f(x_0) \in f(M)$. Ο.Ε.Δ.

Θεώρημα 5 *Έστω συμπαγές υποσύνολο M μετρικού χώρου (X, ρ) και συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ συνεχής στο M. Τότε η f είναι φραγμένη και έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη

Από το Θεώρ. 4 συνεπάγεται ότι το $f(M)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Άρα είναι φραγμένο και έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο (Πρόταση 2). Ο.Ε.Δ.
(Ασκ. 8, 14)

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x, y) = e^{x+y}$, ορισμένη στο σύνολο $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ έχει, σύμφωνα με το Θεώρημα 5, μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Μπορείτε να τις υπολογίσετε;

Τέλος, θα δούμε την γενίκευση του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας τον οποίο μάθαμε στον Απειρ. Λογισμό.

Ορισμός 4 Έστω μετρικοί χώροι (X, ρ), (Y, τ), $A \subset X$ και $f : A \to Y$. Η f λέγεται *ομοιόμορφα συνεχής στο A* αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε:

$$x, y \in A, \quad \rho(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; \tau(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Θεώρημα 6 *Έστω M συμπαγές υποσύνολο μετρικού χώρου (X, ρ) και δεύτερος μετρικός χώρος (Y, τ). Έστω συνάρτηση $f : M \to Y$ συνεχής στο M. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο M.*

Απόδειξη

Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο M. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν x_δ, y_δ στο M για τα οποία ισχύει

$$\rho(x_\delta, y_\delta) < \delta \;\text{ και }\; \rho\Big(f(x_\delta), f(y_\delta)\Big) \geq \varepsilon.$$

Παίρνουμε $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots$ και ονομάζουμε τα αντίστοιχα x_δ, y_δ: $x_1, y_1, x_2, y_2 \ldots x_k, y_k \ldots$ δηλαδή

$$\rho(x_k, y_k) < 1/k \quad , \quad \rho\Big(f(x_k), f(y_k)\Big) \geq \epsilon.$$

Το M είναι συμπαγές, άρα η $\{x_k\}$ έχει υπο-ακολουθία $\{x_{k_\rho}\}$ η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M : $x_{k_\rho} \to x_0 \in M$. Τότε όμως: $y_{k_\rho} \to x_0$. (Διότι: $\rho(y_{k_\rho}, x_0) \leq \rho(y_{k_\rho}, x_{k_\rho}) + \rho(x_{k_\rho}, x_0) < \frac{1}{k_\rho} + \rho(x_{k_\rho}, x_0) \to 0$). Λόγω συνέχειας της f στο $x_0 : f(x_{k_\rho}) \to f(x_0), f(y_{k_\rho}) \to f(x_0)$. Άρα

$$\rho\Big(f(x_{k_\rho}), f(y_{k_\rho})\Big) \leq \rho\Big(f(x_{k_\rho}), f(x_0)\Big) + \rho\Big(f(x_0), f(y_{k_\rho})\Big) \to 0.$$

Το τελευταίο αντιφάσκει με το: $\rho(f(x_{k_\rho}), f(y_{k_\rho})) \geq \varepsilon$ για κάθε ρ. Ο.Ε.Δ.
(Ασκ 3,5)

Τα δύο τελευταία θεωρήματα γενικεύουν γνωστά αποτελέσματα του Απειροστικού Λογισμού στην περίπτωση κατά την οποία έχουμε συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχή στο $[a, b]$.

3.2* Μετρική-Hausdorff

Έστω μετρικός χώρος (X, ρ). Θεωρούμε το $Z_B = \{A \mid A \subset X,\ A$ φραγμένο $\}$. Για κάθε $A, B \in Z_B$ ορίζουμε
$\widetilde{\rho}\ (A, B) = \inf\{\mu \in \mathbb{R} \mid$ για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $\rho(a, b) \leq \mu$ και για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $\rho(a, b) \leq \mu\}$.

(α) Αποδείξτε ότι η $\widetilde{\rho}$ είναι ψευδο-μετρική στο Z_B.

(β) Αποδείξτε ότι $\widetilde{\rho}\ (A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$ στον (X, ρ).

Έστω $Z_{BC} = \{A \mid A \subset X,\ A$ φραγμένο και κλειστό $\}$.

Για κάθε $A, B \in Z_{BC}$ ορίζουμε με τον ίδιο τύπο το $\widetilde{\rho}\ (A, B)$.

(γ) Αποδείξτε ότι η $\widetilde{\rho}$ είναι μετρική στο Z_{BC}.

Ορισμός 5 Η $\widetilde{\rho}$ ονομάζεται *μετρική-Hausdorff* στον χώρο Z_{BC} των κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (X, ρ).

(δ) Ως (X, ρ) θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ με την ευκλείδια μετρική. Έστω ακολουθία $\{A_n\}$ κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και έστω $\widetilde{\rho}\ (A_n, A) \to 0$, όπου το A είναι επίσης κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι, αν όλα τα A_n είναι κυρτά, τότε και το A είναι κυρτό.

(ε) Προσπαθήστε να «δείτε» τι σημαίνει γεωμετρικά η σχέση $\widetilde{\rho}\ (A,B) \leq \varepsilon$ ανάμεσα σε δύο κλειστά και φραγμένα (δηλαδή συμπαγή) υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$.

3.3* Ανοικτές καλύψεις

Έστω X οποιοδήποτε μη κενό σύνολο και $M \subset X$. Έστω μια οικογένεια υποσυνόλων A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ του X, όπου Λ είναι οποιοδήποτε μη κενό σύνολο δεικτών.

Ορισμός 6 Λέμε ότι *τα* A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ *αποτελούν κάλυψη του* M αν $M \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Αν, επιπλέον, το σύνολο δεικτών Λ είναι πεπερασμένο, τότε λέμε ότι τα A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ αποτελούν *πεπερασμένη κάλυψη* του M.

Ορισμός 7 Αν τα A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ αποτελούν κάλυψη του M, αν $\Lambda_1 \subset \Lambda$ και τα A_λ $(\lambda \in \Lambda_1)$ επίσης αποτελούν κάλυψη του M, τότε λέμε ότι *τα* A_λ $(\lambda \in \Lambda_1)$ *αποτελούν υπο-κάλυψη του* M *ή ότι η κάλυψη* A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ *περιέχει την υπο-κάλυψη* A_λ $(\lambda \in \Lambda_1)$ *του* M.

Ορισμός 8 Έστω ότι (X,ρ) είναι μετρικός χώρος. Αν τα A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ αποτελούν κάλυψη του M και όλα τα A_λ είναι ανοικτά υποσύνολα του (X,ρ), τότε λέμε ότι *τα* A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ *αποτελούν ανοικτή κάλυψη του* M.

Παραδείγματα

1. Έστω $X = \mathbb{R}$ και $M = [0,1]$. Θεωρούμε όλα τα διαστήματα της μορφής $A_x = (x - \frac{1}{100}, x + \frac{1}{100}), x \in \mathbb{R}$. Προφανώς, αυτά αποτελούν ανοικτή κάλυψη του $[0,1]$. Αν ξεχωρίσουμε και κρατήσουμε μονάχα τα διαστήματα της μορφής $A_{x_k} = (x_k - \frac{1}{100}, x_k + \frac{1}{100})$, όπου :

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{100}, \ldots, x_k = \frac{k}{100}, \ldots, x_{99} = \frac{99}{100}, x_{100} = 1$$

τότε έχουμε μια πεπερασμένη υπο-κάλυψη της αρχικής ανοικτής κάλυψης.

2. Έστω $X = \mathbb{R}$ και $M = \mathbb{R}$. Παίρνουμε πάλι τα ίδια διαστήματα $(x - \frac{1}{100}, x + \frac{1}{100}), x \in \mathbb{R}$ τα οποία αποτελούν ανοικτή κάλυψη του $\mathbb{R}$. Το πλήθος τους είναι άπειρο. Υπάρχει πεπερασμένη υπο-κάλυψη; Όχι , διότι αν πάρουμε οποιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους διαστήματα

$$\left(x_1 - \frac{1}{100}, x_1 + \frac{1}{100}\right), \ldots, \left(x_N - \frac{1}{100}, x_N + \frac{1}{100}\right),$$

και τα διατάξουμε ώστε $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$, τότε η ημιευθεία $(-\infty, x_1 - \frac{1}{100}]$, όπως και η $[x_N + \frac{1}{100}, +\infty)$ δεν καλύπτεται από τα διαστήματα αυτά. Άρα η συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη του $\mathbb{R}$ δεν περιέχει *καμία* πεπερασμένη υπο-κάλυψη του $\mathbb{R}$.

3. Έστω $X = \mathbb{R}$ και $M = \mathbb{R}$. Παίρνουμε όλα τα διαστήματα της μορφής $(-n, +\infty), (-\infty, n), n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, αυτά αποτελούν ανοικτή κάλυψη του $\mathbb{R}$ και δύο από αυτά , τα $(-1, +\infty)$, $(-\infty, 1)$ αποτελούν επίσης κάλυψη του $\mathbb{R}$. Άρα η συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη του $\mathbb{R}$ περιέχει μια πεπερασμένη υπο-κάλυψη του $\mathbb{R}$.

4. Έστω $X = \mathbb{R}$ και $M = (0, 1)$. Όπως και στο παράδειγμα 1, τα διαστήματα $(x - \frac{1}{100}, x + \frac{1}{100})$, $x \in \mathbb{R}$ αποτελούν ανοικτή κάλυψη του $(0, 1)$. Τα δε $(x_k - \frac{1}{100},\ x_k + \frac{1}{100}), x_k = \frac{k}{100},\ 0 \leq k \leq 100$ αποτελούν πεπερασμένη υπο-κάλυψη του $(0, 1)$.
Άρα η συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη του $(0, 1)$ περιέχει μια πεπερασμένη υπο-κάλυψη του $(0, 1)$.

5. Έστω $X = \mathbb{R}, M = (0, 1)$. Θεωρούμε τα ανοικτά διαστήματα $(\frac{1}{n}, 1)$, $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$. Αυτά αποτελούν ανοικτή κάλυψη του $(0, 1)$. Διότι κάθε x στο $(0, 1)$ περιέχεται σε κάποιο από τα $(\frac{1}{n}, 1)$. Αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{n} < x < 1$. Αν πάρουμε οποιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους από τα διαστήματα αυτά, δηλαδή :

$$\left(\frac{1}{n_1}, 1\right), \left(\frac{1}{n_2}, 1\right), \ldots, \left(\frac{1}{n_N}, 1\right)$$

όπου $n_1 < n_2 < \cdots < n_N$, τότε αυτά δεν αποτελούν κάλυψη του $(0, 1)$, αφού το κομμάτι $(0, \frac{1}{n_N}]$ μένει ακάλυπτο.
Άρα η συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη του $(0, 1)$ δεν περιέχει *καμία* πεπερασμένη υπο-κάλυψη του $(0, 1)$.

Μέχρι τώρα

1. Στις περιπτώσεις $M = (0, 1)$ και $M = \mathbb{R}$ είδαμε ανοικτές καλύψεις τους οι οποίες περιέχουν πεπερασμένες υπο-καλύψεις τους και ανοικτές καλύψεις τους οι οποίες δεν περιέχουν καμία πεπερασμένη υπο-κάλυψη.

2. Στην περίπτωση $M = [0, 1]$ είδαμε ανοικτή κάλυψη του M η οποία περιέχει πεπερασμένη υπο-κάλυψή του. Είναι δυνατόν να βρούμε ανοικτή κάλυψη του $[0, 1]$ η οποία να μην περιέχει καμία πεπερασμένη υπο-κάλυψη; Λίγο παρακάτω θα αποδείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατο !

Μετά από αυτά τα παραδείγματα έχουμε το

Θεώρημα 7 *Έστω μετρικός χώρος (X, ρ) και $M \subset X$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*

(α) Το M είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

(β) Κάθε ανοικτή κάλυψη του M περιέχει τουλάχιστον μια ανοικτή υποκάλυψή του.

Απόδειξη

(β)⇒(α) Έστω τυχούσα $\{x_n\}$ στο M. Ας υποθέσουμε ότι *δεν* υπάρχει υπο-ακολουθία της $\{x_n\}$ η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M. Ή, ισοδύναμα, ότι κανένα $x \in M$ δεν είναι όριο υπο-ακολουθίας της $\{x_n\}$. Αυτό σημαίνει ότι: για κάθε $x \in M$ υπάρχει περιοχή $N_x(\varepsilon)$ του x (το ε εξαρτάται από το x), η οποία περιέχει πεπερασμένου πλήθους όρους της $\{x_n\}$. Καθώς το x διατρέχει το M, οι αντίστοιχες $N_x(\varepsilon)$ αποτελούν ανοικτή κάλυψη του M. Άρα υπάρχει πεπερασμένη υπο-κάλυψη του M. Δηλαδή υπάρχουν $x_1, \ldots, x_N$ ώστε το M καλύπτεται από τις $N_{x_1}(\varepsilon_1), \ldots, N_{x_N}(\varepsilon_N)$. Αφού κάθε μια από αυτές τις περιοχές περιέχει πεπερασμένου πλήθους όρους της $\{x_n\}$, η ένωσή τους, άρα και το M, περιέχει πεπερασμένου πλήθους όρους της $\{x_n\}$. Αυτό, όμως, αντιφάσκει με το ότι ολόκληρη η $\{x_n\}$ περιέχεται στο M.

(α)⇒(β) *Βήμα 1.* Έστω $\varepsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι *υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $x_1, \ldots, x_N$ του M ώστε: $M \subset N_{x_1}(\varepsilon) \cup \ldots \cup N_{x_N}(\varepsilon)$.* Έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Διαλέγουμε τυχόν $x_1 \in M$. Τότε $M \not\subset N_{x_1}(\varepsilon)$.

Άρα υπάρχει $x_2 \in M$ με $x_2 \notin N_{x_1}(\varepsilon)$. Τότε $M \not\subset N_{x_1}(\varepsilon) \cup N_{x_2}(\varepsilon)$.

Άρα υπάρχει $x_3 \in M$ με $x_3 \notin N_{x_1}(\varepsilon) \cup N_{x_2}(\varepsilon)$. Τότε $M \not\subset N_{x_1}(\varepsilon) \cup N_{x_2}(\varepsilon) \cup N_{x_3}(\varepsilon)$.

Άρα υπάρχει $x_4 \in M$ με $x_4 \notin N_{x_1}(\varepsilon) \cup N_{x_2}(\varepsilon) \cup N_{x_3}(\varepsilon)$.

Συνεχίζοντας επαγωγικά βλέπουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ στο M ώστε: $n > m \geq 1 \Rightarrow \rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$.

Αυτό, όμως, αποκλείει την δυνατότητα να υπάρχει υπο-ακολουθία της $\{x_n\}$ η οποία συγκλίνει. Αντίφαση.

Βήμα 2. Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη $A_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ του M. Θα αποδείξουμε ότι *υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in M$ το $N_x(\varepsilon) \cap M$ περιέχεται σε κάποιο από τα $A_\lambda(\lambda \in \Lambda)$.*

Ορισμός 9 Ο αριθμός $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα αυτή ονομάζεται *αριθμός Lebesgue* της ανοικτής κάλυψης $A_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ του M.

Έστω ότι δεν υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα αυτή. Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in M$ ώστε το $N_x(\varepsilon) \cap M$ δεν περιέχεται σε κανένα από τα $A_\lambda(\lambda \in \Lambda)$. Εφαρμόζουμε για $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in M$ ώστε το $N_{x_n}(\frac{1}{n}) \cap M$ δεν περιέχεται σε κανένα από τα $A_\lambda(\lambda \in \Lambda)$. Υπάρχει, όμως, υπο-ακολουθία $\{x_{k_n}\}$ της $\{x_n\}$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in M$: $x_{k_n} \to x_0$. Το x_0 ανήκει σε κάποιο απο τα $A_\lambda(\lambda \in \Lambda)$. Έστω $x_0 \in A_{\lambda_0}$. Αφού το A_{λ_0} είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_{x_0}(\delta) \subset A_{\lambda_0}$.

Επιλέγουμε αρκετά μεγάλο k_n ώστε: $\rho(x_{k_n}, x_0) < \frac{\delta}{2}$ και $\frac{1}{k_n} < \frac{\delta}{2}$. Τότε: $N_{x_{k_n}}(\frac{1}{k_n}) \subset N_{x_0}(\delta) \subset A_{\lambda_0}$. Άρα $N_{x_{k_n}}(\frac{1}{k_n}) \cap M \subset A_{\lambda_0}$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Βήμα 3. Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη $A_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ του M. Τότε υπάρχει αριθμός Lebesgue ε της κάλυψης αυτής σύμφωνα με το βήμα 2. Λόγω του βήματος 1, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $x_1, \ldots, x_N$ του M ώστε $M \subset N_{x_1}(\varepsilon) \cup \ldots \cup N_{x_N}(\varepsilon)$. Κάθε ένα, όμως, από τα $N_{x_j}(\varepsilon) \cap M$ περιέχεται σε κάποιο από τα $A_\lambda (\lambda \in \Lambda)$. Έστω $N_{x_j}(\varepsilon) \cap M \subset A_{\lambda_j}$. Τότε: $M \subset (N_{x_1}(\varepsilon) \cap M) \cup \ldots \cup (N_{x_N}(\varepsilon) \cap M) \subset A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_N}$. Άρα τα $A_{\lambda_1}, \ldots, A_{\lambda_N}$ αποτελούν πεπερασμένη υπο-κάλυψη του M. Ο.Ε.Δ.

Το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 7 παρέχει έναν εναλλακτικό ορισμό της έννοιας της συμπάγειας ισοδύναμο με τον αρχικό: ένα υποσύνολο M ενός μετρικού χώρου (X, ρ) ονομάζεται *συμπαγές*, αν κάθε ανοικτή κάλυψη του M περιέχει τουλάχιστον μια ανοικτή υπο-κάλυψή του.

Είναι δυνατόν επίσης να αποδειχτούν με βάση τον δεύτερο αυτόν ορισμό τα: Πρόταση 1, Θεώρημα 1,3, Πρόταση 2, Θεώρημα 4,5,6.

3.4 Ασκήσεις

Εύκολες

1. Βρείτε ποια από τα σύνολα των ασκήσεων: 8, κεφ. 1 και 4, κεφ. 2 είναι συμπαγή.

2. Φτιάξτε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο είναι συμπαγές και έχει άπειρο αριθμήσιμο πλήθος σημείων συσσώρευσης.

3. Αν οι $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, $\quad g : (Y, \sigma) \to (Z, \tau)$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς αποδείξτε ότι και η $gof : (X, \rho) \to (Z, \tau)$ είναι ομ. συνεχής.

4. Έστω μετρικός χώρος (X, ρ), $\ A, B \subset X$, $\ A$ συμπαγές και B κλειστό. Αποδείξτε ότι το $A \cap B$ είναι συμπαγές.

Μέτριες

5. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Αν το A είναι φραγμένο και η f ομοιόμορφα συνεχής στο A, τότε αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη. (Υπόδ: πάρτε $\epsilon = 1$ και το αντίστοιχο δ. Υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία στο A ώστε κάθε σημείο του A απέχει από τουλάχιστον ένα από αυτά απόσταση μικρότερη από δ).

6. Έστω μετρικός χώρος (X, ρ) και $A_\lambda \subset X,\ \lambda \in \Lambda$

   (α′) Αν τα A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ είναι συμπαγή, τότε το $\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ είναι συμπαγές.

   (β′) Αν τα A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ είναι συμπαγή και το Λ είναι πεπερασμένο, τότε το $\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ είναι συμπαγές.

   Βρείτε στον $\mathbb{R}$ συμπαγή υποσύνολα A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ ώστε το $\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ να μην είναι συμπαγές.

7. Έστω συγκλίνουσα ακολουθία $\{x_n\},\ \ x_n \to x$ στον $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{x, x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές.

Δύσκολες

8. Έστω συμπαγές υποσύνολο A και κλειστό υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$, ώστε $A \cap B = \emptyset$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$x \in A,\ y \in B \Rightarrow \rho(x, y) \geq \delta.$$

   (Υπόδ: θεωρείστε την συνάρτηση $\rho_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της άσκησης 15, κεφ. 2. Ο περιορισμός της στο A είναι συνεχής και > 0. Άρα έχει θετικό minimum).

9. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ και $f : A \to B$ η οποία είναι συνεχής στο A και αμφιμονοσήμαντη από το A επί του B. Αν το A είναι συμπαγές, τότε αποδείξτε ότι η αντίστροφη $f^{-1} : B \to A$ είναι συνεχής στο B.

10. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Το υποσύνολο $E = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ του $\mathbb{R}^2$ ονομάζεται *γράφημα* της f.

    (α′) Έστω ότι η f είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο A αν και μόνον αν το E είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

    (β′) Έστω ότι το A είναι συμπαγές. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο A αν και μόνον αν το E είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

11. Έστω X μη κενό σύνολο και ρ η διακριτή μετρική στο X. Αν $A \subset X$ αποδείξτε ότι: το A είναι συμπαγές στον (X, ρ) αν και μόνον αν το A είναι πεπερασμένο. Αν το A έχει άπειρο πλήθος στοιχείων: είναι κλειστό και φραγμένο αλλά όχι συμπαγές.

12. Έστω μετρικός χώρος (X, ρ) και $A \subset X$. Αποδείξτε ότι $diam(A) = diam(\overline{A})$.

13. Έστω μη κενό συμπαγές M υποσύνολο μετρικού χώρου (X, ρ). Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in M$ ώστε $\rho(x, y) = diam(M)$.

14. (α′) Έστω μη κενό συμπαγές M υποσύνολο μετρικού χώρου (X, ρ) και $x \in X$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $y \in M$ ώστε $\rho(x, y) = \rho_M(x)$.

    (β′) Έστω μη κενό κλειστό M υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με την ευκλείδια μετρική και $x \in X$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $y \in M$ ώστε $\rho(x, y) = \rho_M(x)$.

15. Έστω ότι το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, ρ). Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμήσιμο $A \subset M$ ώστε $\overline{A} = M$.

16. Έστω $M \neq \emptyset$ και $M \subset X_1$, $M \subset X_2$, όπου (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) είναι δυο μετρικοί χώροι και οι ρ_1, ρ_2 «συμφωνούν» στο M. Δηλαδή: $\rho_1(x, y) = \rho_2(x, y)$ για κάθε $x, y \in M$.

    Αποδείξτε ότι: το M είναι συμπαγές υποσύνολο του $(X_1, \rho_1) \Leftrightarrow$ το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X_2, ρ_2).

    Δηλαδή η συμπάγεια του M είναι ιδιότητα του M καθεαυτού (και της μετρικής του) και δεν εξαρτάται από τον μετρικό χώρο στον οποίο περιέχεται το M.

Κεφάλαιο 4

Σειρές πραγματικών αριθμών

4.1 Γενικά

Ορισμός 1 Αν έχουμε μια ακολουθία $\{a_n\}$ στο $\mathbb{R}$, θεωρούμε την ακολουθία:

$s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $\ldots$, $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, $\ldots$

Αν η $\{s_n\}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό s, τότε γράφουμε

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Χρησιμοποιούμε επίσης τις συντομεύσεις: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ και, αν η $\{s_n\}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό s, $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Όταν γράφουμε το σύμβολο $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ή το σύμβολο $a_1 + a_2 + \ldots$ χρησιμοποιούμε τον όρο *σειρά των* $\{a_k\}$ ή *σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ή *σειρά* $a_1 + a_2 + \ldots$ και δεν προϋποθέτουμε τίποτε για τη σύγκλιση της $\{s_n\}$. Όταν, όμως, γράφουμε $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ εννοούμε ότι η $\{s_n\}$ συγκλίνει στον αριθμό s και λέμε ότι *η σειρά των* $\{a_k\}$ *ή η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ή η σειρά* $a_1 + a_2 + \ldots$ *συγκλίνει στο* s. Επίσης, αν $s_n \to +\infty$ ή αν $s_n \to -\infty$ γράφουμε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ ή $-\infty$ ή $a_1 + a_2 + \ldots = +\infty$ ή $-\infty$ αντιστοίχως και λέμε ότι *η σειρά των* $\{a_k\}$ *ή η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ή η σειρά* $a_1 + a_2 + \ldots$ *αποκλίνει στο* $+\infty$ *ή στο* $-\infty$ αντιστοίχως.

Γενικά, αν η $\{s_n\}$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, λέμε ότι *η σειρά των* $\{a_k\}$ *ή η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ή η σειρά* $a_1 + a_2 + \ldots$ *αποκλίνει*.

Το s_n ονομάζεται *n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς* και η $\{s_n\}$ ονομάζεται *ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ή της σειράς* $a_1 + a_2 + \ldots$. Μερικές φορές εμφανίζεται και όρος a_0 πριν από τους $a_1, a_2, \ldots$, οπότε έχουμε

$s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$, $\ldots$, $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ κ.λ.π.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η εξέταση της σύγκλισης ή απόκλισης μιάς σειράς δεν είναι τίποτε άλλο από την εξέταση της σύγκλισης ή απόκλισης μιάς ακολουθίας (των μερικών αθροισμάτων της σειράς). Επειδή, όμως, οι σειρές εμφανίζονται πολύ συχνά στη μαθηματική ανάλυση και στις εφαρμογές της θα τις μελετήσουμε ξεχωριστά από τις ακολουθίες.

Αν έχουμε δύο σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, μπορούμε να σχηματίσουμε τον γραμμικό συνδυασμό τους $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k)$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 1 *Αν* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = t$, *τότε*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda s + \mu t = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Απόδειξη

Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\quad t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $\quad u_n = \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k)$ είναι τα n-οστά μερικά αθροίσματα των σειρών, τότε από τις αλγεβρικές ιδιότητες του $\mathbb{R}$ έχουμε: $u_n = \lambda s_n + \mu t_n$. Αφού $s_n \to s$, $t_n \to t \quad : \quad u_n \to \lambda s + \mu t$. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 2 *(α) Αν απαλείψουμε πεπερασμένο πλήθος «αρχικών» όρων μιάς σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή η απόκλισή της.*

(β) Αν αλλάξουμε πεπερασμένου πλήθους όρους μιάς σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή η απόκλιση της.

Απόδειξη

(α) Έστω η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Απαλείφουμε τους όρους $a_1, a_2, \ldots, a_{M-1}$. Η καινούργια σειρά γράφεται $\sum_{k=M}^{\infty} a_k$. Αν s_n και t_n είναι τα n-οστά μερικά αθροίσματα των δύο σειρών αντιστοίχως, τότε όταν $n \geq M$:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{M-1} + a_M + \ldots + a_n = a_1 + \ldots + a_{M-1} + t_{n-M+1}$$

Άρα η $\{s_n\}$ συγκλίνει αν και μόνον αν η $\{t_{n-M+1}\}$ συγκλίνει, δηλαδή αν και μόνον αν η $\{t_n\}$ συγκλίνει και, αν $s_n \to s$, $t_n \to t$, τότε $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_{M-1} + t$. Δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \ldots + a_{M-1} + \sum_{k=M}^{\infty} a_k.$$

(β) Έστω η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Αλλάζουμε πεπερασμένου πλήθους όρους. Άρα υπάρχει M ώστε τα a_k $(k \geq M)$ μένουν τα ίδια. Επομένως η παλιά και η καινούργια σειρά έχουν το ίδιο κομμάτι $\sum_{k=M}^{\infty} a_k$. Εφαρμόζουμε το μέρος (α). Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 3 *(α) Αν* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$*, τότε* $a_n \to 0$.

(β) Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει, τότε για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *ώστε:*

$$n \geq N \Rightarrow \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \Big| < \epsilon.$$

Απόδειξη

(α) Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, τότε $a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$.

(β) Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, τότε $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = s - s_n \to 0$. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα

1. Η *γεωμετρική σειρά* $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, όπου $x \in \mathbb{R}$ $(x^0 \equiv 1)$. Δηλαδή $a_k = x^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Άρα:

$$s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \begin{cases} \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ n+1, & x = 1. \end{cases}$$

(i) Αν $x = 1$, τότε $s_n = n + 1 \to +\infty$.

(ii) Αν $x > 1$, τότε $x^{n+1} \to +\infty$, οπότε $s_n \to +\infty$.

(iii) Αν $x = -1$, τότε $s_n = \begin{cases} 0, & \text{για } n \text{ περιττό} \\ 1, & \text{για } n \text{ άρτιο,} \end{cases}$

οπότε η $\{s_n\}$ αποκλίνει.

(iv) Αν $x < -1$, τότε $s_n = \begin{cases} \frac{|x|^{n+1}-1}{x-1} \to -\infty, & \text{γιά } n \text{ περιττό} \\ \frac{-|x|^{n+1}-1}{x-1} \to +\infty, & \text{γιά } n \text{ άρτιο,} \end{cases}$

οπότε πάλι η $\{s_n\}$ αποκλίνει, κυμαινόμενη ανάμεσα στα $+\infty, -\infty$.

(v) Αν $|x| < 1$, τότε $x^{n+1} \to 0$, οπότε $s_n \to \frac{1}{1-x}$.

Άρα

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & |x| < 1 \\ +\infty, & x \geq 1. \end{cases}$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση η $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ δεν συγκλίνει σε αριθμό ούτε αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Στην περίπτωση $|x| \geq 1$ μπορούμε, επίσης, να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3(α) παρατηρώντας ότι $|a_k| = |x|^k \geq 1$, οπότε αποδεικνύουμε με άλλον τρόπο ότι η σειρά αποκλίνει.

2. *Τηλεσκοπικές σειρές.* Αν για την ακολουθία $\{a_k\}$ υπάρχει μία άλλη $\{b_k\}$ ώστε $a_k = b_{k+1} - b_k$ $(k \in \mathbb{N})$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία $\{b_k\}$ συγκλίνει. Διότι:

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \ldots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1,$$

οπότε: $b_n \to b$ αν και μόνον αν $s_n \to b - b_1$.

Ας δούμε για παράδειγμα την σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Τότε

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = b_{k+1} - b_k,$$

όπου $b_k = -\frac{1}{k}$. Άρα

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

Δηλαδή $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. (Ασκ. 1 α, στ)

Θεώρημα 1 (Κριτήριο Cauchy) . *Έστω σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Αυτή συγκλίνει αν και μόνον αν ισχύει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε:*

$$N \le m < n \ \Rightarrow \ \Big| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \Big| = |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \epsilon.$$

Απόδειξη

Έστω $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ το n-οστό μερικό άθροισμα. Η σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν η $\{s_n\}$ συγκλίνει. Δηλαδή, αν και μόνον αν η $\{s_n\}$ είναι Cauchy, το οποίο σημαίνει: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $N \le m < n \Rightarrow |a_{m+1} + \ldots + a_n| = |(a_1 + \ldots + a_n) - (a_1 + \ldots + a_m)| = |s_n - s_m| < \epsilon$. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα

Η *αρμονική σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Εδώ $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι όταν $n > m$: $a_{m+1} + \ldots + a_n = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n} \ge \frac{n-m}{n}$.

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy. Αν η αρμονική σειρά συγκλίνει, τότε, παίρνοντας $\epsilon = \frac{1}{4}$, θα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: $N \le m < n \Rightarrow \ |a_{m+1} + \ldots + a_n| < \frac{1}{4}$.

Αν όμως $m = N$ και $n = 2N$, τότε έχουμε αντίφαση με το $a_{N+1} + \ldots + a_{2N} \ge \frac{2N-N}{2N} = \frac{1}{2}$.

Άρα η αρμονική σειρά αποκλίνει. Το αντίστροφο της Προτ. 3(α) δεν ισχύει. (Ασκ. 11β, 12α)

4.2 Σειρές με μη-αρνητικούς όρους

Θεώρημα 2 *Έστω σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ με $a_k \ge 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Η σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν η $\{s_n\}$ είναι άνω φραγμένη. Αν η $\{s_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.*

Απόδειξη

Αν η $\{s_n\}$ είναι άνω φραγμένη τότε, παρατηρώντας ότι είναι αύξουσα ακολουθία (αφού $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$), συμπεραίνουμε ότι συγκλίνει και, επομένως, η σειρά συγκλίνει. Αν η $\{s_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη τότε, αφού είναι αύξουσα, $s_n \to +\infty$. Ο.Ε.Δ.

Παρατήρηση

Πρέπει να τονισθεί ότι, σύμφωνα με το Θεωρ. 2, μια σειρά με μη-αρνητικούς όρους είτε συγκλίνει είτε αποκλίνει στο $+\infty$. Για παράδειγμα, η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, αφού δεν συγκλίνει, αποκλίνει στο $+\infty$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

Παράδειγμα

Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \quad (\frac{1}{0!} = 1)$.

Για $k \geq 2$: $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \geq 1 \cdot \underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{k-1 \text{ φορές}} = 2^{k-1}$. Άρα

$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$.

Άρα η $\{s_n\}$ είναι άνω φραγμένη, οπότε η $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ συγκλίνει. Το άθροισμα της σειράς αυτής το συμβολίζουμε με e:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

(Ασκ. 14)

Πολλές φορές συναντάμε σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ των οποίων οι όροι a_k *φθίνουν* προς το 0: $a_{k+1} \leq a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_k \to 0$. Το ακόλουθο είναι ένα κριτήριο σύγκλισης χρήσιμο σε τέτοιες περιπτώσεις:

Πρόταση 4 (Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy) *Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ έχει όρους οι οποίοι φθίνουν προς το 0, τότε αυτή συγκλίνει αν και μόνον αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \, a_{2^k}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη

Έστω ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. Τότε τα μερικά αθροίσματα $a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n}$ είναι άνω φραγμένα, έστω από τον αριθμό M. Αρκεί να αποδείξουμε το ίδιο για τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (Θεωρ. 2). Έστω $s_m = a_1 + \ldots + a_m$. Ο αριθμός m βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 2, έστω $2^n \leq m < 2^{n+1}$. Τότε, χρησιμοποιώντας ότι η $\{a_k\}$ είναι φθίνουσα:

$$s_m = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + (a_{2^{n-1}} + \ldots + a_{2^n - 1}) +$$

$$+(a_{2^n} + \ldots + a_m) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n} \leq M$$

Αντιστρόφως, έστω ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δηλαδή ότι η $\{s_m\}$ είναι άνω φραγμένη: $s_m \leq M$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n}$$

$$\leq 2a_1 + 2a_2 + 2(a_3 + a_4) + \ldots + 2(a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n})$$

$$= 2s_{2^n} \leq 2M.$$

Άρα η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει (Θεωρ. 2). Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\rho}$, $\rho \in \mathbb{R}$.

Εδώ $a_k = \frac{1}{k^\rho}$. Αν $\rho \leq 0$, τότε $a_k \geq 1$, οπότε η σειρά δεν συγκλίνει (Προτ. 3(α)). Αν $\rho > 0$, τότε η $\{a_k\}$ φθίνει προς το 0. Επομένως $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\rho-1}}\right)^k$. Η τελευταία σειρά είναι γεωμετρική με $x = \frac{1}{2^{\rho-1}}$. Αυτή συγκλίνει αν $x = \frac{1}{2^{\rho-1}} < 1$, δηλ. αν $\rho > 1$ και αποκλίνει αν $x = \frac{1}{2^{\rho-1}} \geq 1$, δηλ. αν $\rho \leq 1$.

Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\rho}$ συγκλίνει αν $\rho > 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $\rho \leq 1$.

2. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(logk)^\rho}$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$.

Πάλι $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k(log(2^k))^\rho} = \frac{1}{(log2)^\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\rho}$ η οποία συγκλίνει αν $\rho > 1$ και αποκλίνει αν $\rho \leq 1$. (Ασκ. 2)

4.3 Γενικές σειρές

Ορισμός 2 Λέμε ότι μια σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως*, αν η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει *υπό συνθήκη*, αν συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

Πρόταση 5 *Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy. Έστω $\epsilon > 0$. Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: $N \leq m < n \ \Rightarrow \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon$. Όμως τότε: $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \epsilon$.

Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy και, επομένως, συγκλίνει. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα

1. Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ συγκλίνει, αφού συγκλίνει απολύτως: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right|= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ δεν συγκλίνει απολύτως, αφού $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Θα δείξουμε τώρα ότι αυτή η σειρά συγκλίνει, δηλαδή ότι συγκλίνει υπό συνθήκη. Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, τότε $s_{2m} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(2m-1)2m}$. Άρα η υπο-ακολουθία $\{s_{2m}\}$ είναι αύξουσα. Επί πλέον είναι και άνω φραγμένη, διότι $s_{2m} < \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2m-1)^2}$, και το δεύτερο μέλος της ανισότητας είναι μικρότερο από το $(2m-1)$-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ η οποία συγκλίνει. Άρα η υπο-ακολουθία $\{s_{2m}\}$ συγκλίνει στον αριθμό, έστω, $s : s_m \to s$. Όμως: $s_{2m+1} = s_{2m} + \frac{1}{2m+1} \to s + 0 = s$. Άρα $s_n \to s$. (Ασκ. 13)

Θεώρημα 3 (Σύγκριση σειρών) *Έστω σειρές* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *όπου* $b_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$.

(α) Άν υπάρχει αριθμός M *ώστε* $|a_k| \leq Mb_k$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *, τότε, αν η* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *συγκλίνει, συγκλίνει απολύτως η* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(β) Αν η $\{\frac{a_k}{b_k}\}$ *συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, τότε, αν η* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *συγκλίνει, συγκλίνει απολύτως η* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Απόδειξη

(α) Έστω $s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|, t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Τότε, προφανώς: $s_n \leq Mt_n$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η $\{t_n\}$ είναι άνω φραγμένη. Άρα και η $\{s_n\}$ είναι άνω φραγμένη και, επομένως, η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει.

(β) Αν η $\{\frac{a_k}{b_k}\}$ συγκλίνει, τότε είναι φραγμένη. Δηλαδή $|\frac{a_k}{b_k}| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, για κάποιο M. Άρα $|a_k| \leq Mb_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και εφαρμόζουμε το (α). Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Παρατηρούμε ότι $|\frac{\sin(kx)}{k^2}| \leq \frac{1}{k^2}$. Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, συγκλίνει απολύτως η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$. Παρατηρούμε ότι $\frac{k+1}{k^4+k^2+3} = \frac{1}{k^3}\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k^2}+\frac{3}{k^4}}$ Άρα, αν $a_k = \frac{k+1}{k^4+k^2+3}, b_k = \frac{1}{k^3}$, τότε $\frac{a_k}{b_k} \to 1$. Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ συγκλίνει, συγκλίνει απολύτως η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα: $\frac{k+1}{k^2+2} = \frac{1}{k}\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{2}{k^2}}$. Αν $b_k = \frac{k+1}{k^2+2}, a_k = \frac{1}{k}$, τότε $\frac{a_k}{b_k} \to 1$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Άτοπο. (Ασκ. 1α,β,ε,στ, 8, 9, 10, 11α,γ, 12β)

Θεώρημα 4 (Κριτήριο λόγου - D' Alembert) *Έστω σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *με μη-μηδενικούς όρους.*

(α) Αν $\limsup |\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$, *τότε η* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως.*

(β) Αν $\liminf |\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1$, *τότε η* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *αποκλίνει.*

(γ) Αν $\liminf \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq 1 \leq \limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$, *δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.*

Απόδειξη

(α) Διαλέγουμε αριθμό x ώστε: $\limsup |\frac{a_{k+1}}{a_k}| < x < 1$. Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq x$ γιά κάθε $k \geq N$. Έτσι: $|a_{N+1}| \leq x|a_N|$, $|a_{N+2}| \leq x|a_{N+1}| \leq x^2|a_N|$ και επαγωγικά: $|a_k| \leq x^{k-N}|a_N|$ γιά κάθε $k \geq N$.

Συγκρίνουμε τις σειρές $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$, $\sum_{k=N}^{\infty} x^k$. Ισχύει ότι : $|a_k| \leq Mx^k$, όπου $M = \frac{|a_N|}{x^N}$. Η $\sum_{k=N}^{\infty} x^k$ συγκλίνει, διότι προέρχεται από την γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (με απαλοιφή των πρώτων όρων της) και $0 \leq x < 1$. Άρα η $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει και, επομένως, η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει.

(β) Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε : $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \geq 1$ για κάθε $k \geq N$. Δηλ. $|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \ldots \geq |a_N| > 0$. Άρα $a_k \not\to 0$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ δεν είναι δυνατόν να συγκλίνει .

(γ) Για την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, η οποία δεν συγκλίνει: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} \to 1$. Για την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, η οποία συγκλίνει: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \to 1$. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to 0$. Άρα $\limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0 < 1$ και η σειρά συγκλίνει.

2. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{x^{k+1}}{x^k}\right| = |x| \to |x|$. Αν $|x| < 1$, τότε $\limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x| < 1$ και η σειρά συγκλίνει. Αν $|x| > 1$, τότε $\liminf \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x| > 1$ και η σειρά αποκλίνει. Αν $|x| = 1$, δηλ. $x = \pm 1$ το κριτήριο λόγου δεν δίνει συμπέρασμα, οπότε ψάχνουμε με άλλο τρόπο. (Το έχουμε ήδη κάνει και ευτυχώς, διότι η γεωμετρική σειρά χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του θεωρήματος!) (Άσκ. 3,4)

Θεώρημα 5 (Κριτήριο ρίζας του Cauchy) *Έστω σειρά* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

(α) Αν $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, *τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.*

(β) Αν $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, *τότε η σειρά αποκλίνει.*

(γ) Αν $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = 1$, *δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.*

Απόδειξη

(α) Διαλέγουμε αριθμό x ώστε : $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < x < 1$.Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε : $k \geq N \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} \leq x \Rightarrow |a_k| \leq x^k$. Συγκρίνουμε τις

σειρές $\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|$, $\sum_{k=N}^{\infty}x^k$. Αφού $x<1$, η δεύτερη σειρά συγκλίνει. Άρα η $\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|$ συγκλίνει και, επομένως, η $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Υπάρχουν άπειροι όροι της $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι από 1. Δηλαδή για άπειρα k ισχύει: $|a_k|\geq 1$. Άρα $a_k \not\to 0$.

(γ) Για τις $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ ισχύει ότι $\sqrt[k]{|a_k|}\to 1$. Η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγματα

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ $(x\in\mathbb{R})$.

$\sqrt[k]{|a_k|}=\frac{|x|}{\sqrt[k]{k}}\to|x|$. Αν $|x|<1$, τότε $\limsup\sqrt[k]{|a_k|}=|x|<1$ και η σειρά συγκλίνει απολύτως. Αν $|x|>1$, τοτε $\limsup\sqrt[k]{|a_k|}=|x|>1$ και η σειρά αποκλίνει. Αν $|x|=1$ το κριτήριο ρίζας δεν δίνει συμπέρασμα. Για $x=1$ παίρνουμε $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ η οποία αποκλίνει. Για $x=-1$ παίρνουμε $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ η οποία συγκλίνει. Άρα η σειρά συγκλίνει μονάχα όταν $-1\leq x<1$ (και συγκλίνει απολύτως όταν $-1<x<1$)

2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k^2}$ $(x\in\mathbb{R})$.

Τώρα $\sqrt[k]{|a_k|}=\frac{x^2}{\sqrt[k]{k^2}}\to x^2$. Άρα $\limsup\sqrt[k]{|a_k|}=x^2$. Αν $|x|>1$ η σειρά αποκλίνει. Αν $|x|<1$ η σειρά συγκλίνει απολύτως. Αν $|x|=1$ το κριτήριο ρίζας δεν δίνει συμπέρασμα. Όμως όταν $x=\pm 1$ η σειρά γίνεται $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ και συγκλίνει. Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως όταν $|x|\leq 1$. (Ασκ. 1δ, 3, 4, 16)

Μέχρι στιγμής μελετήσαμε τα κριτήρια σύγκρισης, λόγου και ρίζας, τα οποία, όμως, είναι κριτήρια για να συμπεράνουμε άν μια σειρά είναι *απολύτως συγκλίνουσα*. Χρήσιμο θα ήταν και κάποιο κριτήριο για σειρές οι οποίες συγκλίνουν αλλά χωρίς να συγκλίνουν απολύτως (δηλαδή για σειρές οι οποίες συγκλίνουν υπό συνθήκη). Θα δούμε τώρα μια αρκετά σημαντική μέθοδο γι αυτόν το σκοπό.

Λήμμα 1 (Άθροιση κατά μέρη — Abel) *Έστω δύο ακολουθίες $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Ορίζουμε $s_n=a_1+\ldots+a_n$, $s_0=0$. Αν $1\leq m\leq n$, τότε:*

$$\sum_{k=m}^{n}a_kb_k=\sum_{k=m}^{n-1}s_k(b_k-b_{k+1})+s_nb_n-s_{m-1}b_m.$$

Απόδειξη

$\sum_{k=m}^{n}a_kb_k=\sum_{k=m}^{n}(s_k-s_{k-1})b_k=\sum_{k=m}^{n}s_kb_k-\sum_{k=m}^{n}s_{k-1}b_k=$ $\sum_{k=m}^{n}s_kb_k-\sum_{k=m-1}^{n-1}s_kb_{k+1}=\sum_{k=m}^{n-1}s_k(b_k-b_{k+1})+s_nb_n-s_{m-1}b_m$. Ο.Ε.Δ.

Δεν είναι καλό να προσπαθήσει κανείς να «θυμάται» αυτήν την ισότητα! Αρκεί η ιδέα: το άθροισμα $\sum_{k=m}^{n}a_kb_k$ αντικαθίσταται με ένα άλλο, στο οποίο την θέση των a_k παίρνουν τα διαδοχικά μερικά αθροίσματά τους s_k και την θέση των b_k παίρνουν οι διαδοχικές διαφορές τους $b_k - b_{k+1}$. Εμφανίζονται και δύο «ακραίοι» όροι : $s_n b_n$, $s_{m-1}b_m$.

Θεώρημα 6 (Dirichlet) *Έστω δύο ακολουθίες $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ με τις ιδιότητες:*

(α) Η $\{b_n\}$ φθίνει προς το 0.

(β) Η $\{s_n\}$ $(s_n = a_1 + ... + a_n)$ είναι φραγμένη: $|s_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Cauchy. Έστω $\epsilon > 0$. Λόγω της (α), υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{\epsilon}{2M} > b_N \geq b_{N+1} \geq b_{N+2} \geq \ldots > 0$. Άν $N \leq m \leq n$, τότε : $|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k| = \left|\sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1}b_m\right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |s_k||b_k - b_{k+1}| + |s_n||b_n| + |s_{m-1}||b_m| \leq M\sum_{k=m}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) + Mb_n + Mb_m = 2Mb_m < 2M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon$. Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα.

Σειρές με εναλλασόμενα πρόσημα $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$, όπου *η $\{b_k\}$ φθίνει προς το 0.*

Για την $\{(-1)^k\}$ ισχύει ότι τα μερικά αθροίσματά της είναι φραγμένα, αφού
$$s_n = \begin{cases} 0 & , \text{ αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ -1 & , \text{ αν ο } n \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$$

Άρα μια τέτοια σειρά συγκλίνει. Για παράδειγμα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ (Άσκηση 5,7)

4.4 Γινόμενο - Cauchy σειρών

Έστω δύο σειρές $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Σχηματίζουμε μια καινούρια σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ ως εξής:

$$c_0 = a_0 b_0 \ , \ c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 \ , \ c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_1 \ , \ldots$$

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k, \ \ldots$$

Ορισμός 3 Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ ονομάζεται *γινόμενο - Cauchy* των $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Η ιδέα για τέτοιου είδους πολλαπλασιασμό προέρχεται από τις δυναμοσειρές, δηλαδή σειρές της μορφής $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Είδαμε ήδη παραδείγματα τέτοιων σειρών (π.χ. την γεωμετρική) και θα κάνουμε πιο λεπτομερή εξέτασή τους σε επόμενο κεφάλαιο. Άν πολλαπλασιάσουμε δύο σειρές $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, όπως πολλαπλασιάζουμε δύο πολυώνυμα -ομαδοποιώντας ίδιες δυνάμεις του x- βλέπουμε ότι σχηματίζεται η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, της οποίας οι συντελεστές c_k δίνονται από τους παραπάνω τύπους.

Θεώρημα 7 *Αν οι $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ συγκλίνουν απολύτως και $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = B$, τότε η $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει απολύτως και $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = AB$.*

Απόδειξη.

Έστω $S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} |b_k|$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} |c_k|$.
Τότε

$$U_n = |a_0 b_0| + |a_1 b_0 + a_0 b_1| + |a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2| + \ldots$$

$$\ldots + |a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n| \leq$$

$$\leq |a_0||b_0| + (|a_1||b_0| + |a_0||b_1|) + (|a_2||b_0| + |a_1||b_1| + |a_0||b_2|) + \ldots$$

$$\ldots + (|a_n||b_0| + |a_{n-1}||b_1| + \ldots + |a_1||b_{n-1}| + |a_0||b_n|) =$$

$$= |a_0|(|b_0| + |b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n|) + |a_1|(|b_0| + |b_1| + \ldots + |b_{n-1}|) +$$

$$+ \ldots + |a_{n-1}|(|b_0| + |b_1|) + |a_n||b_0|$$

$$\leq |a_0| T_n + |a_1| T_n + \ldots + |a_{n-1}| T_n + |a_n| T_n = S_n T_n$$

Οι $\{S_n\}$, $\{T_n\}$ είναι άνω φραγμένες. Άρα η $\{U_n\}$ είναι άνω φραγμένη και, επομένως, η $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει απολύτως.

Έστω τώρα ότι $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Γνωρίζουμε ότι $s_n \to A$, $t_n \to B$ και θα δείξουμε ότι $u_n \to AB$.

$$u_n = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \ldots + (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n)$$

$$= a_0(b_0 + b_1 + \ldots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(b_0 + b_1) + a_n b_0$$

$$= a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_{n-1} t_1 + a_n t_0$$

Άν ορίσουμε ${t_n}^* = t_n - B$, τότε ${t_n}^* \to 0$.

$$u_n = a_0({t_n}^* + B) + a_1({t_{n-1}}^* + B) + \ldots + a_{n-1}({t_1}^* + B) + a_n({t_0}^* + B) =$$

$$= a_0 {t_n}^* + a_1 {t_{n-1}}^* + \ldots + a_{n-1} {t_1}^* + a_n {t_0}^* + (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) B$$

$$= a_0 {t_n}^* + a_1 {t_{n-1}}^* + \ldots + a_{n-1} {t_1}^* + a_n {t_0}^* + s_n B$$

Άφου $s_nB \to AB$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$a_0t_n{}^* + a_1t_{n-1}{}^* + \ldots + a_{n-1}t_1{}^* + a_nt_0{}^* \longrightarrow 0$$

Έστω τώρα ότι $S = \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|$ και $|t_k{}^*| \le M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αφού $t_k{}^* \to 0$ και αφού η $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|$ συγκλίνει ,προκύπτει ότι για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε:

$|t_k{}^*| < \frac{\epsilon}{2S}$ για κάθε $k \ge N$ και $\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k| < \frac{\epsilon}{2M}$.
(Για το δεύτερο: Πρόταση 3β)
Άρα, αν $n \ge 2N$:

$$|a_0t_n{}^* + a_1t_{n-1}{}^* + \ldots + a_{n-1}t_1{}^* + a_nt_0{}^*| \le$$
$$\le |a_0||t_n{}^*| + |a_1||t_{n-1}{}^*| + \ldots + |a_{n-N}||t_N{}^*| + |a_{n-N+1}||t_{N-1}{}^*| + \ldots$$
$$\ldots + |a_n||t_0{}^*|.$$
$$\le \frac{\epsilon}{2S}(|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-N}|) + M(|a_{n-N+1}| + \ldots + |a_n|)$$
$$\le \frac{\epsilon}{2S}\sum_{k=0}^{\infty}|a_k| + M\sum_{k=n-N+1}^{\infty}|a_k|$$

Αφού όμως $n - N + 1 \ge N + 1$:
$|a_0t_n{}^* + a_1t_{n-1}{}^* + \ldots + a_nt_0{}^*| \le \frac{\epsilon}{2S}S + M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon$. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα.

Γινόμενο Cauchy της $\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ με τον εαυτό της.

Αν $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει απολύτως και παίρνουμε :
$a_k = x^k$, $b_k = x^k$, $c_k = x^k1 + x^{k-1}x + \ldots + xx^{k-1} + 1x^k = (k+1)x^k$.

Άρα η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$ συγκλίνει απολύτως όταν $|x| < 1$ και $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$.

4.5 Αναδιατάξεις σειρών

Ορισμός 4 Έστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία. Θεωρούμε μια 1-1 και επί απεικόνιση

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \mathbb{N} \ni n \mapsto \sigma(n) \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή οι αριθμοί $\sigma(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) περιλαμβάνουν από μία φορά κάθε φυσικό αριθμό ή, με άλλα λόγια, αποτελούν μια αναδιάταξη των φυσικών αριθμών. Άν θέσουμε $a_n^{'} = a_{\sigma(n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η $\{a_n^{'}\}$ ονομάζεται *αναδιάταξη* της $\{a_n\}$. Επίσης λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{'}$ είναι μια *αναδιάταξη* της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, s'_n = \sum_{k=1}^{n} a'_k$, τότε οι αριθμοί s_n, s'_n δεν είναι ίδιοι. Το s_n περιέχει τους $a_1, a_2 \dots a_n$, ενώ το s'_n περιέχει τους $a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)}$. Επομένως δεν είναι καθόλου βέβαιο και εν γένει δεν ισχύει οτι, αν $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, δηλαδή $s_n \to s$, τότε $s = \sum_{k=1}^{\infty} a'_k$, δηλαδή $s'_n \to s$.

Παράδειγμα.

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ συγκλίνει. Θα φτιάξουμε μια αναδιάταξή της η οποία αποκλίνει, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η σειρά $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ αποκλίνει στο $+\infty$. (Αυτό συνεπάγεται μετά από σύγκριση με την αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.) Επομένως, αν κόψουμε όσους αρχικούς όρους θέλουμε, η «ουρά» $\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+3} + \frac{1}{2N+5} + \dots$ θα αποκλίνει και αυτή στο $+\infty$. Άρα, παίρνοντας αρκετά μεγάλο M, μπορούμε να κάνουμε το $\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+3} + \dots + \frac{1}{2M+1}$ όσο μεγάλο θέλουμε. Φτάχνουμε λοιπόν τη ζητούμενη αναδιάταξη ως εξής:

Παίρνουμε $2N_1 + 1$ αρκετά μεγάλο ώστε: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2N_1+1} > 100$. Μετά παίρνουμε $2N_2 + 1$ αρκετά μεγάλο ώστε: $\frac{1}{2N_1+3} + \dots + \frac{1}{2N_2+1} > 100$. Συνεχίζουμε επαγωγικά. Αν έχουμε βρει το $2N_m + 1$ παίρνουμε $2N_{m+1} + 1$ αρκετά μεγάλο ώστε: $\frac{1}{2N_m+3} + \dots + \frac{1}{2N_{m+1}+1} > 100$.

Εξαντλούμε έτσι όλους τους περιττούς παρονομαστές. Απομένει μονάχα να βάλουμε ενδιάμεσα τους άρτιους:

$1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2N_1+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2N_1+3} + \dots + \frac{1}{2N_2+1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2N_2+3} + \dots + \frac{1}{2N_3+1} - $
$- \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{2m} + \frac{1}{2N_m+3} + \dots + \frac{1}{2N_{m+1}+1} - \frac{1}{2m+2} + \dots$

Η καινούργια σειρά είναι αναδιάταξη της αρχικής σειράς και, προφανώς, αποκλίνει στο ∞.

Η επιτυχία αυτής της κατασκευής έχει ως βαθύτερη αιτία το ότι η αρχική σειρά συγκλίνει αλλά όχι απολύτως. Μάλιστα υπάρχει το εξής αποτέλεσμα του Riemann, το οποίο δεν θα αποδείξουμε, αν και η απόδειξή του περιέχει την ίδια ακριβώς ιδέα που χρησιμοποιούμε στο παράδειγμα.

Θεώρημα 8 (Riemann) *Έστω η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ η οποία συγκλίνει υπό συνθήκη. Αν δοθούν οποιαδήποτε x, y με $x \le y$ (όπου επιτρέπονται τα $\pm\infty$), υπάρχει αναδιάταξη $\sum_{k=0}^{\infty} a'_k$ ώστε:*

$$\liminf s'_k = x, \ \limsup s'_k = y.$$

Από την άλλη μεριά, έχουμε το:

Θεώρημα 9 *Έστω ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως και $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. Τότε οποιαδήποτε αναδιάταξη $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ συγκλίνει επίσης απολύτως και $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = s$.*

Απόδειξη.

Έστω ότι $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = S$. Αν $S'_n = \sum_{k=1}^{n} |a'_k|$, τότε $S'_n \le S$, αφού οι όροι $|a'_1|, \ldots, |a'_n|$, δηλαδή οι όροι $|a_{\sigma(1)}|, \ldots, |a_{\sigma(n)}|$, είναι ορισμένοι μόνον από τους $|a_1|, |a_2|, \ldots$. Άρα η $\{S'_n\}$ είναι άνω φραγμένη, επομένως η $\sum_{k=1}^{\infty} |a'_k|$ συγκλίνει.

Μένει να δούμε αν $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = s$. Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως και επειδή $s_n \to s$, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ και: $n > N \Rightarrow |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Θα συγκρίνουμε τώρα τα s_n, s'_n για μεγάλα n.

Διαλέγουμε M αρκετά μεγάλο ώστε οι δείκτες $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(M)$, να περιλαμβάνουν τους $1, 2, ..., N$. Τότε, αν $n \ge \max(N, M)$, στο $s_n - s'_n$ δεν περιλαμβάνονται οι όροι $a_1, a_2, ..., a_N$. Άρα: $|s_n - s'_n| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$. Οπότε $|s'_n - s| \le |s'_n - s_n| + |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ για κάθε $n \ge \max(M, N)$. Άρα $s'_n \to s$. Ο.Ε.Δ. (Άσκηση 13)

4.6 Δεκαδική παράσταση πραγματικών αριθμών

Θεωρούμε σειρές της μορφής

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots,$$

οπου $a_0 \in \mathbb{Z}$ και $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ για κάθε $k \ge 1$.

Επειδή η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$ συγκλίνει και επειδή $0 \le \frac{a_k}{10^k} \le \frac{9}{10^k}$ για κάθε $k \ge 1$, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$, σύμφωνα με το θεώρημα σύγκρισης σειρών, συγκλίνει και ορίζει έναν πραγματικό αριθμό $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$.

Λήμμα 2 *Αν $N \ge 1$ και $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$ για κάθε $k \ge N$, τότε $0 \le \sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \le \frac{1}{10^{N-1}}$. Η αριστερή ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν και μόνον αν $a_k = 0$ για όλα τα $k \ge N$ και η δεξιά ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν και μόνον αν $a_k = 9$ για όλα τα $k \ge N$.*

Απόδειξη

1. $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \ge \sum_{k=N}^{\infty} \frac{0}{10^k} = 0$.

Αν $a_k = 0$ για όλα τα $k \ge N$, τότε, προφανώς $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = 0$. Αντιστρόφως, αν $a_m \ge 1$ για κάποιο $m \ge N$, τότε $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \frac{a_m}{10^m} + \sum_{k=N, k\neq m}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \ge \frac{1}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k\neq m}}^{\infty} \frac{0}{10^k} = \frac{1}{10^m} > 0$.

2. $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \le \sum_{k=N}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^N} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right) = \frac{1}{10^{N-1}}$.

Αν $a_k = 9$ για όλα τα $k \ge N$, τότε, προφανώς $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^{N-1}}$. Αντιστρόφως, αν $a_m \le 8$ για κάποιο $m \ge N$, τότε:

$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \frac{a_m}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k\neq m}}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \leq \frac{8}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k\neq m}}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^m} - \frac{1}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k\neq m}}^{\infty} \frac{9}{10^k} = -\frac{1}{10^m} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{9}{10^k} = -\frac{1}{10^m} + \frac{1}{10^{N-1}} < \frac{1}{10^{N-1}}$. Ο.Ε.Δ.

Το επόμενο λήμμα είναι από τη στοιχειώδη αριθμητική:

Λήμμα 3 *Έστω μη αρνητικός ακέραιος* n *και* $N \geq 0$. *Τότε υπάρχουν ακέραιοι* $p_0, p_1, \ldots p_n$ *ώστε:* $p_k \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$ *για* $0 \leq k \leq N-1$, $p_N \geq 0$ *και* $n = p_N 10^N + p_{N-1}10^{N-1} + \ldots + p_1 10 + p_0$.

Απόδειξη
Κάνουμε διαδοχικές διαιρέσεις:

$$\begin{array}{lcll}
n & = & \pi_1 10 + p_0, & 0 \leq p_0 \leq 9 \quad, \pi_1 \geq 0 \\
\pi_1 & = & \pi_2 10 + p_1, & 0 \leq p_1 \leq 9 \quad, \pi_2 \geq 0 \\
\pi_2 & = & \pi_3 10 + p_1, & 0 \leq p_2 \leq 9 \quad, \pi_3 \geq 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
\pi_{N-1} & = & \pi_N 10 + p_{N-1}, & 0 \leq p_{N-1} \leq 9 \quad, \pi_N \geq 0
\end{array}$$

Άρα, επαγωγικά: $n = \pi_1 10 + p_0 = \pi_2 10^2 + p_1 10 + p_0 = \pi_3 10^3 + p_2 10^2 + p_1 10 + p_0 = \ldots = \pi_N 10^N + p_{N-1}10^{N-1} + p_1 10 + p_0$. Θέτουμε $p_N = \pi_N$. Ο.Ε.Δ.

Θεώρημα 10 *(α) Κάθε μη αρνητικός πραγματικός αριθμός* x *μπορεί να γραφτεί, με τουλάχιστον έναν τρόπο, ως σειρά:*

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots,$$

όπου $a_0 \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *και* $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ *για κάθε* $k \geq 1$. *Το γεγονός αυτό το εκφράζουμε: ο* x *έχει την δεκαδική παράσταση* $x = a_0.a_1a_2a_3\ldots$.

(β) Οι αριθμοί της μορφής $x = \frac{m}{10^N}$ $(m \in \mathbb{N},\ N \geq 0)$ *και μόνον αυτοί έχουν ακριβώς δύο δεκαδικές παραστάσεις:*

$$x = a_0.a_1a_2\ldots a_N 9999\ldots = a_0.a_1a_2\ldots a_{N-1}(a_N+1)000\ldots$$

Όλοι οι άλλοι μη-αρνητικοί αριθμοί έχουν μοναδική δεκαδική παράσταση.

Απόδειξη
(α) Έστω $x \geq 0$. Υπάρχει μη αρνητικός ακέραιος a_0, το ακέραιο μέρος του x, ώστε:

$$a_0 \leq x < a_0 + 1.$$

Το διάστημα $[a_0, a_0 + 1)$ το χωρίζουμε σε 10 υποδιαστήματα ίσου μήκους $\frac{1}{10}$. Το x θα βρίσκεται σε ένα από αυτά. Άρα υπάρχει αριθμός $a_1 \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ ώστε:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}.$$

Το καινούργιο αυτό διάστημα έχει μήκος $\frac{1}{10}$ και το χωρίζουμε σε 10 ίσα υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{10^2}$ το καθένα. Το x θα βρίσκεται σε ένα από αυτά, άρα υπάρχει αριθμός $a_2 \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ ώστε:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2}.$$

Συνεχίζουμε επαγωγικά και έχουμε για κάθε $k \geq 1$ αριθμό $a_k \in \{0, 1, ..., 9\}$ ώστε:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k + 1}{10^k}.$$

Επομένως τα μερικά αθροίσματα s_k της σειράς $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ η οποία δημιουργείται, ικανοποιούν την:

$$s_k \leq x < s_k + \frac{1}{10^k} \Rightarrow 0 \leq x - s_k < \frac{1}{10^k}.$$

Άρα $s_k \to x$, δηλαδή $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$.

(β) Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι ένας αριθμός x έχει δύο *τουλάχιστον* διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις. Δηλαδή:

$$x = a_0.a_1a_2\ldots = b_0.b_1b_2\ldots,$$

όπου $a_0, b_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_k, b_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ για κάθε $k \geq 1$, και $a_m \neq b_m$ για τουλάχιστον ένα $m \geq 0$.

Βαφτίζουμε $N \geq 0$ τον ελάχιστο m για τον οποίο ισχύει $a_m \neq b_m$. Δηλαδή $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_1 = b_1, ..., a_{N-1} = b_{N-1}$, $a_N \neq b_N$ και ας υποθέσουμε , χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $a_N < b_N$. Τότε από την σχέση $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}$ συνεπάγεται ότι
$\frac{1}{10^N} \leq \frac{b_N - a_N}{10^N} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} - \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k} \leq \frac{1}{10^N} - 0 = \frac{1}{10^N}$,
σύμφωνα με το Λήμμα 2.

Άρα όλες οι ανισότητες ισχύουν ως ισότητες κι έτσι:

$$b_N - a_N = 1, \ \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \frac{1}{10^N}, \ \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k} = 0.$$

Άρα, σύμφωνα με το Λήμμα 2:

$$\begin{aligned} b_N &= a_N + 1, \\ a_k &= 9, \text{ για } k \geq N+1, \\ b_k &= 0, \text{ για } k \geq N+1. \end{aligned}$$

Άρα, αν ο x έχει περισσότερες από μία δεκαδικές παραστάσεις, τότε έχει *ακριβώς δύο* παραστάσεις και αυτές είναι:

$$x = a_0.a_1a_2\ldots a_N999\ldots = a_0.a_1a_2\ldots a_{N-1}(a_N+1)\ 00\ldots$$

Ένας τέτοιος αριθμός είναι, προφανώς, της μορφής: $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_{N-1}}{10^{N-1}} + \frac{a_N+1}{10^N} = \frac{10^N a_0 + 10^{N-1}a_1 + \ldots + 10a_{N-1} + a_N + 1}{10^N} = \frac{m}{10^N}$, όπου $m \in \mathbb{N}$ και $N \geq 0$.

Αντιστρόφως, αν $x = \frac{m}{10^N}$, όπου $m \in \mathbb{N}$ και $N \geq 0$, το Λήμμα 3 δίνει:

$$m = p_N 10^N + p_{N-1}10^{N-1} + \ldots + p_1 10 + p_0,$$

όπου $p_N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $p_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ για $0 \leq k \leq N-1$.

Αν ο p_m είναι ο πρώτος μη-μηδενικός αριθμός στην ακολουθία $p_0, p_1, \ldots, p_{N-1}, p_N$, τότε $x = \frac{p_N 10^N + \ldots + p_m 10^m}{10^N} = p_N + \frac{p_{N-1}}{10} + \ldots + \frac{p_m}{10^{N-m}}$ $= p_N.p_{N-1}\ldots p_m000\ldots = p_N.p_{N-1}\ldots(p_m-1)\ 99\ldots.$ Ο.Ε.Δ.

4.7 Ασκήσεις

Εύκολες

1. Εξετάστε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$, αν a_k είναι :

   (α) $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

   (β) $\sqrt{1+k^2} - k$

   (γ) $\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$

   (δ) $(\sqrt[k]{k} - 1)^k$

   (ε) $\frac{1}{1+x^k}$

   (στ) $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

   Στην (ε) βρείτε για ποιές τιμές του x η σειρά συγκλίνει και στις (α), (στ) βρείτε το άθροισμα της σειράς.

   (Υπόδειξη: στις (α), (β), (γ), (στ) συγκρίνατε με σειρές της μορφής $\sum \frac{1}{k^p}$, στη (δ) εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας, στην (ε) δείτε πότε $a_k \to 0$

και συγκρίνατε με μια γεωμετρική σειρά. Επίσης παρατηρήστε ότι οι (α), (στ) είναι τηλεσκοπικές).

2. Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \log k (\log \log k)^p}$, ανάλογα με την τιμή του $p \in \mathbb{R}$.

3. Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου *και* ρίζας στις ακόλουθες σειρές:

   (α) $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k$

   (β) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

   (γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

   (δ) $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 x^k$

   (ε) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$

   (στ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$

   (ζ) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} x^k$

   Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να αποφασίσετε τη σύγκλιση ή απόκλιση των σειρών για τις τιμές του x για τις οποίες τα δύο κριτήρια δεν δίνουν απάντηση;

4. Εξετάστε τη σύγκλιση ή απόκλιση των σειρών

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \dots$$

   εφαρμόζοντας τα κριτήρια λόγου και ρίζας.

5. Τι μπορείτε να πείτε για τη σύγκλιση ή απόκλιση των σειρών:

   (α) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\log k}{k}$

   (β) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^a}$ $(a \in \mathbb{R})$;

Μέτριες

6. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

   (α) $\sum_{k=2}^{\infty} (\log k)^p$

   (β) $\sum_{k=1}^{\infty} p^k k^p$ $(0 < p)$

(γ) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p - k^q}$ $(0 < q < p)$

(δ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$

(ε) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k}$ $(0 < q < p)$

(στ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log(1+\frac{1}{k})}$

(ζ) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$

(η) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\log \log k)^{\log \log k}}$

(ϑ) $\sum_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$

(ι) $\sum_{k=1}^{\infty} k^p \left(\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} + \sqrt{k-1} \right)$

Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι p, q, βρείτε τις τιμές τους για τις οποίες συγκλίνουν οι αντίστοιχες σειρές.

7. Έστω ακολουθία $\{a_k\}$ η οποία φθίνει προς το 0. Αποδείξτε ότι, αν $s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$, τότε $0 < (-1)^n (s - s_n) < a_{n+1}$.

8. Έστω ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε οι $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$ συγκλίνουν επίσης.

   (Υπόδειξη: Θεώρημα σύγκρισης.)

9. Έστω ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε αποδείξτε ότι συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$. Αποδείξτε ότι, αν η $\{a_k\}$ είναι και φθίνουσα, τότε αληθεύει και το αντίστροφο.

   (Υπόδειξη: $xy \le \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.)

10. Έστω ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε αποδείξτε ότι συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$.

    (Υπόδειξη: $xy \le \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.)

11. Έστω ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

    (α) Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ αποκλίνει.
    (Υπόδειξη: Θεώρημα σύγκρισης)

    (β) Αποδείξτε ότι για $1 \le m < n$: $\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \ldots + \frac{a_n}{s_n} \ge 1 - \frac{s_m}{s_n}$. (Υπόδειξη: η $\{s_n\}$ είναι αύξουσα) και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ αποκλίνει. (Υπόδειξη: κριτήριο Cauchy και $s_n \to +\infty$.)

(γ) Αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ (Υπόδειξη: $a_n = s_n - s_{n-1}$) και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

12. Έστω $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Ορίζουμε $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$.

    (α) Αποδείξτε ότι για $1 \leq m < n$: $\frac{a_m}{r_m} + \ldots + \frac{a_n}{r_n} \geq 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ αποκλίνει.
    (Υπόδειξη: κριτήριο Cauchy και $r_k \to 0$.)

    (β) Αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

Δύσκολες

13. Έστω η συγκλίνουσα σειρά $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$. Θεωρούμε την αναδιάταξη $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$. Αποδείξτε ότι η δεύτερη σειρά συγκλίνει επίσης αλλά σε διαφορετικό όριο από την πρώτη.
    (Υπόδειξη: για να αποδειχθεί ότι η δεύτερη σειρά συγκλίνει , θεωρήστε τα μερικά αθροίσματα s_n και αποδείξτε ότι η $\{s_{3n}\}$ συγκλίνει και ότι $s_{3n} - s_{3n+1} \to 0$, $s_{3n} - s_{3n+2} \to 0$.
    Αν $t = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$, αποδείξτε ότι $t < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.
    Αν $s = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$, αποδείξτε ότι $s > 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.)

14. Αποδείξτε ότι $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, όπου έχουμε ορίσει $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$.
    (Υπόδειξη: Αν $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ και $t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ τότε:
    $t_n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$.
    Άρα $t_n \leq s_n$ και, επομένως, $\limsup t_n \leq \limsup s_n = e$.
    Ακόμη, αν $k \leq n$, τότε: $t_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\ldots(1 - \frac{k-1}{n})$, οπότε $\liminf t_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} = s_k$ για κάθε k. Άρα $\liminf t_n \geq \lim s_k = e$.)

15. Έστω η ακολουθία $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ των φυσικών αριθμών οι οποίοι δεν περιέχουν το ψηφίο 0 στη δεκαδική τους παράσταση. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ συγκλίνει σε αριθμό μικρότερο από 90. (Υπόδειξη: βρείτε

πόσοι όροι της $\{n_k\}$ βρίσκονται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 10.)

16. Αν $\{a_n\}$ είναι ακολουθία θετικών αριθμών αποδείξτε ότι:
$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Συμπεράνατε ότι όταν το κριτήριο λόγου δείχνει σύγκλιση σειράς , το ίδιο συμβαίνει και με το κριτήριο ρίζας και όταν το κριτήριο ρίζας δεν δείχνει τίποτα το ίδιο συμβαίνει και με το κριτήριο λόγου.
(Υπόδειξη: Έστω $x > \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n} < x$ για κάθε $n \geq N$. Άρα όταν $n \geq N$: $\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_{N+1}}{a_N}\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}} < x^{n-N}$. Οπότε $\sqrt[n]{a_n} < x x^{-\frac{N}{n}} \sqrt[n]{a_N}$ και, επομένως, $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq x$.)

Κεφάλαιο 5

Ακολουθίες Συναρτήσεων

5.1 Κατά σημείο σύγκλιση

Έστω συνάρτηση f και ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, όπου όλες οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο A και παίρνουν πραγματικές τιμές: $f : A \mapsto \mathbb{R}$, $f_n : A \mapsto \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνήθως το A είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ή του $\mathbb{R}^n$ ή ενός μετρικού χώρου.

Ορισμός 1 *Λέμε ότι η* $\{f_n\}$ *συγκλίνει κατά σημείο στην* f *στο σύνολο* A *και συμβολίζουμε* $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ *στο* A, *αν για κάθε* $t \in A$ *η ακολουθία αριθμών* $\{f_n(t)\}$ *συγκλίνει στον αριθμό* $f(t)$, *δηλαδή*

$$f_n(t) \to f(t) \text{ για κάθε } t \in A.$$

Ή αλλιώς: $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A, αν για κάθε $t \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon, t) \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Παραδείγματα

1. Έστω $A \neq \emptyset$ και $f : A \mapsto \mathbb{R}$. Αν θεωρήσουμε $f_n(t) = f(t) + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $f_n : A \mapsto \mathbb{R}$ και $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A, αφού για κάθε $t \in A$ ισχύει ότι $f_n(t) \to f(t)$.

2. Αν $f_n : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ με $f_n(t) = \frac{t}{1+nt}$, τότε: για $t = 0$ ισχύει ότι $f_n(0) = 0 \to 0$ και για $t > 0$ ισχύει ότι $f_n(t) = \frac{t}{1+nt} \to 0$. Άρα $f_n(t) \to 0$ για κάθε $t \in [0, \infty)$, οπότε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} \mathbf{0}$ στο $[0, \infty)$. Όταν γράφουμε $\mathbf{0}$ εννοούμε την *μηδενική συνάρτηση* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(t) = 0$ για κάθε $t \in [0, +\infty)$.

3. $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+nt}, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \\ \frac{n}{2}t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Αν $t = 0$, τότε $f_n(0) = 0 \to 0$.

Αν $0 < t \leq 1$ τότε, όταν το n γίνει αρκετά μεγάλο και συγκεκριμένα όταν $n \geq \frac{1}{t}$ ισχύει ότι $f_n(t) = \frac{1}{1+nt} \to 0$. Άρα $f_n(t) \to 0$ για κάθε $t \in [0,1]$. Δηλαδή $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} \mathbf{0}$ στο [0,1].

4. $f_n : (0,1] \mapsto \mathbb{R}$ με $f_n(t) = \frac{1}{1+nt}$.

Αν $0 < t \leq 1$, τότε $f_n(t) \to 0$. Άρα $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} \mathbf{0}$ στο (0,1].

5. $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ με $f_n(t) = \frac{1}{n}t$. Τότε $f_n(t) \to 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} \mathbf{0}$ στο $\mathbb{R}$.

6. $f_n : (1,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ με $f_n(t) = \frac{t}{t+n}$. Τότε $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} \mathbf{0}$ στο $(1,\infty)$.

7. $f_n : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ με $f_n(t) = \frac{n}{t+n^2}$. Πάλι $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} \mathbf{0}$ στο $[0,\infty)$.

8. $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ με $f_n(t) = t^n$.

Αν $t = 1$, τότε $f_n(1) = 1 \to 1$.

Αν $0 \leq t < 1$, τότε $f_n(t) = t^n \to 0$. Άρα $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} f$ στο $[0,1]$, όπου η f ορίζεται από τον τύπο:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

9. $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ με $f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)t-1}, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \\ n^2 t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$

Αν $t = 0$, τότε $f_n(0) = 0 \to 0$.

Αν $0 < t \leq 1$, τότε για αρκετά μεγάλο n ισχύει ότι $\frac{1}{n} \leq t$, οπότε $f_n(t) = \frac{1}{(n+1)t-1} \to 0$. Άρα $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} \mathbf{0}$ στο $[0,1]$.

10. $f_n : [0,2\pi] \mapsto \mathbb{R}$ με $f_n(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$.

Για κάθε $t \in [0,2\pi]$ ισχύει ότι $|f_n(t)| \leq \frac{1}{n} \to 0$. Άρα $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} \mathbf{0}$ στο $[0,2\pi]$.

11. $f_n : [0,2\pi] \mapsto \mathbb{R}$ με $f_n(t) = \cos(nt)$. Αν $t = \pi$, τότε $\cos(n\pi) = (-1)^n$ οπότε η $\{f_n(\pi)\}$ δε συγκλίνει. Άρα η f_n δε συγκλίνει κατά σημείο σε καμιά συνάρτηση στο [0,2π].

Πρόταση 1 *Αν $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} f$ στο A και $g_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} g$ στο A, τότε $\lambda f_n + \mu g_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} \lambda f + \mu g$ στο A ($\mu,\lambda \in \mathbb{R}$) και $f_n g_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} fg$ στο A.*

Απόδειξη

Έστω οποιοδήποτε $t \in A$. Τότε $(\lambda f_n + \mu g_n)(t) = \lambda f_n(t) + \mu g_n(t) \to \lambda f(t) + \mu g(t) = (\lambda f + \mu g)(t)$ και $(f_n g_n)(t) = (f_n(t) g_n(t) \to f(t)g(t) = (fg)(t)$, λόγω γνωστών ιδιοτήτων των ακολουθιών αριθμών. Ο.Ε.Δ.

Οι παρακάτω ερωτήσεις είναι *πολύ σημαντικές* για την μαθηματική ανάλυση.

Ερώτηση 1

Αν $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} f$ στο A και κάθε f_n είναι συνεχής στο A, ισχύει ότι η f είναι συνεχής στο A ;

Απάντηση

Όχι πάντοτε. Βλέπε παράδειγμα 8.

Ερώτηση 2

Αν $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} f$ στο A και κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο A, ισχύει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο A και ότι $f_n' \overset{\kappa.\sigma.}{\to} f'$;

Απάντηση

Όχι πάντοτε. Βλέπε παραδείγματα:

2. $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} \mathbf{0}$ στο $[0,\infty)$. Η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{0}$ είναι παραγωγίσιμη. Αλλά $f_n'(t) = \frac{1}{(1+nt)^2}$ και για $t=0$ ισχύει ότι $f_n'(0) = 1 \to 1$, ενώ για $t > 0$ ισχύει ότι $f_n'(t) \to 0$. Δηλαδή $f_n' \overset{\kappa.\sigma}{\not\to} \mathbf{0'} = \mathbf{0}$ στο $[0,\infty)$.

8. Εδώ κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη, αλλά η f δεν είναι.

10. Εδώ $f_n' = \cos(nt)$, αλλά η f_n' δεν συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση, όπως δείχνει το παράδειγμα 11.

Ερώτηση 3

Αν $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} f$ στο $[a,b]$ και κάθε f_n είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, ισχύει ότι η f είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$;

Απάντηση

Όχι πάντοτε. Στο παράδειγμα 9: $\int_0^1 f_n = \frac{1}{2} + 2\frac{\log n}{n+1} \to \frac{1}{2}$. Αλλά $\int_0^1 f = \int_0^1 \mathbf{0} = 0$.

Αυτή η αδυναμία καταφατικής απάντησης στα προηγούμενα τρία ερωτήματα λύνεται σε μεγάλο βαθμό, αν ορίσουμε ένα δεύτερο είδος σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων.

5.2 Ομοιόμορφη σύγκλιση

Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο A και δύο συναρτήσεις $f : A \mapsto \mathbb{R}$, $g : A \mapsto \mathbb{R}$. Ορίζουμε την έκφραση:

$$\rho(f,g) = \sup_{t\in A} |f(t) - g(t)|$$

Δηλαδή για κάθε $t \in A$ βρίσκουμε την απόσταση των αριθμών $f(t), g(t)$ και μετά βρίσκουμε το supremum αυτών των αποστάσεων καθώς το t διατρέχει το κοινό πεδίο ορισμού A. Το σύνολο αυτών των αποστάσεων είναι προφανώς μη κενό, αφού υπάρχει τουλάχιστον ένα t στο A ($A \neq \emptyset$). Αν το σύνολο αυτό είναι και άνω φραγμένο, τότε το $\rho(f,g)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός (και μάλιστα μη-αρνητικός, αφού όλες οι αποστάσεις είναι μη-αρνητικές). Αν όμως το σύνολο των αποστάσεων αυτών δεν είναι άνω φραγμένο, τότε $\rho(f,g) = +\infty$.

Παραδείγματα

1. $f, g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ με $f(t) = t,\ g(t) = t^2$.
Τότε $|f(t) - g(t)| = |t - t^2| = t - t^2$, οπότε $\rho(f,g) = \sup_{t\in[0,1]}(t - t^2) = \frac{1}{4}$.

2. $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ με $f(t) = \frac{t^2}{1+t^2},\ g(t) = 0$.
Τότε $|f(t) - g(t)| = \frac{t^2}{1+t^2}$, οπότε $\rho(f,g) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{t^2}{1+t^2} = 1$.

3. $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ με $f(t) = t,\ g(t) = 1$.
Τότε $|f(t) - g(t)| = |t - 1|$, οπότε $\rho(f,g) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |t - 1| = +\infty$.

Ορισμός 2 Έστω ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ με $f_n : A \mapsto \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f : A \mapsto \mathbb{R}$. Λέμε ότι η $\{f_n\}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο A* και συμβολίζουμε $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ *στο A*, αν

$$\rho(f_n, f) \to 0,$$

δηλαδή

$$\sup_{t\in A} |f_n(t) - f(t)| \to 0.$$

Ή αλλιώς: $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{t\in A} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon,$$

δηλαδή

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon \text{ για κάθε } t \in A.$$

Προσέξτε τη διαφορά του ορισμού αυτού από τον ορισμό της κατά σημείο σύγκλισης:

Αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0, *το οποίο εξαρτάται απο το* ε, και μας δίνει ότι: $|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$ *και για όλα τα*

$t \in A$. Ενώ αν $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $t \in A$ υπάρχει n_0, το οποίο εξαρτάται από το ε *και από το* t, και μας δίνει $|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$.

Στην ομοιόμορφη σύγκλιση η επιλογή του n_0 εξαρτάται από το ε αλλά είναι «ομοιόμορφη» ως προς το $t \in A$. Υπάρχει *ένα* n_0 για *όλα* τα $t \in A$. Ενώ στην κατά σημείο σύγκλιση διαφορετικά t καθορίζουν (ίσως) διαφορετικά n_0 (για το ίδιο $\varepsilon > 0$).

Ας κοιτάξουμε το παράδειγμα 4:
$f_n(t) = \frac{1}{1+nt}$, $f_n : (0,1] \mapsto \mathbb{R}$, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} \mathbf{0}$ στο $(0,1]$.

Ας πάρουμε οποιοδήποτε $t \in (0,1]$. Τότε: $|f_n(t) - 0| \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{t}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$. Δηλαδή το κατάλληλο n_0 είναι το $n_0 = \left[\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right] = n_0(t,\varepsilon)$. Παρατηρούμε ότι όσο το t είναι κοντύτερα στο 0, τόσο το n_0 μεγαλώνει και μάλιστα $n_0(t,\varepsilon) \to +\infty$ καθώς $t \to 0^+$. Άρα *δεν* υπάρχει *ένα* n_0 το οποίο να δίνει $|f_n(t) - 0| \leq \varepsilon$ για όλα τα t στο $(0,1]$ και για όλα τα $n \geq n_0$. Άρα η σύγκλιση είναι κατά σημείον αλλά όχι ομοιόμορφη στο $(0,1]$.

Ας κατανοήσουμε τι σημαίνει «γεωμετρικά» μια ανισότητα της μορφής $\rho(f,g) \leq \varepsilon$. Ας υποθέσουμε ότι το A είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$, οπότε οι f, g έχουν γραφήματα στο $\mathbb{R}^2$.

$\rho(f,g) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \sup_{t\in A} |f(t) - g(t)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow g(t) - \varepsilon \leq f(t) \leq g(t) + \varepsilon$ για κάθε $t \in A$.

Επομένως το γράφημα της f βρίσκεται ολόκληρο ανάμεσα στο γράφημα της $g+\varepsilon$ και στο γράφημα της $g-\varepsilon$, δηλαδή μέσα στη ζώνη που δημιουργείται γύρω από το γράφημα της g και έχει κατακόρυφο πλάτος 2ε. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, από έναν δείκτη και πέρα, τα γραφήματα όλων των f_n βρίσκονται *ολόκληρα* μέσα στη ζώνη κατακόρυφου πλάτους 2ε γύρω από το γράφημα της f.

Ξαναγυρνάμε στο παράδειγμα 4: $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} \mathbf{0}$ στο $(0,1]$. Για μικρό $\varepsilon > 0$ τα γραφήματα των f_n έχουν όλα κάποιο κομμάτι τους *έξω* από τη ζώνη γύρω από το γράφημα της $\mathbf{0}$ κατακόρυφου πλάτους 2ε . Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} \mathbf{0}$ στο $(0,1]$. (Άσκηση 1).

Πάντως ισχύει η :

Πρόταση 2 *Αν* $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ *στο* A, *τότε* $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ *στο* A. *Δηλαδή η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο σύγκλιση.*

Απόδειξη

Έστω οποιοδήποτε $t \in A$ και $\varepsilon > 0$. Διαλέγουμε n_0 ώστε: $n \geq n_0 \Rightarrow \rho(f_n, f) \leq \varepsilon$. Όμως $|f_n(t) - f(t)| \leq \rho(f_n, f)$. Άρα: $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$. Δηλαδή ισχύει ότι $f_n(t) \to f(t)$. Ο.Ε.Δ.

Μετά από αυτή την πρόταση μπορούμε πιο εύκολα να βρούμε την (άγνωστη) συνάρτηση προς την οποία συγκλίνει ομοιόμορφα μια δοσμένη ακολουθία $\{f_n\}$. Πρώτα βρίσκουμε f ώστε $f_n \overset{\kappa.\sigma.}{\to} f$. Αυτό είναι εύκολο, διότι για κάθε t έχουμε να κάνουμε με ακολουθία *αριθμών* $\{f_n(t)\}$. Βρίσκουμε το όριό της, το ονομάζουμε $f(t)$ και μετά μένει να εξετάσουμε αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$.

Ας ξαναεξετάσουμε τα παραδείγματά μας:

1. $\rho(f_n, f) = \sup_{t\in A} |f_n(t) - f(t)| = \frac{1}{n} \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} \mathbf{0}$ στο A.

2. $\rho(f_n, \mathbf{0}) = \sup_{0\le t<\infty} \frac{t}{1+nt} = \frac{1}{n} \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} \mathbf{0}$ στο $[0, \infty)$.

3. $\rho(f_n, \mathbf{0}) = \sup_{0\le t\le 1} |f_n(t)| = \frac{1}{2}$. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} \mathbf{0}$ στο $[0, 1]$.

4. $\rho(f_n, \mathbf{0}) = \sup_{0<t\le 1} \frac{1}{1+nt} = 1$. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} \mathbf{0}$ στο $(0, 1]$.

5. $\rho(f_n, \mathbf{0}) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n}t\right| = +\infty$. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} \mathbf{0}$ στο $\mathbb{R}$.

6. $\rho(f_n, \mathbf{0}) = \sup_{1<t<\infty} \frac{t}{t+n} = 1$. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} \mathbf{0}$ στο $(1, \infty)$.

7. $\rho(f_n, \mathbf{0}) = \sup_{0\le t<\infty} \frac{n}{t+n^2} = \frac{1}{n}$. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} \mathbf{0}$ στο $[0, \infty)$.

8. $\rho(f_n, f) = \sup_{0\le t\le 1} |t^n - f(t)| = \sup_{0\le t<1} t^n = 1$. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} f$ στο $[0, 1]$.

9. $\rho(f_n, \mathbf{0}) = \sup_{0\le t\le 1} |f_n(t)| = n$. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} \mathbf{0}$ στο $[0, 1]$.

10. $\rho(f_n, \mathbf{0}) = \sup_{0\le t\le 2\pi} \left|\frac{1}{n}\sin(nt)\right| = \frac{1}{n}$. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} \mathbf{0}$ στο $[0, 2\pi)$.

11. η $\{f_n\}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σε καμία συνάρτηση λόγω της Πρότασης 2. (Ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12).

Ορισμός 3 Μία ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ με $f_n : A \mapsto \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ονομάζεται *ομοιόμορφα φραγμένη στο* A, αν υπάρχει M το οποίο είναι κοινό φράγμα για όλες τις f_n. Δηλαδή

$$|f_n(t)| \le M \text{ για κάθε } t \in A \text{ και για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Πρόταση 3 *(α) Αν* $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$, $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} g$ *στο* A, *τότε* $\lambda f_n + \mu g_n \overset{\text{ομ}}{\to} \lambda f + \mu g$ *στο* A $(\mu, \lambda \in \mathbb{R})$.

(β) Αν, επιπλέον, οι $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ *είναι και ομοιόμορφα φραγμένες, τότε* $f_n g_n \overset{\text{ομ}}{\to} fg$ *στο* A.

Απόδειξη

(α) Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0$ ισχύουν $|f_n(t) - f(t)| \le \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}$, $|g_n(t) - g(t)| \le \frac{\varepsilon}{2|\mu|}$ για κάθε $t \in A$.

Τότε για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει: $|(\lambda f_n(t) + \mu g_n(t)) - (\lambda f(t) + \mu g(t))| \le |\lambda||f_n(t) - f(t)| + |\mu||g_n(t) - g(t)| \le |\lambda|\frac{\varepsilon}{2|\lambda|} + |\mu|\frac{\varepsilon}{2|\mu|} = \varepsilon$ για κάθε $t \in A$.

(β) Υπάρχει M ώστε $|f_n(t)| \leq M$ και $|g_n(t)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $t \in A$. Παρατηρούμε ότι, αφού $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A κι έτσι, για κάθε $t \in A$ ισχύει $f_n(t) \to f(t)$. Άρα $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in A$. (Δηλαδή το κοινό φράγμα όλων των f_n είναι και φράγμα της συνάρτησης-όριο f).

Έστω οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$. Διαλέγουμε $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε για $n \geq n_0$ ισχύουν $|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$, $|g_n(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ για κάθε $t \in A$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει: $|f_n(t)g_n(t) - f(t)g(t)| \leq |f_n(t)g_n(t) - f(t)g_n(t)| + |f(t)g_n(t) - f(t)g(t)| = |f_n(t) - f(t)||g_n(t)| + |f(t)||g_n(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}M + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$ για κάθε $t \in A$. Ο.Ε.Δ.
(Άσκ. 11).

Τώρα θα δούμε ότι με την ομοιόμορφη σύγκλιση έχουμε πιο ικανοποιητικές απαντήσεις στα τρία ερωτήματα της σελίδας 75 απ΄ ότι με την κατά σημείο σύγκλιση.

Θεώρημα 1 *Έστω υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X, τ), $f_n : A \mapsto \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $f : A \mapsto \mathbb{R}$ και $t_0 \in A$. Αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A και κάθε f_n είναι συνεχής στο t_0, τότε και η f είναι συνεχής στο t_0. Άρα αν κάθε f_n είναι συνεχής στο A, τότε και η f είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$. Η ιδέα είναι να βρούμε πρώτα μια f_n η οποία είναι «ομοιόμορφα κοντά» στην f και μετά να χρησιμοποιήσουμε τη συνέχεια της f_n στο t_0.

Αφού $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, υπάρχει n_0 ώστε $\rho(f_{n_0}, f) < \frac{\varepsilon}{3}$. Επειδή η f_{n_0} είναι συνεχής στο t_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: $t \in A$, $\tau(t, t_0) < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Άρα: $t \in A$, $\tau(t, t_0) < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| + |f_{n_0}(t_0) - f(t_0)| \leq \rho(f_{n_0}, f) + |f_{n_0}(t) - f_{n_0}(t_0)| + \rho(f_{n_0}, f) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Ο.Ε.Δ.

Εφαρμογή

Στο παράδειγμα 8, χωρίς υπολογισμό της $\rho(f_n, f)$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} f$ στο $[0,1]$, αφού κάθε f_n είναι συνεχής στο $[0,1]$ αλλά η f δεν είναι συνεχής στο $[0,1]$. (Ασκήσεις 1, 2, 9, 10).

Θεώρημα 2 *Έστω ότι κάθε $f_n : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$. Τότε η f είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.*

Απόδειξη

Για κάθε $t \in [a,b]$ ισχύει ότι $|f_n(t) - f(t)| \leq \rho(f_n, f)$ και επομένως $f_n(t) - \rho(f_n, f) \leq f(t) \leq f_n(t) + \rho(f_n, f)$. Άρα

$$\otimes \qquad \int_a^b (f_n - \rho(f_n, f)) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \int_a^b (f_n + \rho(f_n, f)).$$

$$\text{Συνεπάγεται ότι } 0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq 2(b-a)\rho(f_n, f) \to 0.$$

Άρα $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, οπότε η f είναι R-ολοκληρώσιμη.

Επομένως η $\otimes$ συνεπάγεται $\int_a^b f_n - (b-a)\rho(f_n, f) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b f_n + (b-a)\rho(f_n, f)$. Άρα $\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| \leq (b-a)\rho(f_n, f) \to 0.$ Ο.Ε.Δ.

Εφαρμογή

Στο παράδειγμα 9 είδαμε ότι $\int_0^1 f_n = \frac{1}{2} + 2\frac{\log n}{n+1} \to \frac{1}{2}$, αλλά $\int_0^1 f = 0$. Άρα δεν ισχύει ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[0,1]$. (Άσκηση 4).

Όπως φαίνεται από τα παραδείγματα 10, 11 δεν μπορούμε να περιμένουμε ανάλογο θεώρημα για παραγώγους. Δηλαδή η $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, δεν συνεπάγεται πάντοτε ότι $f_n' \overset{\text{ομ}}{\to} f'$ στο A.

Υπάρχει, όμως, κάτι λίγο πιο πολύπλοκο και στην αντίθετη κατεύθυνση.

Θεώρημα 3 *Έστω $f_n : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. Έστω ότι κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και η παράγωγός της f_n' είναι συνεχής στο $[a,b]$. Αν:*

(α) $f_n' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο $[a,b]$ και

(β) η $\{f_n(t_0)\}$ συγκλίνει για τουλάχιστον ένα $t_0 \in [a,b]$,

τότε η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια f στο $[a,b]$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $f' = g$.

Απόδειξη

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, $f_n(t) = f_n(t_0) + \int_{t_0}^t f_n'$. Από το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται $\int_{t_0}^t f_n' \to \int_{t_0}^t g$. Άρα

$$f_n(t) \to \sigma + \int_{t_0}^t g,$$

όπου με σ παριστάνουμε το όριο της $\{f_n(t_0)\}$.

Η $\sigma + \int_{t_0}^{t} g$ είναι μία συνάρτηση του t την οποία αποκαλούμε $f(t)$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε ότι $f'(t) = g(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$. Μένει να δείξουμε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
|f_n(t) - f(t)| &= \left|(f_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} f_n') - (\sigma + \int_{t_0}^{t} g)\right| \\
&\leq |f_n(t_0) - \sigma| + \left|\int_{t_0}^{t} (f_n' - g)\right| \\
&\leq |f_n(t_0) - \sigma| + |t - t_0|\rho(f_n', g) \\
&\leq |f_n(t_0) - \sigma| + |b - a|\rho(f_n', g) \text{ για κάθε } t \in [a,b].
\end{aligned}$$

Άρα $\rho(f_n, f) \leq |f_n(t_0) - \sigma| + (b-a)\rho(f_n', g) \to 0$. Ο.Ε.Δ.

Παρατηρήσεις

Στο Θεώρημα 3:

1. Υποθέτουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της $\{f_n'\}$και συμπεραίνουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της $\{f_n\}$.

2. Για την $\{f_n\}$ *αρκεί* να υποθέσουμε την κατά σημείο σύγκλιση σε *ένα μόνο* σημείο t_0.

3. Η συνέχεια των παραγώγων f_n' είναι «αφύσικη» ως υπόθεση. Το Θεώρημα ισχύει και χωρίς αυτή την υπόθεση· η απόδειξη όμως είναι διαφορετική και λίγο πιο δύσκολη. (Ασκ. 5, 6).

Θεώρημα 4 (Κριτήριο Cauchy) *Έστω $f_n : A \mapsto \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο A αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: $n, m \geq n_0 \Rightarrow \rho(f_n, f_m) \leq \varepsilon$, δηλαδή $|f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon$ για κάθε $t \in A$.*

Απόδειξη

(α) Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A και οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $t \in A$. Άρα $n, m \geq n_0 \Rightarrow |f_n(t) - f_m(t)| \leq |f_n(t) - f(t)| + |f_m t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ για κάθε $t \in A$.

(β) Το αντίστροφο. *Σταθεροποιούμε* $t \in A$. Η υπόθεση συνεπάγεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε: $n, m \geq n_0 \Rightarrow |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon$. Άρα η ακολουθία $\{f_n(t)\}$ είναι Cauchy. Άρα συγκλίνει σε κάποιον αριθμό, ο οποίος εξαρτάται από το t. Σε κάθε $t \in A$ αντιστοιχίζουμε το όριο της $\{f_n(t)\}$, το οποίο ονομάζουμε $f(t)$. Άρα $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ στο A.

Η υπόθεση είναι ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: $n, m \geq n_0 \Rightarrow |f_n(t) - f_m(t)|$ για κάθε $t \in A$. Αφήνουμε το $m \to +\infty$ και έχουμε: $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$ για κάθε $t \in A$. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A. Ο.Ε.Δ. (Άσκηση 7).

5.3 Ο μετρικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων

Ο συμβολισμός $\rho(f,g)$ μας φέρνει στο μυαλό τις λέξεις: «μετρική» και «απόσταση». Σ' αυτήν την παράγραφο θα επιβεβαιώσουμε την υποψία αυτή και θα δικαιολογήσουμε τον συμβολισμό.

Έστω μετρικός χώρος (X,τ) και *συμπαγές* υποσύνολο A του X. Κατ' αρχήν μπορούμε να σκεφτόμαστε τον $\mathbb{R}$ ως παράδειγμα μετρικού χώρου και ένα κλειστό φραγμένο διάστημα $[a,b]$ ως παράδειγμα συμπαγούς υποσυνόλου A. Θεωρούμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο $\mathbb{R}$ οι οποίες είναι συνεχείς στο A. Το σύνολο αυτό συμβολίζουμε $C(A)$:

$$C(A) = \{f \mid f : A \to \mathbb{R} \text{ και } f \text{ συνεχής στο } A\}.$$

Αν $f, g \in C(A)$ τότε και η $f-g$ καθώς και η $|f-g|$ ανήκουν στο $C(A)$. Αφού, λοιπόν, η $|f-g|$ είναι συνάρτηση συνεχής σε συμπαγές σύνολο A, είναι φραγμένη και έχει μέγιστη τιμή:

$$\rho(f,g) = \sup_{t\in A}|f(t)-g(t)| = \max_{t\in A}|f(t)-g(t)| < +\infty.$$

Θα δούμε, τώρα, ότι η συνάρτηση $\rho : C(A)\times C(A) \to \mathbb{R}$ έχει τις τέσσερις ιδιότητες μιας μετρικής και άρα ο $(C(A),\rho)$ είναι μετρικός χώρος.

1. Προφανώς, ισχύει $\rho(f,g) \geq 0$ για κάθε $f,g \in C(A)$.

2. Αν $f=g$ τότε, προφανώς, $\rho(f,g) = \max_{t\in A}|f(t)-g(t)| = 0$. Αντιστρόφως, αν $\rho(f,g)=0$, δηλαδή $\max_{t\in A}|f(t)-g(t)| = 0$, τότε $|f(t)-g(t)| = 0$ για κάθε $t\in A$, δηλαδή $f(t)=g(t)$ για κάθε $t \in A$. Άρα $f=g$.

3. $\rho(f,g) = \max_{t\in A}|f(t)-g(t)| = \max_{t\in A}|g(t)-f(t)| = \rho(g,f)$.

4. Έστω οποιοδήποτε $t\in A$. Τότε $|f(t)-g(t)| \leq |f(t)-h(t)| + |h(t)-g(t)| \leq \rho(f,h)+\rho(h,g)$. Άρα $\rho(f,g) \leq \rho(f,h)+\rho(h,g)$.

Δεν θα ενδιαφερθούμε να περιγράψουμε τα ανοικτά υποσύνολα και τα κλειστά υποσύνολα αυτού του μετρικού χώρου, αν και τα συμπαγή υποσύνολά του είναι *ιδιαίτερα σημαντικά* για την μαθηματική ανάλυση και τις εφαρμογές της. Μερικές όμως παρατηρήσεις:

1. $f_n \to f$ στο μετρικό χώρο $(C(A),\rho)$ σημαίνει $\rho(f_n,f)\to 0$ και αυτό σημαίνει, εξ ορισμού, ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A.

Γι' αυτό ο μετρικός χώρος $(C(A),\rho)$ ονομάζεται και *μετρικός χώρος της ομοιόμορφης σύγκλισης στο A*, η δε μετρική ρ ονομάζεται *μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης στο A* και *ομοιόμορφη απόσταση συναρτήσεων στο A*.

2. $N_g(\varepsilon) = \{f\in C(A) | \rho(f,g) < \varepsilon\}$. Τη γεωμετρική σημασία της $N_g(\varepsilon)$, στην περίπτωση κατα την οποία $A\subset\mathbb{R}$, την αναλύσαμε στη σελίδα 78.

5.4 Ασκήσεις

Εύκολες

1. Έστω $f_n(t) = \frac{1}{1+nt}$, $t \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείον, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση f στο $[0,1]$. Ποιά είναι η f;

2. Έστω $f_n(t) = \frac{t^{2n}}{1+t^{2n}}$, $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$. Ποιά είναι η f;
(Υπόδειξη: περιπτώσεις $|t| > 1$, $|t| < 1$, $|t| = 1$.)

3. Έστω $f_n(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{n+1} \text{ ή } \frac{1}{n} < t \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{t}\right), & \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n} \end{cases}$. Αποδείξτε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f συνεχή στο $\mathbb{R}$. Ισχύει ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $\mathbb{R}$;

4. Έστω $f_n(t) = n^p t(1-t^2)^n$, $t \in [0,1]$, με p παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p \in \mathbb{R}$ η $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείον σε κάποια f στο $[0,1]$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Για ποιές τιμές του p ισχύει ότι $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$;
(Υπόδειξη: $n^p\alpha^n \to 0$ για $0 \leq \alpha < 1$, $p > 0$).

Μέτριες

5. Έστω $f_n(t) = \frac{t}{1+nt^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει f ώστε $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f_n'(t) \to f'(t)$ αν $t \neq 0$, αλλά $f_n'(0) \not\to f'(0)$.

6. Έστω $f_n(t) = \frac{1}{n}e^{-n^2t^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} \mathbf{0}$ στο $\mathbb{R}$ και $f_n' \xrightarrow{\text{κ.σ}} \mathbf{0}$ στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι σε κάθε διάστημα θετικού μήκους το οποίο περιέχει το 0 η f_n' *δεν* συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση, ενώ σε κάθε διάστημα *κλειστό* το οποίο *δεν* περιέχει το 0 η f_n' συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση.

7. Αν $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A και μια τουλάχιστον f_n είναι φραγμένη στο A, τότε η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A.
(Υπόδειξη: κριτήριο Cauchy, $\varepsilon = 1$.)

8. Έστω $f, f_n : A \mapsto [a,b]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο A. Έστω $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι $gof_n \xrightarrow{\text{ομ}} gof$ στο A.
(Υπόδειξη: η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$).

9. Έστω (X,τ) μετρικός χώρος, $A \subset X$, $f, f_n : A \mapsto \mathbb{R}$ συνεχείς στο A για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\longrightarrow} f$ στο A. Έστω ότι η $\{x_n\}$ περιέχεται στο A, $x_0 \in A$ και $x_n \to x_0$. Αποδείξτε ότι: $f_n(x_n) \to f(x_0)$.
(Υπόδειξη: $|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)|$).

Δύσκολες

10. Έστω μετρικός χώρος (X,τ), $A \subset X$, $f, f_n : A \mapsto \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \stackrel{\text{ομ}}{\longrightarrow} f$ στο A. Έστω t_0 σημείο συσσώρευσης του A και $lim_{t \to t_0} f_n(t) = x_n \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

    α. η $\{x_n\}$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ και

    β. $lim_{t \to t_0} f(t) = lim_{n \to \infty} x_n$. Δηλαδή: $lim_{t \to t_0} lim_{n \to \infty} f_n(t) = lim_{n \to \infty} lim_{t \to t_0} f_n(t)$.

11. Βρείτε ακολουθίες $\{f_n\}, \{g_n\}$ ορισμένες σε σύνολο A, οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα, αλλά η $\{f_n g_n\}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

12. Έστω $f_n(t) = t^n$ στο $[0, 1]$ και $g : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0, 1]$ με $g(1) = 0$. Αποδείξτε ότι η $\{g f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

Κεφάλαιο 6

Το θεώρημα Weierstrass

6.1

Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε ένα μόνο θεώρημα.

Θεώρημα 1 (Weierstrass) *Αν η $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο P ώστε*

$$|f(t) - P(t)| \leq \varepsilon \text{ για κάθε } t \in [a, b].$$

Παρατήρηση

Με τον συμβολισμό του προηγούμενου κεφαλαίου: $\rho(f, P) \leq \varepsilon$. Παίρνοντας διαδοχικά $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ και τα αντίστοιχα πολυώνυμα $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ έχουμε: $\rho(f, P_n) \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$. Άρα, μια ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος είναι:

Θεώρημα 1 (Weierstrass) *Αν η $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $\{P_n\}$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[a, b]$.*

Υπάρχουν πολλές αποδείξεις αυτού του θεωρήματος. Η απόδειξη που θα παρουσιαστεί εδώ είναι του Serge Bernstein.

Ο μετασχηματισμός: $t = t(x) = (b - a)x + a$ είναι αμφιμονοσήμαντος και μετατρέπει το x-διάστημα $[0, 1]$ στο t-διάστημα $[a, b]$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός: $x = x(t) = \frac{t}{b-a} - \frac{a}{b-a}$ μετατρέπει, φυσικά, το t-διάστημα $[a, b]$ στο x-διάστημα $[0, 1]$.

Οι μετασχηματισμοί αυτοί μας επιτρέπουν να μετατρέπουμε συναρτήσεις ορισμένες στο $[0,1]$ σε συναρτήσεις ορισμένες στο $[a,b]$ και αντιστρόφως.

Αν η συνάρτηση $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε η συνάρτηση $g:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ που ορίζεται με τον τύπο

$$g(x)=f(t(x))=f((b-a)x+a)$$

είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Αν το $P(t)$ είναι πολυώνυμο του t, τότε το $Q(x)$ που ορίζεται με τον τύπο: $Q(x)=P(t(x))=P((b-a)x+a)$ είναι πολυώνυμο του x και μάλιστα ίδιου βαθμού.

Για παράδειγμα: αν $P(t)=2t^3+3t-4$, τότε $Q(x)=2((b-a)x+a)^3+3((b-a)x+a)-4=2(b-a)^3x^3+6a(b-a)^2x^2+(6(b-a)a^2+3(b-a))x+(2a^3+3a-4)$.

Αν αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση του διαστήματος $[0,1]$, τότε, αν έχουμε f συνεχή στο $[a,b]$, βρίσκουμε την $g(x)=f(t)$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$. Κατόπιν βρίσκουμε πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο ώστε:

$$|g(x)-Q(x)|\le\varepsilon \text{ για κάθε } x\in[0,1].$$

Μετά βρίσκουμε το πολυώνυμο $P(t)=Q(x)$ το οποίο, προφανώς, ικανοποιεί την:

$$|f(t)-P(t)|=|g(x)-Q(x)|\le\varepsilon \text{ για κάθε } t\in[a,b].$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση $a=0, b=1$.

Λήμμα 1 *(α)* $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$,
(β) $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx$,
(γ) $\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(n^2-n)x^2+nx$.

Απόδειξη

Χρησιμοποιούμε τον διωνυμικό τύπο

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^ks^{n-k}=(t+s)^n$$

(α) Θέτουμε $t=x,\ s=1-x$.

(β) Παραγωγίζουμε τον διωνυμικό τύπο ως προς t, πολλαπλασιάζουμε την ισότητα που προκύπτει με t και θέτουμε $t=x,\ s=1-x$.

(γ) Παραγωγίζουμε δεύτερη φορά ως προς t, πολλαπλασιάζουμε με t και θέτουμε $t=x,\ s=1-x$. Ο.Ε.Δ.

Απόδειξη του θεωρήματος για $a=0,\ b=1$.

Έστω $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$. Θεωρούμε το πολυώνυμο:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Θα δείξουμε ότι, για $\varepsilon > 0$ δεδομένο, αν πάρουμε το $n = n(\varepsilon)$ αρκετά μεγάλο, το B_n είναι το ζητούμενο P, δηλαδή:

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ για κάθε } x \in [0,1].$$

Λόγω του Λήμματος 1(α):

$$f(x) = f(x)\cdot 1 = f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(x)x^k(1-x)^{n-k}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη:

$$B_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right\}x^k(1-x)^{n-k}$$

Κρατάμε σταθερό το n και το $x \in [0,1]$ και αφήνουμε τον ακέραιο k να παίρνει τις τιμές $0, 1, 2, \cdots, n$. Τότε ο λόγος $\frac{k}{n}$ παίρνει τις τιμές $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1$.

Για κάποιες τιμές του k ο λόγος $\frac{k}{n}$ περιέχεται στο διάστημα $[x - \frac{1}{\sqrt[4]{n}}, x + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}]$, δηλαδή $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ και για τις υπόλοιπες τιμές του k ο λόγος $\frac{k}{n}$ είναι εκτός του διαστήματος, δηλαδή $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

Χωρίζουμε, λοιπόν, το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n}$ σε δύο αθροίσματα: $\sum'$, $\sum''$. Στο $\sum'$ αθροίζουμε μόνο τους όρους οι οποίοι αντιστοιχούν στα k τα οποία ικανοποιούν την $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ και στο $\sum''$ αθροίζουμε τους υπόλοιπους όρους, δηλαδή αυτούς οι οποίοι αντιστοιχούν στα k τα οποία ικανοποιούν την $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

Συμβολίζουμε

$$\varepsilon_n = \max_{|x-y| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n}}} |f(x) - f(y)|.$$

Τότε για τα k του πρώτου αθροίσματος $\sum'$ ισχύει ότι $\left|f(\frac{k}{n}) - f(x)\right| \leq \varepsilon_n$. Άρα:

$$\left|\sum{}'\binom{n}{k}\left\{f(\frac{k}{n}) - f(x)\right\}x^k(1-x)^{n-k}\right|$$

$$\leq \sum{}'\binom{n}{k}\left|f(\frac{k}{n}) - f(x)\right|x^k(1-x)^{n-k} \leq$$

$$\varepsilon_n \sum{}' \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leq \varepsilon_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \varepsilon_n \quad (\text{Λήμμα } 1(\alpha)).$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, έχει κάποιο άνω φράγμα Μ. Άρα $\left|f(\frac{k}{n}) - f(x)\right| \leq \left|f(\frac{k}{n})\right| + |f(x)| \leq 2M$.

Έχουμε λοιπόν:

$$\left|\sum{}'' \binom{n}{k} \left\{f(\frac{k}{n}) - f(x)\right\} x^k(1-x)^{n-k}\right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum{}'' \binom{n}{k} 2Mx^k(1-x)^{n-k} \\
&= 2M \sum{}'' \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= 2M \sum{}'' \frac{(\frac{k}{n}-x)^2}{(\frac{k}{n}-x)^2} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leq 2M \sum{}'' \frac{(\frac{k}{n}-x)^2}{(\frac{1}{\sqrt[4]{n}})^2} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= 2M\sqrt{n} \sum{}''(\frac{k}{n}-x)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leq 2M\sqrt{n} \sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n}-x)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= 2M\sqrt{n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} - 2\frac{k}{n}x + x^2\right) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= 2M\sqrt{n} \left\{ \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \right. \\
&\quad \left. -\frac{2x}{n} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \right\} \\
&= 2M\sqrt{n} \left\{ \frac{1}{n^2} \left((n^2-n)x^2 + nx\right) - \frac{2x}{n} nx + x^2 \right\} \\
&= \frac{2Mx(1-x)}{\sqrt{n}} \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Έχουμε, λοιπόν, μέχρι τώρα ότι:

$$|B_n(x) - f(x)| = \left|\sum{}' + \sum{}''\right| \leq \left|\sum{}'\right| + \left|\sum{}''\right| \leq \varepsilon_n + \frac{2M}{\sqrt{n}}.$$

Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ αν $|x-y| \leq \delta$. Διαλέγουμε n ώστε: $\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \leq \delta$ και $\frac{2M}{\sqrt{n}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε με αυτό το n έχουμε $\varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Άρα $|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n + \frac{2M}{\sqrt{n}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα
$f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0,1]$ και $\varepsilon = 0.0001 = \frac{1}{10000} = 10^{-4}$.

Βρίσκουμε πρώτα το δ ώστε: $0 < x - y \leq \delta \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Παίρνουμε $x = y + \delta$ και έχουμε $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\delta}{\sqrt{y+\delta}+\sqrt{y}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta}$. Άρα, αν $\sqrt{\delta} = \frac{\varepsilon}{2}$, δηλαδή $\delta = \frac{\varepsilon^2}{4}$, τότε έχουμε το ζητούμενο δ: $\delta = \frac{1}{4} \cdot 10^{-8}$.

Το M είναι προφανώς $= 1$. Άρα θέλουμε $\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \leq \frac{1}{4} \cdot 10^{-8}$ και $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}10^{-4}$, δηλαδή: $n \geq 4^4 \cdot 10^{32}$. Με $n = 4^4 10^{32}$ έχουμε το ζητούμενο πολυώνυμο:

$$\sum_{k=0}^{4^4 10^{32}} \binom{4^4 10^{32}}{k} x^k (1-x)^{4^4 10^{32} - k} \sqrt{\frac{k}{4^4 10^{32}}}.$$

Αυτό είναι πολυώνυμο βαθμού $4^4 10^{32}$.

6.2 Ασκήσεις

Εύκολες

1. (α′) Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ ώστε $||x| - P(x)| \leq \frac{1}{1000}$ για κάθε x με $-100 \leq x \leq 100$. Βρείτε ένα τέτοιο πολυώνυμο.

   (β′) Επίσης υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ με $Q(0) = 0$ και $|\sin x - Q(x)| \leq \frac{1}{100}$ για κάθε x με $-100 \leq x \leq 100$.

Μέτριες

2. Έστω συνεχής $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\int_0^1 t^n f(t)dt = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Αποδείξτε ότι $f \equiv 0$. (Υπόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$.

Υπάρχει πολυώνυμο $P(t)$ ώστε $|f(t) - P(t)| \leq \varepsilon$ για κάθε $t \in [0,1]$. Τότε:

$$\int_0^1 f^2(t)dt = \underbrace{\int_0^1 f(t)P(t)dt}_{=0} + \int_0^1 f(t)\{f(t) - P(t)\}dt$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^1 |f(t)||f(t) - P(t)|dt \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 |f(t)|dt. \end{aligned}$$

Άρα $\int_0^1 f^2(t)dt = 0$)

3. Έστω $f : [1, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ συνεχής στο $[1, +\infty)$ ώστε το $\lim_{x\to\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συνάρτηση της μορφής $Q(x) =$ πολυώνυμο του $\frac{1}{x}$ ώστε $|f(x) - Q(x)| \leq \varepsilon$ για κάθε $x \geq 1$.

4. Έστω $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0, +\infty)$ ώστε το $\lim_{x\to\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συνάρτηση της μορφής $Q(x) =$ πολυώνυμο του e^{-x} ώστε $|f(x) - Q(x)| \leq \varepsilon$ για κάθε $x \geq 0$.

Κεφάλαιο 7

Σειρές Συναρτήσεων

7.1 Γενικά

Ορισμός 1 Έστω η ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $\{f_n\}$ ορισμένων σε μη κενό σύνολο A, $f_n : A \mapsto \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το άθροισμα s_n των αρχικών n από αυτές:

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n : A \mapsto \mathbb{R},$$

δηλαδή $s_n(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t)$ για κάθε $t \in A$.

Αν υπάρχει συνάρτηση $s : A \mapsto \mathbb{R}$ ώστε $s_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} s$ στο A, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *συγκλίνει κατά σημείο στην* s *στο* A και γράφουμε: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ *στο* A.

Αν, όμως, $s_n \overset{\text{ομ}}{\to} s$ στο A, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην* s *στο* A και γράφουμε: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\text{ομ}}{=} s$ *στο* A. (Άσκηση 6)

Επομένως η σύγκλιση σειρών συναρτήσεων ανάγεται σε σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων.

Παράδειγμα

Η γνωστή μας γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} t^k$.

Εδώ $f_k(t) = t^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Γνωρίζουμε ότι στο διάστημα $(-1, 1)$ η σειρά συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $s(t) = \frac{1}{1-t}$. Δηλαδή: $\sum_{k=0}^{\infty} t^k \overset{\text{κ.σ.}}{=} \frac{1}{1-t}$ στο $(-1, 1)$. Ας δούμε αν η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη στο $(-1, 1)$.

Για $t \in (-1, 1)$: $s_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$, $s_n(t) - s(t) = -\frac{t^{n+1}}{1-t}$.

Αν $s_n \overset{\text{ομ}}{\to} s$ στο $(-1, 1)$, θα πρέπει για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε $\frac{|t|^{n+1}}{|1-t|} = |s_n(t) - s(t)| \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε t με $-1 < t < 1$.

Αυτό όμως είναι αδύνατο, διότι για οποιοδήποτε n έχουμε $\lim_{t\to 1^-} \frac{|t|^{n+1}}{|1-t|} = +\infty$.

Πρόταση 1 *Αν $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο A.*

Απόδειξη

Άμεση από την Πρόταση 2, Κεφ. 5 για την $\{s_n\}$. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 2 *Αν $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\text{ομ}}{=} s$, $\sum_{k=1}^{\infty} g_k \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A, τότε*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda f_k + \mu g_k) \overset{\text{ομ}}{=} \lambda s + \mu t \text{ στο } A$$

$(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$. Το ίδιο ισχύει για την κατά σημείο σύγκλιση.

Απόδειξη

Άμεση από τις Προτάσεις 1 και 3(α), Κεφ 5. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 3 (Κριτήριο Cauchy) *Η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A (σε κάποια συνάρτηση) αν και μόνον αν ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε:*

$$n_0 \le m < n \Rightarrow |f_{m+1}(t) + \cdots + f_n(t)| \le \varepsilon \text{ για κάθε } t \in A.$$

Απόδειξη

Άμεση από το Θεώρημα 4, Κεφ. 5 εφαρμοσμένο στην ακολουθία $\{s_n\}$. Ο.Ε.Δ.

Θεώρημα 1 (Κριτήριο Weierstrass) *Έστω ότι $\sup_{t\in A} |f_n(t)| \le M_n$ (Δηλ. το M_n είναι άνω φράγμα της $|f_n|$) και ότι η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει. Τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A. (Άσκ. 3,7,9,13)*

Απόδειξη

Για κάθε $t \in A$ ισχύει ότι $|f_n(t)| \le M_n$, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα σύγκρισης σειρών πραγματικών αριθμών, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ συγκλίνει σε κάποιον αριθμό τον οποίο ονομάζουμε $s(t)$. Δηλαδή $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο A. Τώρα:

$$|s(t) - s_n(t)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) - \sum_{k=1}^{n} f_k(t) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t) \right|$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(t)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \text{ για κάθε } t \in A.$$

Άρα $\sup_{t\in A}|s(t) - s_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \longrightarrow 0$ όταν $n \to \infty$. Άρα $s_n \overset{\text{ομ}}{\to} s$ στο A και, επομένως $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k^2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Εδώ $f_k(t) = \frac{\sin(kt)}{k^2}$. Άρα $|f_k(t)| \leq \frac{1}{k^2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επειδή η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η σειρά μας συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. (Ασκ. 3,7,9,13).

Θεώρημα 2 *Έστω μετρικός χώρος (X, τ) και $A \subset X$. Ακόμη έστω $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A. Αν όλες οι f_n είναι συνεχείς στο A, τότε και η s είναι συνεχής στο A. Πιο γενικά, αν όλες οι f_n είναι συνεχείς σε κάποιο $t_0 \in A$, τότε και η s είναι συνεχής στο t_0.*

Απόδειξη

Άμεση από το Θεώρημα 1, Κεφ. 5, για την $\{s_n\}$. Ο.Ε.Δ.

(Ασκ. 8,10,15)

Θεώρημα 3 *Έστω ότι $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο $[a, b]$ και ότι όλες οι f_n είναι R-ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε η s είναι επίσης R-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_k\right)$. Δηλαδή $\int_a^b (\sum_{k=1}^{\infty} f_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\int_a^b f_k)$.*

Απόδειξη

Άμεση από το Θεώρημα 2, Κεφ. 5, για την $\{s_n\}$. Ο.Ε.Δ.

(Άσκ. 16)

Θεώρημα 4 *Έστω $f_k : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και f_k' συνεχής στο $[a, b]$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν:*

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k' \overset{\text{ομ}}{=} g$ στο $[a, b]$ και

(β) η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t_0)$ συγκλίνει για τουλάχιστον ένα $t_0 \in [a, b]$,

τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση s στο $[a, b]$, η s είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $s' = g$. Δηλαδή $(\sum_{k=1}^{\infty} f_k)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'$.

Απόδειξη

Άμεση από το Θεώρημα 3, Κεφ. 5, για την $\{s_n\}$. Ο.Ε.Δ.

Οι παρατηρήσεις στο Θεώρημα 3, Κεφ. 5, ισχύουν και εδώ.

7.2 Δυναμοσειρές

Τώρα θα εξετάσουμε μια πολυ σημαντική κατηγορία σειρών συναρτήσεων, τις λεγόμενες *δυναμοσειρές*.

Ορισμός 2 Αν $\{a_k\}$ είναι οποιαδήποτε ακολουθία στο $\mathbb{R}$, τη σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ ονομάζουμε *δυναμοσειρά με συντελεστές* a_k.

Το t διατρέχει όλο το $\mathbb{R}$ και το πρώτο πρόβλημα είναι να βρούμε όλα τα t για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει.

Έστω $a = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$. Τότε $0 \leq a \leq +\infty$.

Ορισμός 3 Τον αριθμό $R = \frac{1}{a}$ ονομάζουμε *ακτίνα σύγκλισης* της δυναμοσειράς. Δεχόμαστε ότι $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$ (Άσκηση 4)

Άρα $0 \leq R \leq +\infty$. Αυτή η ονομασία του R δικαιολογείται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5 *(α) Αν $t \in (-R, R)$ η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο t.*

(β) Αν $t \notin [-R, R]$ η δυναμοσειρά αποκλίνει στο t.

(γ) Για $t = \pm R$ δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.

(δ) Η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα $[a, b]$ το οποίο περιέχεται στο $(-R, R)$, δηλαδή $-R < a \leq b < R$.

Ορισμός 4 Το διάστημα $(-R, R)$ ονομάζεται *διάστημα σύγκλισης* της δυναμοσειράς.

Απόδειξη

Για τα *(α)*, *(β)* εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας για σύγκλιση σειρών.

(α) Αν $|t| < R$ τότε $\limsup \sqrt[k]{|a_k t^k|} = |t| \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = |t| a = \frac{|t|}{R} < 1$.

(β) Αν $|t| > R$ τότε, ομοίως, $\limsup \sqrt[k]{|a_k t^k|} = \frac{|t|}{R} > 1$.

(γ) Για την $\sum_{k=0}^{\infty} t^k$ υπολογίζουμε $R = 1$. Για $t = \pm 1$ έχουμε τις σειρές $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ οι οποίες δεν συγκλίνουν.

Για την $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)^2}$ υπολογίζουμε $R = 1$. Για $t = \pm 1$ έχουμε τις σειρές $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$ οι οποίες συγκλίνουν.

Για την $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k+1}$ υπολογίζουμε $R = 1$. Για $t = \pm 1$ έχουμε τις σειρές $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ η οποία αποκλίνει, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ η οποία συγκλίνει.

(δ) Αν $t \in [a, b]$ τότε $|t| \leq \max(|a|, |b|) < R$. Ουσιαστικά θα ξανακάνουμε την απόδειξη του κριτηρίου της ρίζας. Διαλέγουμε αριθμό r ώστε $\max(|a|, |b|)$

$< r < R$. Τότε $\frac{1}{r} > \frac{1}{R} = a = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$. Άρα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: $\sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{r}$ για κάθε $k \geq N$. Όμως, τότε για κάθε $k \geq N$: $|a_k t^k| \leq \frac{|t^k|}{r^k} \leq \left(\frac{\max(|a|,|b|)}{r}\right)^k$. Άρα στο διάστημα $[a, b]$ εφαρμόζεται το κριτήριο του Weierstrass, διότι η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\max(|a|,|b|)}{r}\right)^k$ συγκλίνει (αφού $\frac{\max(|a|,|b|)}{r} < 1$). Άρα η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Ο.Ε.Δ.
(Άσκηση 2, 4).

Παρατήρηση
Το θεώρημα λέει ότι μια δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα $[a, b]$ περιέχεται «γνησίως» στο διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Δηλαδή το a μπορεί να είναι όσο κοντά θέλουμε στο $-R$ και το b όσο κοντά θέλουμε στο R.

Αλλά πρέπει να γίνει κατανοητό ότι το a δεν επιτρέπεται «εν γένει» να είναι $-R$ ούτε το b να είναι R, δηλαδή η δυναμοσειρά «εν γένει» δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(-R, R)$. Θυμηθείτε το παράδειγμα της γεωμετρικής σειράς.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι μία δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ συγκλίνει για κάθε t το οποίο ανήκει σε ένα σύνολο A. Το σύνολο A είναι το διάστημα σύγκλισης $(-R, R)$ της δυναμοσειράς στο οποίο μπορεί να έχει προστεθεί ένα από τα ή και τα δύο άκρα $\pm R$:

$$A = (-R, R) \text{ ή } (-R, R] \text{ ή } [-R, R) \text{ ή } [-R, R].$$

Άρα στο A η δυναμοσειρά συγκλίνει κατά σημείο σε μία συνάρτηση $s : A \to \mathbb{R}$. Λέμε τότε ότι η δυναμοσειρά *ορίζει* την συνάρτηση $s : A \to \mathbb{R}$ και ότι η $s : A \to \mathbb{R}$ *ορίζεται* από την δυναμοσειρά. Για παράδειγμα η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} t^k$ ορίζει την $s : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ με τύπο $s(t) = \frac{1}{1-t}$ για κάθε $t \in (-1, 1)$.

Όπως φαίνεται και στο παράδειγμα, είναι δυνατόν η συνάρτηση s να επεκτείνεται και εκτός του συνόλου A. Δηλαδή να υπάρχει συνάρτηση $f : B \to \mathbb{R}$ με $B \supset A$, $B \neq A$ ώστε $f(t) = s(t)$ για κάθε $t \in A$. Πράγματι, στο παράδειγμα η $f : \mathbb{R} \backslash \{1\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(t) = \frac{1}{1-t}$ για κάθε $t \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ είναι επέκταση της s. Όμως προσέξτε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει κατά σημείο στην s, δηλαδή στον περιορισμό της f στο A, και όχι στην f.

Στα επόμενα Πορίσματα 1,2,3 θα εξετάσουμε μερικές σημαντικές ιδιότητες της συνάρτησης s η οποία ορίζεται από μια δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της.

Πόρισμα 1 (*Συνέχεια δυναμοσειρών*) . Έστω $t_0 \in (-R, R)$. Διαλέγουμε οποιοδήποτε διάστημα $[a, b]$ περιέχει το t_0 ως εσωτερικό του σημείο και περιέχεται στο $(-R, R)$.

Τότε οι συναρτήσεις $a_k t^k$ είναι συνεχείς στο t_0 και, επειδή η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$ στη συνάρτηση s, είναι και η s συνεχής στο t_0. *Άρα: η συνάρτηση η οποία ορίζεται από μια δυναμοσειρά είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος σύγκλισης.*

Πόρισμα 2 (*Ολοκλήρωση δυναμοσειρών*) . Έστω $[a, b] \subset (-R, R)$. Οι συναρτήσεις $a_k t^k$ είναι R-ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Αφού η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$ στη συνάρτηση s, είναι και η s R-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει

$$\int_a^b s = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1}).$$

Ειδικότερα, αν $b = s,\ a = 0$, όπου $s \in (-R, R)$, τότε:

$$\int_0^s \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} s^{k+1}.$$

Πόρισμα 3 (*Παραγώγιση δυναμοσειρών*) . Αν θεωρήσουμε τις παραγώγους $(a_k t^k)' = k a_k t^{k-1}$, η σειρά τους έχει ακτίνα σύγκλισης

$$R' = \frac{1}{\limsup \sqrt[k-1]{|k a_k|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[k-1]{k} \cdot \limsup \sqrt[k-1]{|a_k|}} = R.$$

Άρα η δυναμοσειρά των παραγώγων, $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1}$, έχει το ίδιο διάστημα σύγκλισης $(-R, R)$ με την αρχική δυναμοσειρά. Έστω τώρα $t_0 \in (-R, R)$. Διαλέγουμε πάλι οποιοδήποτε διάστημα $[a, b]$ περιέχει το t_0 ως εσωτερικό του σημείο και περιέχεται στο $(-R, R)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5 η δυναμοσειρά των παραγώγων συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση g στο $[a, b]$ και η αρχική δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση s (την οποία ορίζει) στο $[a, b]$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 4, η s είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $s'(t) = g(t)$ για κάθε $t \in [a, b]$. Ειδικότερα: $s'(t_0) = g(t_0)$. $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right)'_{t=t_0} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k {t_0}^{k-1}$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι *η συνάρτηση η οποία ορίζεται από μια δυναμοσειρά είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του διαστήματος σύγκλισης και η παράγωγός της ισούται με την συνάρτηση η οποία ορίζεται από την δυναμοσειρά των παραγώγων.* Δηλαδή, μια δυναμοσειρά μπορεί να παραγωγισθεί «κατά όρους» σε οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος σύγκλισής της.

Πολλές φορές οι δυναμοσειρές εμφανίζονται στην μορφή

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-t_0)^k \ (t_0 \in \mathbb{R}).$$

Τότε αλλάζουμε μεταβλητή $T = t - t_0$ και η δυναμοσειρά γράφεται $\sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$. Σύνφωνα με το Θεώρημα 5 υπάρχει R ώστε η $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k$ συγκλίνει για κάθε $T \in (-R, R)$. Άρα η $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t-t_0)^k$ συγκλίνει για κάθε $t \in (t_0 - R, t_0 + R)$. Το $(t_0 - R, t_0 + R)$ είναι, επομένως, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς αυτής.

Δηλαδή έχουμε απλή μετατόπιση κέντρου από το 0 στο t_0 και ίδια ακτίνα σύγκλισης. Είναι εύκολο, τώρα, να δει κανείς τι μορφή θα πάρουν το Θεώρημα 5 και τα Πορίσματα του για δυναμοσειρές $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(t-t_0)^k$. (Άσκηση 5)

Παραδείγματα

1. *Η γεωμετρική σειρά*

$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}$ για κάθε $t \in (-1, 1)$. Παραγωγίζοντας σύμφωνα με το Πόρισμα 3: $\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)t^k$ για κάθε $t \in (-1, 1)$. (Τον ίδιο τύπο τον αποδείξαμε χρησιμοποιώντας το γινόμενο-Cauchy σειρών). Επαναλαμβάνουμε την παραγώγιση όσες φορές θέλουμε, διατηρώντας το ίδιο κάθε φορά διάστημα σύγκλισης:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{(1-t)^3} &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)t^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)t^k \\
&\vdots \\
\frac{n!}{(1-t)^{n+1}} &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)t^{k-n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+n)(k+n-1)\cdots(k+1)t^k
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας τη γεωμετρική σειρά σύμφωνα με το Πόρισμα 2: $\int_0^t \frac{1}{1-s} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1}$ για κάθε $t \in (-1, 1)$. Δηλαδή: $\log\left(\frac{1}{1-t}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$ για κάθε $t \in (-1, 1)$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$, η οποία ονομάζεται *λογαριθμική σειρά*, έχει ως διάστημα σύγκλισης το $(-1, 1)$ και συγκλίνει κατά σημείο στο διάστημα αυτό στην συνάρτηση $\log\left(\frac{1}{1-t}\right) = -\log(1-t)$.

2.*Η εκθετική σειρά*

Στον Απειροστικό Λογισμό γνωρίσαμε την εκθετική συνάρτηση e^t και τις ιδιότητές της. Ειδικότερα, αν $f(t) = e^t$ τότε:

$$f(0) = e^0 = 1, f(1) = e^1 = e = \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$$

(δες άσκ. 14, Κεφ. 4) και $f(t+s) = f(t)f(s)$, $t, s \in \mathbb{R}$. Επίσης γνωρίσαμε τη σειρά Taylor της e^t, δηλαδή αποδείξαμε ότι $e^t = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!})$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επίσης είδαμε ότι $f'(t) = (e^t)' = e^t = f(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Εδώ θα ακολουθήσουμε την αντίστροφη πορεία: θα ξεκινήσουμε από την σειρά Taylor και θα φτιάξουμε την εκθετική συνάρτηση.

Θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k$. (*εκθετική σειρά*).

Η ακτίνα σύγκλισής της είναι $+\infty$, αφού $\limsup\sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = 0$ (Αν αυτό το όριο φαίνεται περίπλοκο, τότε ας χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο λόγου: $\left|\frac{t^{k+1}/(k+1)!}{t^k/k!}\right| = \frac{|t|}{k+1} \longrightarrow 0$ καθώς $k \to \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$ συγκλίνει για κάθε $t \in \mathbb{R}$, οπότε το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty, +\infty)$. Άρα $R = +\infty$, οπότε $0 = \frac{1}{R} = \limsup\sqrt[k]{\frac{1}{k!}}$).

Άρα, σύμφωνα με τα Πορίσματα 1,3, η συνάρτηση $E(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}t^k$ ($t \in \mathbb{R}$) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$E'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{k!}t^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}t^k = E(t).$$

Επί πλέον, σύμφωνα με το Θεώρημα 5, η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 7, Κεφ. 4 (γινόμενο-Cauchy) έχουμε

$$E(s)E(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\frac{s^{n-k}}{(n-k)!}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}t^k s^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k s^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(t+s)^n = E(t+s). \end{aligned}$$

Άρα $E(s)E(t) = E(s+t)$ για κάθε $s, t \in \mathbb{R}$.

Δεύτερος τρόπος απόδειξης αυτής της ισότητας είναι ο εξής. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = E(s_1 - t)E(t)$. Τότε $f'(t) = -E'(s_1 - t)E(t) + E(s_1 - t)E'(t) = -E(s_1 - t)E(t) + E(s_1 - t)E(t) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$. Οπότε $E(s_1 - t)E(t) = f(t) = f(0) = E(s_1)E(0) = E(s_1)$. Τέλος, θέτουμε $s_1 = s + t$.

Επιπλέον: $E(0) = 1, E(1) = e$. Προφανώς, αν $t \geq 0$, τότε $E(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots \geq 1 > 0$. Επειδή $E(-t)E(t) = E(-t+t) = E(0) = 1$, συνεπάγεται ότι $E(t) > 0$ για κάθε $t < 0$. Άρα $E(t) > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Από $E'(t) = E(t) > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ προκύπτει ότι η E είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Ακόμη, αν $t > 0$, τότε $E(t) \geq 1 + \frac{t}{1!} = 1 + t$. Άρα $\lim_{t\to+\infty} E(t) = +\infty$. Από την $E(-t)E(t) = 1$ προκύπτει αμέσως ότι $\lim_{t\to-\infty} E(t) = 0$. Επιπλέον, αν $t > 0$, τότε $E(t) \geq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$. Άρα $0 < \frac{t^n}{E(t)} \leq \frac{(n+1)!}{t}$ για κάθε $t > 0$ και επομένως $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^n}{E(t)} = 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

Ανακεφαλαιώνοντας, η E έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $E' = E$,

(β) $E(0) = 1, E(1) = e$,

(γ) $E(t+s) = E(t)E(s)$ για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$,

(δ) είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και θετική,

(ε) $\lim_{t\to+\infty} E(t) = +\infty, \lim_{t\to-\infty} E(t) = 0, \lim_{t\to+\infty} \frac{t^n}{E(t)} = 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

Άρα η E έχει ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες τις οποίες έχει και η e^t. Μένει να αποδείξουμε ότι είναι η *ίδια συνάρτηση*. Θα έχουμε έτσι ένα δεύτερο τρόπο προσέγγισης της εκθετικής συνάρτησης. Ο μεν πρώτος τρόπος, δηλαδή αυτός που περιγράφεται στον Απειροστικό Λογισμό είναι *οπωσδήποτε* ο πιο φυσιολογικός, γιατί «φτιάχνει» την εκθετική συνάρτηση αρχίζοντας από τα «στοιχειώδη». Ενώ ο δεύτερος χρειάζεται γνώση των ιδιοτήτων των δυναμοσειρών. Με τον πρώτο τρόπο η απόδειξη της ιδιότητας $e^{t+s} = e^t e^s$ είναι άμεση, ενώ με τον δεύτερο τρόπο η απόδειξη της $E(t+s) = E(t)E(s)$ περνάει είτε μέσα από το «δύσκολο» θεώρημα για το γινόμενο-Cauchy σειρών είτε μέσα από τις ιδιότητες παραγωγισιμότητας των δυναμοσειρών. Από την άλλη μεριά η $E' = E$ αποδείχτηκε εύκολα, ενώ η $(e^t)' = e^t$ έχει περίπλοκη απόδειξη.

Για να αποδείξουμε ότι $e^t \equiv E(t)$ υπάρχουν διάφοροι τρόποι. Ο ένας είναι να δείξουμε ότι $e^t = \lim_{t\to+\infty}(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!})$ όπως κάναμε στον Απειροστικό Λογισμό. Άλλος είναι να χρησιμοποιήσουμε ότι $E' = E$ και $E(0) = 1$: $(E(t)e^{-t})' = E'(t)e^{-t} + E(t)(e^{-t})' = E(t)e^{-t} - E(t)e^{-t} = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα $E(t)e^{-t} =$ σταθερά $= E(0)e^{-0} = 1$. Οπότε $E(t) = e^t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Τρίτος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε ότι $E(t+s) = E(t)E(s)$ για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$, ότι η E είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ότι $E(1) = e$.

Τότε με επαγωγή

$$E(n) = \underbrace{E(1)E(1)\cdots E(1)}_{n-\text{φορές}} = e^n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Επίσης $E(0)E(1) = E(0+1) = E(1) \Rightarrow E(0) = 1 = e^0$. Τέλος $E(-n)E(n) = E(-n+n) = E(0) = 1 \Rightarrow E(-n) = \frac{1}{E(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $E(t) = e^t$ για κάθε $t \in \mathbb{Z}$. Αν $t = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $(n > 0,\ m \in \mathbb{Z})$, τότε:

$$(E(t))^n = \underbrace{E(t)\cdots E(t)}_{n-\text{φορές}} = E(nt) = E(m) = e^m \Rightarrow E(t) = e^{\frac{m}{n}} = e^t$$

Δηλαδή $E(t) = e^t$ για κάθε $t \in \mathbb{Q}$. Αν τώρα $t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, παίρνουμε ακολουθία $t_n \in \mathbb{Q}$ ώστε $t_n \to t$. Από την συνέχεια της E:

$$E(t) = \lim_{t_n \to t} E(t_n) = \lim_{t_n \to t} e^{t_n} = e^t$$

3.*Οι τριγωνομετρικές σειρές*

Όπως και με την εκθετική συνάρτηση, θα ξεκινήσουμε από τις σειρές Taylor των $\cos x$, $\sin x$ και θα αποδείξουμε όλες τις σημαντικές ιδιότητες τους.

Έστω οι δυναμοσειρές $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}$, $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Στην πρώτη:

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k)!}, & \text{για } n = 2k \\ 0, & \text{για } n = 2k+1. \end{cases}$$

Ενώ στη δεύτερη:

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & \text{για } n = 2k+1 \\ 0, & \text{για } n = 2k. \end{cases}$$

Και στις δύο περιπτώσεις $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, οπότε και οι δύο έχουν ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$ και διάστημα σύγκλισης το $\mathbb{R}$. (Ή μπορούμε να τις συγκρίνουμε με την εκθετική σειρά). Ορίζουμε, τώρα:

$$c(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!},\ s(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμόζοντας τα Πορίσματα 1,3 έχουμε ότι οι c, s είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι

$$c'(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2k\frac{t^{2k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} = -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$= -s(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$s'(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\frac{t^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!} = c(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Αν ορίσουμε $h(t) = s^2(t) + c^2(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε $h'(t) = 2s(t)s'(t) + 2c(t)c'(t) = 2s(t)c(t) - 2c(t)s(t) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα η h είναι σταθερή και $h(t) = h(0) = s^2(0) + c^2(0) = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δηλαδή $s^2(t) + c^2(t) = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα $|s(t)| \leq 1$ και $|c(t)| \leq 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (*) . Τώρα: $c(0) = 1$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $t > 0$ ώστε $c(t) = 0$. Έστω ότι $c(t) > 0$ για κάθε $t > 0$. Τότε, αφού $s'(t) = c(t) > 0$ για κάθε $t > 0$, η s είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Αφού $s(0) = 0$, έχουμε για οποιοδήποτε $t_0 > 0$ ότι: $s(t) > s(t_0) > 0$ για κάθε $t > t_0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (t_0, t)$ ώστε $c(t) - c(t_0) = c'(\xi)(t - t_0)$. Άρα: $c(t) - c(t_0) = -s(\xi)(t - t_0) < -s(t_0)(t - t_0)$. Οπότε $\lim_{t\to+\infty}(c(t) - c(t_0)) = -\infty$, δηλαδή $\lim_{t\to+\infty} c(t) = -\infty$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο λόγω της (*).

Άρα υπάρχει κάποιο $t > 0$ ώστε $c(t) \leq 0$ οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει κάποιο $t > 0$ ώστε $c(t) = 0$. Επομένως το σύνολο $\{t \geq 0 : c(t) = 0\}$, ως μη κενό και κάτω φραγμένο (περιέχεται στο $[0, +\infty)$), έχει $infimum$, έστω t_0. Τότε υπάρχει ακολουθία $t_n \to t_0$ με $c(t_n) = 0$. Λόγω συνέχειας της c, $c(t_0) = \lim c(t_n) = 0$. Άρα το t_0 είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός-λύση της εξίσωσης $c(t) = 0$. Αυτό το t_0 συμβολίζουμε με $\frac{\pi}{2}$. Άρα $c(t) > 0$ για κάθε t με $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$, $c(\frac{\pi}{2}) = 0$. Η $s' = c$ δίνει ότι η s είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $s(0) = 0, s(\frac{\pi}{2}) = 1$, λόγω της $s^2 + c^2 = 1$. Η $c'(t) = -s(t) < 0$ για κάθε $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$ δίνει ότι η c είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Μπορούμε, επίσης, να αποδείξουμε ότι

$$c(s+t) = c(s)c(t) - s(s)s(t) \ (t, s \in \mathbb{R}),$$

$$s(s+t) = s(s)c(t) + s(t)c(s) \ (t, s \in \mathbb{R})$$

αρκεί να κάνουμε πολλαπλασιασμούς-Cauchy (Όπως, περίπου, κάναμε για την $E(s+t) = E(s)E(t)$). Ο τολμών νικά!!!

Άλλος τρόπος είναι να ορίσουμε την συνάρτηση $f(t) = c(s_1-t)c(t)-s(s_1-t)s(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ και να αποδείξουμε πολύ εύκολα ότι $f'(t) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, οπότε $c(s_1-t)c(t)-s(s_1-t)s(t) = f(0) = c(s_1)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Μετά θέτουμε $s_1 = s+t$ και αποδεικνύουμε την πρώτη ισότητα. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε και την δεύτερη ισότητα.

Από αυτές τις ισότητες παίρνουμε:

$$c(t+\frac{\pi}{2}) = -s(t),\ c(t+\pi) = -c(t),\ c(t+\frac{3\pi}{2}) = s(t),\ c(t+2\pi) = c(t),$$

από τις οποίες διακρίνουμε τη συμπεριφορά της c στα διαστήματα $[\frac{\pi}{2},\pi], [\pi,\frac{3\pi}{2}], [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ και ότι η c είναι περιοδική με περίοδο 2π. Ομοίως για την s.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι οι c, s ταυτίζονται με τις γνωστές τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\cos t, \sin t$ ως εξής.

$[(c(t)-\cos t)^2 + (s(t)-\sin t)^2]' = 2(-s(t)+\sin t)(c(t)-\cos t) + 2(c(t)-\cos t)(s(t)-\sin t) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Άρα $(c(t)-\cos t)^2 + (s(t)-\sin t)^2 =$ σταθερά $= (c(0)-\cos 0)^2 + (s(0)-\sin 0)^2 = 0$.

Άρα $c(t) = \cos t, s(t) = \sin t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. (Ασκ. 1,11,12)

7.3 Ασκήσεις

Εύκολες

1. Αποδείξτε ότι $E' = E$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, ότι $E(s+t) = E(s)E(t)$ για κάθε $s, t \in \mathbb{R}$ και τη συνέχεια των δυναμοσειρών.

2. Έστω δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$, όπου $a_k + Aa_{k-1} + Ba_{k-2} = 0$ για κάθε $k \geq 2$. Αποδείξτε ότι στο διάστημα σύγκλισής της η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{a_0+(a_1+Aa_0)t}{1+At+Bt^2}$ (Υπόδ: αθροίστε τρεις σειρές). Μπορείτε να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της σειράς αυτής; (Υπόδ: $a_k - \rho a_{k-1} = \sigma(a_{k-1} - \rho a_{k-2})$, όπου $\rho + \sigma = -A, \rho\sigma = B$).

3. Έστω ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως. Αποδείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kt)$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

4. Έστω ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ είναι R. Βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των σειρών$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^m t^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{mk}$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_{km} t^k$, όπου $m \in \mathbb{N}$.

5. Έστω $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k$ με διάστημα σύγκλισης $(t_0 - R, t_0 + R)$ $(R > 0)$. Αποδείξτε ότι $f^{(k)}(t_0) = k! a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Μέτριες

6. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} (1 - x) x^k$ συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, 1]$. (Υπόδ: βρείτε τα μερικά αθροίσματα.)

7. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin(1 + \frac{t}{k})$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-A, A]$. (Υπόδ: Χρησιμοποιήστε ότι $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, $|\sin x| \leq |x|$, $|1 - \cos x| \leq \frac{1}{2}|x|^2$)

8. Έστω η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2 t^2}$.Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε $t \neq 0$ και ότι αποκλίνει για $t = 0$ (Υπόδ: σύγκριση με την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$). Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[a, +\infty)$ ή $(-\infty, -a]$ όπου $a > 0$. (Υπόδ: κριτήριο Weierstrass). Η σειρά αυτή ορίζει, προφανώς, μια συνάρτηση $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2 t^2}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.Είναι η S συνεχής στο πεδίο ορισμού της; Είναι η S φραγμένη; Συγκλίνει η σειρά ομοιόμορφα στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

9. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{t^2+k}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[-A, A]$. (Υπόδ: χωρίστε την σε δύο σειρές και για τη μία εφαρμόστε κριτήριο Weierstrass) αλλά ότι δεν συγκλίνει απολύτως για καμία τιμή του t.

10. Έστω

$$I(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

Έστω ακολουθία $\{x_n\}$ διαφορετικών ανά δύο σημείων ενός διαστήματος. Έστω σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ η οποία συγκλίνει απολύτως. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} c_k I(x - x_k)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα και ότι η συνάρτηση η οποία ορίζεται από αυτήν τη σειρά είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος εκτός από τα σημεία της $\{x_n\}$. (Υπόδ: για το πρώτο μέρος χρησιμοποιήστε το κριτήριο Weierstrass, για το δεύτερο μέρος το Θεώρημα 2).

11. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη σειρά $1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a-1)...(a-k+1)}{k!} t^k$ Αν ο a είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός ή το μηδέν τότε η σειρά γίνεται ένα απλό πολυώνυμο και, μάλιστα, είναι ίση με $(1+t)^a$. Στο εξής υποθέτουμε ότι $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της σειράς είναι 1. Άρα στο $(-1, 1)$ η σειρά ορίζει μια συνάρτηση $f(t)$. Αποδείξτε ότι :
$$(1+t)f'(t) = af(t) \text{ για κάθε } t \text{ με } -1 < t < 1.$$
Παρατηρείστε ότι η γνωστή μας συνάρτηση $(1+t)^a$ ικανοποιεί την ίδια εξίσωση. Αποδείξτε ότι $f(t) = (1+t)^a$ για κάθε t στο $(-1, 1)$. Έτσι παίρνουμε το γενικό *διωνυμικό τύπο του Newton*
$$(1+t)^a \equiv 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a-1)...(a-k+1)}{k!} t^k \text{ για κάθε } t \in (-1, 1).$$
(Υπόδ: $(\frac{f(t)}{(1+t)^a})' \equiv 0$)

12. Αποδείξτε με πολλαπλασιασμούς Cauchy ότι
$$c(s+t) = c(s)c(t) - s(s)s(t)$$
$$s(s+t) = s(s)c(t) + s(t)c(s)$$
για κάθε $s, t \in \mathbb{R}$.

13. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t}{k^a(1+kt^2)}$ $(a > \frac{1}{2})$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Δύσκολες

14. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{t^{2k+1}}{2k+1} - \frac{t^{k+1}}{2k+2})$ συγκλίνει κατά σημείον αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

15. Αποδείξτε ότι η σειρά της άσκησης 10 είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο της $\{x_n\}$ και ότι σε κάθε τέτοιο σημείο παρουσιάζει ασυνέχεια α′ είδους με «πήδημα» 1.

16. Έστω $\{x\} = x - [x], x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $0 \leq \{x\} < 1$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{kx\}}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι κάθε ρητός είναι σημείο ασυνέχειας της f η οποία ορίζεται από την σειρά, ενώ κάθε άρρητος είναι σημείο συνέχειας της f. Αποδείξτε ότι η f είναι R-ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα.

Κεφάλαιο 8

Γενικευμένα ολοκληρώματα

8.1 Γενικά

Στον Απειροστικό Λογισμό εξετάζουμε πότε μια φραγμένη συνάρτηση

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

ορισμένη σε ένα φραγμένο κλειστό διάστημα είναι R-ολοκληρώσιμη. Θυμόμαστε ότι δύο τέτοιες κατηγορίες R-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι οι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$ και οι μονότονες συναρτήσεις στο $[a, b]$.

Από τον ορισμό των R-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων δεν καλύπτονται δύο σημαντικές περιπτώσεις :

(α) συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι φραγμένες

(β) συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται σε μη φραγμένο διάστημα $[a, +\infty)$, $(-\infty, b], (-\infty, +\infty)$ ή σε μη κλειστό διάστημα $(a, b), (a, b], [a, b), (a, +\infty)$, $(-\infty, b)$.

Περίπτωση 1 Έστω πραγματική συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα $[a, b)$ όπου $a \in \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R}$ ή $b = +\infty$. Επί πλέον υποθέτουμε ότι για κάθε c με $a \leq c < b$ η f είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$. Αν το όριο του $\int_a^c f$, καθώς το $c \to b-$, υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f έχει *γενικευμένο ολοκλήρωμα στο* $[a, b)$. Η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος είναι το $\lim_{c \to b-} \int_a^c f$ και συμβολίζεται $\int_a^{\to b} f$:

$$\int_a^{\to b} f := \lim_{c \to b-} \int_a^c f.$$

Επίσης λέμε ότι *το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\int_a^{\to b} f$ *συγκλίνει.* Αν το παραπάνω όριο δεν υπάρχει ή δεν είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι το $\int_a^{\to b} f$

αποκλίνει, και αν το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ τότε λέμε ότι το $\int_a^{\to b} f$ *αποκλίνει στο* $+\infty$ *ή στο* $-\infty$ αντιστοίχως και γράφουμε : $\int_a^{\to b} f = +\infty$ ή $-\infty$.

Παραδείγματα

1. $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(t) = \frac{1}{t^2}$. Η f είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[1, c]$ για κάθε $c \geq 1$, και $\int_1^c \frac{1}{t^2} dt = 1 - \frac{1}{c}$. Άρα $\int_1^{\to +\infty} \frac{1}{t^2} dt = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{t^2} dt = 1$.
2. $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(t) = \frac{1}{t}$. Η f είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[1, c]$ για κάθε $c \geq 1$ και $\int_1^c \frac{1}{t} dt = \log c$. Άρα $\int_1^{\to +\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{c \to +\infty} \log c = +\infty$.
3. $f : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(t) = \frac{1}{t-1}$. Η f είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[0, c]$ για κάθε $c, 0 \leq c < 1$ και $\int_0^c \frac{1}{t-1} dt = \log(1-c)$. Άρα $\int_0^{\to 1} \frac{1}{t-1} dt = \lim_{c \to 1-} \log(1-c) = -\infty$.
4. $f : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$. Η f είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[0, c]$ για κάθε $c, 0 \leq c < 1$ και $\int_0^c f(t) dt = 2 - 2\sqrt{1-c}$. Άρα $\int_0^{\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = \lim_{c \to 1-} 2 - 2\sqrt{1-c} = 2$

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι γενίκευση του R-ολοκληρώματος.

Πρόταση 1 *Έστω* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *μια R-ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο* $[a, b]$. *Τότε η* f *έχει γενικευμένο ολοκλήρωμα στο* $[a, b)$ *και* $\int_a^{\to b} f = \int_a^b f$.

Απόδειξη

Αφού η f είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, θα είναι και φραγμένη. Δηλαδή, για κάποιο M, ισχύει $|f(t)| \leq M$ για $a \leq t \leq b$. Ακόμη, η f είναι R-ολοκληρώσιμη σε κάθε υπο-διάστημα του $[a, b]$, επομένως και σε κάθε $[a, c]$ με $a \leq c < b$. Μένει να δείξουμε ότι $\lim_{c \to b-} \int_a^c f = \int_a^b f$. Αφού $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{c \to b-} \int_c^b f = 0$. Όμως :

$$|\int_c^b f| \leq \int_c^b |f| \leq M(b-c) \overset{c \to b-}{\longrightarrow} 0. \qquad \text{O.E.}\Delta$$

Περίπτωση 2 Ακριβώς τα ανάλογα ισχύουν, όπως στην περίπτωση 1, σε σχέση με το αριστερό άκρο $a \in \mathbb{R}$ ή $a = -\infty$. Δηλαδή, έχουμε $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ και, για κάθε c με $a < c \leq b$, η f είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[c, b]$. Ορίζουμε το *γενικευμένο ολοκλήρωμα της* f *στο* $(a, b]$ ως το

$$\int_{a \leftarrow}^b f = \lim_{c \to a+} \int_c^b f$$

αν υπάρχει το όριο αυτό κλπ. κλπ.

Ισχύει η Πρόταση 1 προσαρμοσμένη κατάλληλα. (Διατυπώστε και αποδείξτε).∎

Περίπτωση 3 Αν $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, όπου $a\in\mathbb{R}$ ή $a=-\infty$ και $b\in\mathbb{R}$ ή $b=+\infty$, χωρίζουμε το (a,b) με οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο d $(a<d<b)$. Αν το $\int_d^{\rightarrow b} f$ συγκλίνει και το $\int_{a\leftarrow}^{d} f$ συγκλίνει, τότε λέμε ότι η f *έχει γενικευμένο ολοκλήρωμα στο* (a,b)

$$\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f := \int_{a\leftarrow}^{d} f + \int_{d}^{\rightarrow b} f$$

ή ότι το $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f$ *συγκλίνει.*

Αν τουλάχιστον ένα από τα $\int_{a\leftarrow}^{d} f$, $\int_d^{\rightarrow b} f$ αποκλίνει, τότε λέμε ότι *το* $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f$ *αποκλίνει.* Αν και τα δύο όρια υπάρχουν και τουλάχιστον ένα είναι $+\infty$ ή $-\infty$ τότε λέμε ότι το $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f$ αποκλίνει στο $+\infty$ ή $-\infty$, αρκεί να μην έχουμε τις περιπτώσεις $(+\infty)+(-\infty)$ ή $(-\infty)+(+\infty)$.

Εύκολα βλέπει κανείς ότι η επιλογή του ενδιάμεσου d δεν επηρεάζει τη σύγκλιση ή την απόκλιση ή την τιμή του $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f$ (Ασκ.1)

Πρόταση 2 *Έστω* $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *μια R-ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο* $[a,b]$. *Τότε η* f *έχει γενικευμένο ολοκλήρωμα στο* (a,b) *και* $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f=\int_a^b f$.

Απόδειξη

Προφανής λόγω της Πρότασης 1. Ο.Ε.Δ

Παραδείγματα

1. $f(0,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ με $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$. Για $0<c\leq 2$ $\int_c^2\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2\sqrt{2}-2\sqrt{c}$. Άρα $\int_{0\leftarrow}^{2}\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2\sqrt{2}$.

2. $f:(0,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ με $f(t)=\frac{1}{t}$. Για $0<c\leq 2$ $\int_c^2\frac{1}{t}dt=\log(\frac{2}{c})$. Άρα $\int_{0\leftarrow}^{2}\frac{1}{t}dt=+\infty$.

3. $f:(-\infty,0]\longrightarrow\mathbb{R}$ με $f(t)=\frac{1}{(t-1)^2}$. Για $c\leq 0$ $\int_c^0\frac{1}{(t-1)^2}dt=1-\frac{1}{1-c}$. Άρα $\int_{-\infty\leftarrow}^{0}\frac{1}{(t-1)^2}dt=1$.

4. $f:(-\infty,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ με $f(t)=\frac{t}{t^2+1}$. Τότε $\int_0^{\rightarrow+\infty}\frac{t}{t^2+1}dt=\lim_{c\to\infty}\int_0^c\frac{t}{t^2+1}dt=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2}log(1+c^2)=+\infty$, $\int_{-\infty\leftarrow}^{0}\frac{t}{t^2+1}dt=\lim_{c\to-\infty}\int_c^0\frac{t}{t^2+1}dt=\lim_{c\to-\infty}-\frac{1}{2}\log(1+c^2)=-\infty$. Άρα το $\int_{-\infty\leftarrow}^{\rightarrow+\infty}\frac{t}{t^2+1}dt$ αποκλίνει και δεν ορίζεται τιμή του.

5. $f:(-\infty,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ με $f(t)=\frac{1}{t^2+1}$. Τότε $\int_0^{\rightarrow+\infty}\frac{1}{t^2+1}dt=\lim_{c\to\infty}\int_0^c\frac{1}{t^2+1}dt=\lim_{c\to\infty}\arctan(c)=\frac{\pi}{2}$, $\int_{-\infty\leftarrow}^{0}\frac{1}{t^2+1}dt=\lim_{c\to-\infty}\int_c^0\frac{1}{t^2+1}dt=\lim_{c\to-\infty}(-\arctan(c))=\frac{\pi}{2}$. Άρα $\int_{-\infty\leftarrow}^{\rightarrow+\infty}\frac{1}{t^2+1}dt=\pi$.

Περίπτωση 4 Η περίπτωση αυτή συνδυάζει όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις. Θεωρούμε f η οποία είναι ορισμένη σε διάστημα (a,b)(όπου τα a,b μπορούν να είναι άπειρα) εκτός, ίσως, από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Δηλαδή, μπορει να υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ ώστε

$$f : (a, \xi_1) \cup (\xi_1, \xi_2) \cup \ldots \cup (\xi_{n-1}, \xi_n) \cup (\xi_n, b) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Αν όλα τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow\xi_1} f, \int_{\xi_1\leftarrow}^{\rightarrow\xi_2} f, ..., \int_{\xi_{n-1}\leftarrow}^{\rightarrow\xi_n} f, \int_{\xi_n\leftarrow}^{\rightarrow b} f$ υπάρχουν, τότε λέμε ότι υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο (a,b) και η τιμή του είναι

$$\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow\xi_1} f + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\xi_j\leftarrow}^{\rightarrow\xi_{j+1}} f + \int_{\xi_n\leftarrow}^{\rightarrow b} f.$$

Η τιμή είναι $+\infty$, αν ένα τουλάχιστον από τα ολοκληρώματα είναι $+\infty$ και κανένα δεν είναι $-\infty$. Ενώ η τιμή είναι $-\infty$, αν ένα τουλάχιστον από τα ολοκληρώματα είναι $-\infty$ και κανένα δεν είναι $+\infty$.

Συμβολισμός

Από εδώ και πέρα τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^{\rightarrow b} f, \int_{a\leftarrow}^{b} f, \int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f$ *και το γενικευμένο ολοκλήρωμα με τα διάφορα* $\xi_1, ..., \xi_n$ *στο εσωτερικό του* (a,b) *θα τα συμβολίζουμε* $\int_a^b f$.

Δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με το R-ολοκλήρωμα$\int_a^b f$, διότι, στην περίπτωση κατα την οποία το R-ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$ υπάρχει, τότε υπάρχει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα και οι τιμές τους συμπίπτουν. Υποτίθεται, βεβαίως, ότι, αναλόγως της συγκεκριμένης κάθε φορά f, μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε αν πρόκειται για γενικευμένο ή για συνηθισμένο R-ολοκλήρωμα.

Παρατήρηση

Από εδώ και πέρα στην θεωρητική μας συζήτηση *θα περιοριστούμε στην περίπτωση 1.* Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ θα είναι το $\int_a^{\rightarrow b} f$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι R-ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ για κάθε $c,\ a \leq c < b$, και $\int_a^b f = \int_a^{\rightarrow b} f = \lim_{c\rightarrow b-} \int_a^c f$. Σε κάθε άλλη περίπτωση τα αποτελέσματα είναι ανάλογα και αποδεικνύονται με εντελώς ανάλογο τρόπο.

Πρόταση 3 *(Προσθετικότητα ως προς τα υποδιαστήματα). Αν το* $\int_a^b f$ *συγκλίνει, και* $a < d < b$, *τότε και το* $\int_d^b f$ *συγκλίνει και*

$$\int_a^b = \int_a^d f + \int_d^b f.$$

Επι πλέον, $\lim_{d\to b-}\int_d^b f = 0$.

Απόδειξη

Έστω $a < d < c < b$. Από την προσθετικότητα του R-ολοκληρώματος : $\int_a^c f = \int_a^d f + \int_d^c f$. To $\lim_{c\to b-}\int_a^c f$ υπάρχει. Άρα λόγω της τελευταίας ισότητας υπάρχει και το $\lim_{c\to b-}\int_d^c f$ και: $\lim_{c\to b-}\int_a^c f = \int_a^d f + \lim_{c\to b-}\int_d^c f$, δηλαδή $\int_a^b f = \int_a^d f + \int_d^b f$. Τώρα: $\lim_{d\to b-}\int_d^b f = \lim_{d\to b-}(\int_a^b f - \int_a^d f) = \int_a^b f - \int_a^b f = 0$. Ο.Ε.Δ.

Πρόταση 4 ***(Γραμμικότητα ως προς την συνάρτηση)*** *Αν τα* $\int_a^b f, \int_a^b g$ *συγκλίνουν τότε, για* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *το* $\int_a^b(\lambda f + \mu g)$ *συγκλίνει και* $\int_a^b(\lambda f + \mu g) = \lambda\int_a^b f + \mu\int_a^b g$.

Απόδειξη

Στην $\int_a^c(\lambda f + \mu g) = \lambda\int_a^c f + \mu\int_a^c g$ παίρνουμε όριο καθώς $c \to b-$. Ο.Ε.Δ.

Θεώρημα 1 ***(Κριτήριο Cauchy)*** *Το* $\int_a^b f$ *συγκλίνει αν και μόνον αν ισχύει: για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $c_0 = c_0(\varepsilon)$ *με* $a \le c_0 < b$ *ώστε*

$$c_0 \le c_1 < c_2 < b \Rightarrow |\int_{c_1}^{c_2} f| < \varepsilon.$$

Απόδειξη

(α) Έστω ότι το $\int_a^b f$ συγκλίνει. Τότε, για $\varepsilon > 0$, υπάρχει $c_0 = c_0(\varepsilon)$ ώστε

$$c_0 \le c < b \Rightarrow |\int_a^c f - \int_a^b f| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Όμως, τότε: $c_0 \le c_1 < c_2 < b \Rightarrow \left|\int_{c_1}^{c_2} f\right| = \left|\int_a^{c_2} f - \int_a^{c_1} f\right|$ $\le \left|\int_a^{c_2} f - \int_a^b f\right| + \left|\int_a^{c_1} f - \int_a^b f\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(β) Έστω οποιαδήποτε ακολουθία $\{c_n\}$ με $a \le c_n < b$, $n \in \mathbb{N}$ και με $c_n \longrightarrow b$. Παίρνουμε $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει το $c_0 = c_0(\varepsilon)$ με τις ιδιότητες της υπόθεσης. Αφού $c_n \longrightarrow b$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: $n \ge N \Rightarrow c_0 \le c_n < b$. Άρα: $N \le m < n \Rightarrow |\int_{c_m}^{c_n} f| < \varepsilon$ ή, ισοδύναμα: $|\int_a^{c_n} f - \int_a^{c_m} f| < \varepsilon$. Άρα η $\{\int_a^{c_n} f\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Άρα υπάρχει αριθμός s ώστε $\int_a^{c_n} f \longrightarrow s$. Αν πάρουμε μιαν άλλη ακολουθία $\{c'_n\}$ με $c'_n \longrightarrow b$, τότε η μικτή ακολουθία $c_1, c'_1, c_2, c'_2, c_3, c'_3, \ldots$ συγκλίνει και αυτή στο b και, σύμφωνα με τα παραπάνω, η

$$\int_a^{c_1} f, \int_a^{c'_1} f, \int_a^{c_2} f, \int_a^{c'_2} f, \ldots$$

συγκλίνει σε κάποιο όριο. Αφού, όμως $\int_a^{c_n} f \longrightarrow s$, το όριο αυτό είναι οπωσδήποτε το s. Άρα $\int_a^{c'_n} f \longrightarrow s$. Υπάρχει, λοιπόν, *ακριβώς ένας* αριθμός s ώστε *για κάθε* ακολουθία $\{c_n\}$ με $c_n \longrightarrow b$ ισχύει $\int_a^{c_n} f \longrightarrow s$. Αυτό, όμως, σημαίνει ότι $\int_a^c f \longrightarrow s$ καθώς $c \longrightarrow b-$ και, επομένως, το $\int_a^b f$ συγκλίνει. Ο.Ε.Δ.

8.2 Μη αρνητικές συναρτήσεις

Θεώρημα 2 *Έστω $f(t) \geq 0$, $a \leq t < b$. Το $\int_a^b f$ συγκλίνει, αν το $\int_a^c f$ είναι φραγμένο ως συνάρτηση του c, ενώ, $\int_a^b f = +\infty$, αν το $\int_a^c f$ δεν είναι φραγμένο.*

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι το $\int_a^c f$ είναι αύξουσα συνάρτηση του c, αφού το $a \leq c_1 < c_2 < b$ συνεπάγεται ότι

$$\int_a^{c_2} f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f \geq \int_a^{c_1} f.$$

Επομένως, αν το $\int_a^c f$ είναι άνω φραγμένο, τότε το $\lim_{c\to b-} \int_a^c f$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, ενώ, αν το $\int_a^b f$ δεν είναι άνω φραγμένο, τότε το $\lim_{c\to b-} \int_a^b f$ υπάρχει, αλλά είναι $+\infty$. Ο.Ε.Δ.

Έχουμε τώρα ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα που δίνει την σχέση σειρών και γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 3 ***(Ολοκληρωτικό κριτήριο σύγκλισης σειράς)*** *Έστω ότι $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μη αρνητική και φθίνουσα προς το 0 καθώς το $t \longrightarrow +\infty$. Ορίζουμε $S(c) = \int_1^c f$ και $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$. Τότε (α) $S(n+1) \leq S_n \leq S(n) + f(1)$ και (β) το $\int_1^{+\infty} f$ συγκλίνει αν και μόνον αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ συγκλίνει. Επίσης: $\int_1^{+\infty} f \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f$.*

Απόδειξη

(α) Αφού η f είναι φθίνουσα, $f(m+1) \leq \int_m^{m+1} f \leq f(m)$. Προσθέτοντας τις αριστερές ανισότητες από $m = 1$ έως $m = n - 1$ παίρνουμε: $S_n - f(1) \leq \int_1^n f = S(n)$. Προσθέτοντας τις δεξιές ανισότητες από $m = 1$ έως $m = n$ παίρνουμε: $S(n+1) \leq S_n$. Άρα $S(n+1) \leq S_n \leq S(n) + f(1)$.

(β) Η ανισότητα του (α) δείχνει ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς, S_n, είναι άνω φραγμένα αν και μόνον αν το $S(c) = \int_1^c f$ είναι άνω φραγμένο σαν συνάρτηση του c. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 2, Κεφ. 4, το $\int_1^{\infty} f$ συγκλίνει αν και μόνον αν η σειρά $\int_{k=1}^{\infty} f(k)$ συγκλίνει.

Επί πλέον, από την ίδια σχέση παίρνουμε :

$$\lim_{n\to\infty} S(n+1) \leq \lim_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} S(n) + f(1),$$

δηλαδή $\int_1^\infty f \leq \sum_{k=1}^\infty f(k) \leq f(1) + \int_1^\infty f$. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα

$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p}, p > 0$.

Έστω $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(t) = \frac{1}{t^p}$. Τότε $f(k) = \frac{1}{k^p}, k \in \mathbb{N}$.

Αφού $p > 0$, η f είναι φθίνουσα και τείνει προς το 0 καθώς $t \longrightarrow +\infty$.

$$\int_1^c f = \int_1^c \frac{1}{t^p} dt = \begin{cases} \log(x), & p = 1 \\ \frac{1}{1-p}(c^{1-p} - 1), & p \neq 1, p > 0. \end{cases}$$

Άρα $\int_1^{+\infty} f = \begin{cases} +\infty, & 0 < p \leq 1 \\ \frac{1}{p-1}, & p > 1. \end{cases}$ Επομένως η $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει αν και μόνον αν $p > 1$ και $\frac{1}{p-1} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \leq 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}$ όταν $p > 1$.

8.3 Γενικές συναρτήσεις

Ορισμός 1 Λέμε ότι το $\int_a^b f$ *συγκλίνει απολύτως*, αν το $\int_a^b |f|$ συγκλίνει. Λέμε ότι το $\int_a^b f$ *συγκλίνει υπό συνθήκην* (*ή καταχρηστικώς*), αν το $\int_a^b f$ συγκλίνει αλλά όχι απολύτως.

Πρόταση 5 *Αν το $\int_a^b f$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το $\int_a^b |f|$ συγκλίνει, υπάρχει $c_0 = c_0(\varepsilon)$ με $a \leq c_0 < b$ ώστε : $c_0 \leq c_1 < c_2 < b \Rightarrow \int_{c_1}^{c_2} |f| < \varepsilon \Rightarrow \left|\int_{c_1}^{c_2} f\right| < \varepsilon$. Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο Cauchy, το $\int_a^b f$ συγκλίνει. Ο.Ε.Δ. (Ασκ.8)

Παραδείγματα

1. Το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ συγκλίνει απολύτως.

Έχουμε ότι $\int_\pi^c \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt \leq \int_\pi^c \frac{1}{t^2} dt$. Το $\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ συγκλίνει, άρα το $\int_\pi^c \frac{1}{t^2} dt$ είναι άνω φραγμένο ως συνάρτηση του c. Το ίδιο ισχύει, επομένως, και για το $\int_\pi^c \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$. Άρα το $\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ συγκλίνει. (Θεώρημα 2)

2. Το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ συγκλίνει υπό συνθήκην.

$\int_\pi^c \frac{\sin t}{t} dt = -\int_\pi^c \frac{1}{t}(\cos t)' dt = \frac{\cos \pi}{\pi} - \frac{\cos c}{c} - \int_\pi^c \frac{\cos t}{t^2} dt$ (με ολοκλήρωση κατά μέρη). Προφανώς: $\lim_{c\to+\infty}\frac{\cos c}{c}=0$. Επίσης το $\lim_{c\to\infty}\int_\pi^c \frac{\cos t}{t^2}dt$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα. Άρα το $\lim_{c\to\infty}\int_\pi^c \frac{\sin t}{t}dt$ υπάρχει.

Όμως : $\int_\pi^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt=+\infty$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty}\int_\pi^{n\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$ $=+\infty$. Πράγματι: $\int_\pi^{n\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt=$
(με αλλαγή μεταβλητής $t=t'+k\pi$)
$=\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\pi \frac{|\sin(t+k\pi)|}{t+k\pi}dt=\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t+k\pi}dt=\int_0^\pi \sin t\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{t+k\pi}\right\}dt\geq$
$\int_0^\pi \sin t\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\pi+k\pi}\right\}dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right]\int_0^\pi \sin t dt=$
$\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right]\longrightarrow+\infty$. (Άσκ. 2, δεύτερο μέρος)

Θεώρημα 4 ***(Σύγκριση ολοκληρωμάτων)*** *Έστω $f,g:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, με $g(t)\geq 0,\ a\leq t<b$. Αν υπάρχει αριθμός M ώστε: $|f(t)|\leq Mg(t)$ για $t\in[a,b)$, τότε, αν το $\int_a^b g$ συγκλίνει, το $\int_a^b f$ συγκλίνει απολύτως.*

Απόδειξη

Για $a\leq c<b$ έχουμε $\int_a^c |f|\leq M\int_a^c g$. Αν το $\int_a^b g$ συγκλίνει, το $\int_a^c g$ είναι άνω φραγμένο ως συνάρτηση του c. Το ίδιο, λοιπόν, συμβαίνει και με το $\int_a^c|f|$. Άρα το $\int_a^b|f|$ συγκλίνει. Ο.Ε.Δ.

Παραδείγματα

Το $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt$ συγκλίνει απολύτως, επειδή $\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\leq\frac{1}{t^2}$ και το $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ συγκλίνει.

Ας δούμε, τώρα, μερικά παραδείγματα συναρτήσεων g, οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνότατα ως συναρτήσεις ¨σύγκρισης¨.

1. $g(t)=\frac{1}{t^p},\ p>0$, στο διάστημα $[a,+\infty),a>0$.

$$\int_a^c\frac{1}{t^p}dt=\begin{cases}\log c-\log a, & p=1\\ \frac{1}{1-p}(c^{1-p}-a^{1-p}), & p>0,p\neq 1.\end{cases}$$

Άρα

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{t^p}dt=\begin{cases}+\infty, & 0<p\leq 1\\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1.\end{cases}$$

2. $g(t)=\frac{1}{t^p},p>0$, στο διάστημα $(0,a],\ a>0$.

$$\int_c^a\frac{1}{t^p}=\begin{cases}\log a-\log c, p=1\\ \frac{1}{1-p}(a^{1-p}-c^{1-p}), & p>0,p\neq 1\end{cases}$$

Άρα

$$\int_0^a\frac{1}{t^p}dt=\begin{cases}+\infty, & p\geq 1\\ \frac{a^{1-p}}{1-p}, & 0<p<1.\end{cases}$$

3. $g(t)=t^r\exp -At^b,\ r\in\mathbb{R},A>0,b>0$, στο διάστημα $[a,+\infty),a>0$. Διαλέγουμε φυσικό αριθμό m, ώστε $m>\frac{r+1}{b}$.

Τότε : $e^x \geq \frac{x^m}{m!} \Rightarrow e^{At^b} \geq \frac{A^m}{m!}t^{bm} \Rightarrow g(t) = t^r e^{-At^b} \leq \frac{m!}{A^m}\frac{1}{t^{bm-r}}$. Επειδή $bm - r > 1$, το $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{bm-r}}dt$ συγκλίνει (Παρ. 1). Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα σύγκρισης, το $\int_a^{+\infty} g$ συγκλίνει επίσης.
(Ασκ. 2,3,4,5,7,9,10,12,13,18,19)

Μία στοιχειώδης, αλλά πολύ χρήσιμη πρόταση είναι η

Πρόταση 6 *(α)* ***(Ολοκλήρωση κατά μέρη)*** *Αν οι f, g έχουν συνεχή παράγωγο στο $[a, b)$, τότε*

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = \lim_{c \to b-} (f(c)g(c)) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

(β) ***(Αλλαγή μεταβλητής)*** *Αν η «αλλαγή μεταβλητής» $t = t(s)$: $[a', b') \overset{\text{επί},1\text{-}1}{\longrightarrow} [a, b)$ είναι γνησίως αύξουσα και έχει συνεχή παράγωγο, τότε*

$$\int_a^b f(t) = \int_{a'}^{b'} f(t(s))t'(s)ds$$

(Άσκηση 11)

Απόδειξη

(α) Για κάθε c, $a \leq c < b$, ισχύει ότι $\int_a^c f'(t)g(t)dt = f(c)g(c) - f(a)g(a) - \int_a^c f(t)g'(t)dt$. Τώρα, απλώς παίρνουμε το όριο των δύο πλευρών καθώς $c \longrightarrow b-$.

(β) Έστω $a' \leq c' < b'$ και $c = s(c')$. Τότε $a \leq c < b$ και $c \longrightarrow b-$ καθώς $c' \longrightarrow b'-$. Άρα $\lim_{c \to b-} \int_a^c f(t)dt = \lim_{c \to b-} \int_{a'}^{c'} f(t(s))t'(s)ds = \int_{a'}^{b'} f(t(s))t'(s)ds$. Ο.Ε.Δ.

Ορισμός 2 Έστω συνάρτηση $f : [a, b) \cup (b, c] \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι R-ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, d], a \leq d < b$, και σε κάθε διάστημα $[d, c]$, $b < d \leq c$.

Ονομάζουμε *πρωτεύουσα τιμή* του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_a^c f$ τον αριθμό (αν υπάρχει) $\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_a^{b-\varepsilon} f + \int_{b+\varepsilon}^c f \right)$ και τον συμβολίζουμε $P.V. \int_a^b f$.

Είναι δυνατόν να μην υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα, αλλά να υπάρχει η πρωτεύουσα τιμή του. Για παράδειγμα, έστω $f(t) = \frac{1}{t}$ στο $[-1, 0) \cup (0, 1]$. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \frac{1}{t}dt$ δεν υπάρχει, αλλά $P.V. \int_{-1}^1 \frac{1}{t}dt = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t} \right) = 0$. Όμως

Πρόταση 7 *Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^c f$ υπάρχει, τότε η πρωτεύουσα τιμή του υπάρχει και έχουν την ίδια τιμή.*

Απόδειξη

Αν το $\int_a^c f$ υπάρχει, τότε εξ ορισμού τα $\int_a^b f, \int_b^c f$ υπάρχουν. Άρα τα $\lim_{d\to b-}\int_a^d f$, $\lim_{d\to b+}\int_d^c f$ υπάρχουν. Άρα : $P.V. \int_a^c f =$
$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{b-\varepsilon} f + \int_{b+\varepsilon}^c f\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f + \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{b+\varepsilon}^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$
$= \int_a^c f$. Ο.Ε.Δ.

8.4 Ολοκληρώματα με παράμετρο

Έστω συνάρτηση $f(t,x)$, όπου το t ανήκει σε διάστημα $[a,b)$ και το x σε διάστημα I. Θα ολοκληρώνουμε ως προς t και το x θα παίζει το ρόλο μιας παραμέτρου:

$$\int_a^b f(t,x)dt, \ x \in I.$$

Αν για κάθε x στο I το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει, τότε ορίζεται μια συνάρτηση $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \int_a^b f(t,x)dt, \ x \in I.$$

Μένει να δούμε κάτω από ποιές συνθήκες η g είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη στο I.

Παραδείγματα

1. $\int_0^\infty e^{-tx}dt, x \in \mathbb{R}$.

Αν $c \geq 0, \int_0^c e^{-tx}dt = \begin{cases} -\frac{1}{x}(e^{cx}-1), & x \neq 0 \\ c, & x = 0. \end{cases}$

Άρα $\int_0^\infty e^{-tx}dt = \begin{cases} +\infty, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

Άρα, αν το x είναι στο διάστημα $I = (0,+\infty)$, τότε $g(x) = \int_0^\infty e^{-tx}dt = \frac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο I.

2. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t}dt, x \in \mathbb{R}$.

Κατ' αρχήν, αν $x = 0$ τότε το ολοκλήρωμα έχει την τιμή 0. Έστω, τώρα, ότι $x > 0$. Η αλλαγή μεταβλητής $t = t(s) = \frac{s}{x}$ είναι τέτοια ώστε $t : [0,+\infty) \stackrel{\text{επί,1-1}}{\longrightarrow} [0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη. Άρα $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{\frac{s}{x}}\frac{1}{x}ds = \int_0^{+\infty}\frac{\sin s}{s}ds$. Έχουμε αποδείξει ότι το

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin s}{s} ds$ συγκλίνει και έστω A η τιμή του. Άρα $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} dt = A, \quad x > 0$.
Αν $x < 0$, τότε $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(-t|x|)}{t} dt =$
$= -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t|x|)}{t} dt = -A$.

Άρα : $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} dx = \begin{cases} A, & x > 0 \\ 0, & x = 0, \\ -A, & x < 0 \end{cases}$ $I = \mathbb{R}$. Θα δούμε αμέσως ότι ο αριθμός A είναι θετικός. Επομένως η g δεν είναι συνεχής στο 0, ενώ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Με ολοκλήρωση κατά μέρη : $A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos t)'}{t} dt =$ $\lim_{c \to +\infty} \left(\frac{1-\cos c}{c}\right) + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos t}{t^2} dt > 0$ διότι : $\frac{1-\cos(t)}{t^2} \geq 0$ για κάθε t και, στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$: $\frac{1-\cos(t)}{t^2} > 0$. Η τιμή του A είναι $\frac{\pi}{2}$ αλλά αυτό είναι δύσκολο να αποδειχθεί και , για όποιον ενδιαφέρεται, είναι άσκηση στο τέλος του κεφαλαίου.

Ορισμός 3 Λέμε ότι το $\int_a^b f(t,x)dt$ *συγκλίνει στην* $g(x)$ *κατά σημείο* στο I αν, για κάθε x στο I, η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος είναι $g(x)$. Ή αλλιώς (αν θυμηθούμε τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος), αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $c_0 = c_0(\varepsilon, x)$ στο $[a, b)$ ώστε :

$$c_0 \leq c < b \Rightarrow |g(x) - \int_a^c f(t,x)dt| < \varepsilon.$$

Ορισμός 4 Λέμε ότι το $\int_a^b f(t,x)dt$ *συγκλίνει στην* $g(x)$ *ομοιόμορφα στο* I αν ,για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $c_0 = c_0(\varepsilon)$ στο $[a, b)$ ώστε: $c_0 \leq c < b \Rightarrow$ $|g(x) - \int_a^c f(t,x)dt| < \varepsilon$ για κάθε $x \in I$.

Παρατήρηση

Στον δεύτερο ορισμό η επιλογή του c_0 εξαρτάται μόνον από το ε και όχι από το x. Στον πρώτο ορισμό αυτό δεν ισχύει. Δηλαδή, με το ίδιο ε, αλλάζοντας το x αλλάζει, πιθανόν, και η επιλογή του c_0.

Πρόταση 8 *Αν το* $\int_a^b f(t,x)dt$ *συγκλίνει στην* $g(x)$ *ομοιόμορφα στο* I*, τότε συγκλίνει και κατά σημείο στην* $g(x)$.

Απόδειξη

Προφανής από τους δύο ορισμούς. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα

$\frac{1}{x} = g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt, x \in (0, +\infty)$.

Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $(0, +\infty)$. Πράγματι: $|g(x) - \int_0^c e^{-tx} dt| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x}e^{-cx} < \varepsilon \Leftrightarrow c > \frac{1}{x}log(\frac{1}{\varepsilon x})$. Άρα $c_0 = \frac{1}{x}log(\frac{1}{\varepsilon x})$.

Και παρατηρούμε ότι, αν $x \longrightarrow 0+$, τότε $c_0 \longrightarrow +\infty$.

Ας πάρουμε μίαν ακολουθία $\{c_n\}$ στο $[a, b)$ με $c_n \longrightarrow b$. Θεωρούμε, για κάθε n, την συνάρτηση

$$g_n(x) = \int_a^{c_n} f(t, x)dt,$$

όπου το ολοκλήρωμα είναι R-ολοκλήρωμα.

Παρατηρούμε ότι, συμφωνα με τους ορισμούς : $g_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} g$ ή $g_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$ στο I, αν το $\int_a^b f(t, x)dt$ συγκλίνει κατά σημείον ή ομοιόμορφα, αντιστοίχως, στην $g(x)$ στο I.

Θα μελετήσουμε, λοιπόν, τις ιδιότητες συνέχειας ή παραγωγισιμότητας της g αρκεί να μελετήσουμε τις αντίστοιχες ιδιότητες των g_n και να χρησιμοποιήσουμε τα Θεωρήματα 1,3 του Κεφ. 5 για σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων.

Θα χρειαστούμε τα ακόλουθα δύο Λήμματα.

Λήμμα 1 *Έστω πραγματική συνάρτηση $f(t, x)$ συνεχής στο $[a, c] \times I$. Τότε η συνάρτηση $g(x) = \int_a^c f(t, x)dt$ είναι συνεχής στο I*

Λήμμα 2 *Έστω πραγματική συνάρτηση $f(t, x)$ συνεχής στο $[a, c] \times I$ και έστω, επίσης, ότι η $f_x(t, x)$ (δηλαδή η μερική παράγωγος ως προς x) είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, c] \times I$. Τότε η $g(x) = \int_a^c f(t, x)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο I και $g'(x) = \int_a^c f_x(t, x)dt$, για κάθε $x \in I$.*

Παρατήρηση

Το νόημα του τελευταίου λήμματος είναι ότι, με τις κατάλληλες προϋποθέσεις, η παράγωγος περνάει μέσα στο ολοκλήρωμα. (Ασκ.15)

Και τα δύο λήμματα αναφέρονται σε συνηθισμένο R-ολοκλήρωμα $\int_a^c$. Μένει να περάσουμε στο όριο $c \longrightarrow b-$ για να αποδείξουμε ανάλογα αποτελέσματα για γενικευμένα ολοκληρώματα.

Θεώρημα 5 *Έστω πραγματική συνάρτηση $f(t, x)$ συνεχής στο $[a, b) \times I$. Τότε η $g(x) = \int_a^b f(t, x)dt$ είναι συνεχής στο I, αρκεί το $\int_a^b f(t, x)dt$ να συγκλίνει ομοιόμορφα στην $g(x)$ στο I.*

Απόδειξη

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $g_n(x) = \int_a^{c_n} f(t, x)dt$. Αν το $\int_a^b f(t, x)dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $g(x)$ στο I, τότε $g_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$ στο I. Όμως η $f(t, x)$ είναι συνεχής στο $[a, c_n] \times I$ (υποσύνολο του $[a, b) \times I$). Σύμφωνα με το Λήμμα

1, η g_n είναι συνεχής στο I. Άρα, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης, η g είναι συνεχής στο I. Ο.Ε.Δ.

Θεώρημα 6 *Έστω πραγματική συνάρτηση $f(t,x)$ συνεχής στο $[a,b) \times I$ και έστω, επίσης, ότι η $f_x(t,x)$ είναι συνεχής στο $[a,b) \times I$. Αν (α) το $\int_a^b f(t,x_0)dt$ συγκλίνει για κάποιο x_0 στο I και (β) το $\int_a^b f_x(t,x)dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση $h(x)$ στο I, τότε το $\int_a^b f(t,x)dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση $g(x)$ στο I, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο I και*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(t,x)dt\right) = \frac{d}{dx}g(x) = h(x) = \int_a^b f_x(t,x)dt.$$

Το I στο θεώρημα αυτό πρέπει να είναι ένα κλειστό φραγμένο διάστημα.

Απόδειξη

Έστω πάλι $g_n(x) = \int_a^{\gamma_n} f(t,x)dt$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2: $g_n'(x) = \int_a^{\gamma_n} f_x(t,x)dt$ και σύμφωνα με το Λήμμα 1, η $g_n'(x)$ είναι συνεχής στο I. Έπισης, λόγω της υπόθεσης (β), $g_n'(x) \overset{\text{ομ}}{\to} h(x)$ στο I . Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 3, Κεφ 5, η $\{g_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ στο I,δηλαδή

$$g(x) = \int_a^b f(t,x)dt,$$

και

$$g'(x) = h(x) = \int_a^b f_x(t,x)dt.$$

Ο.Ε.Δ.

Είναι προφανές ότι, για την εφαρμογή των παραπάνω θεωρημάτων χρειαζόμαστε ένα κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Ένα πολύ σημαντικό κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης θα δώσουμε τώρα , το οποίο μοιάζει πολύ με το κριτήριο $Weierstrass$ για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων.

Θεώρημα 7 *Έστω $f(t,x)$ πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[a,b) \times I$. Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $F(t)$ ορισμένη στο $[a,b)$ ώστε:*

$$|f(t,x)| \le F(t),\ t\varepsilon[a,b), x\varepsilon I.$$

Άν το $\int_a^b F(t)dt$ συγκλίνει,τότε το $\int_a^b f(t,x)dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I.

Απόδειξη

Άπο το θεώρημα σύγκρισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων συμπεραίνουμε ότι το $\int_a^b f(t,x)dt$ συγκλίνει για κάθε $x \in I$. Ορίζεται, επομένως μια συνάρτηση

$$g(x) = \int_a^b f(t,x)dt.$$

Μένει να δούμε αν το $\int_a^b f(t,x)dt$ συγκλίνει *ομοιόμορφα* στην $g(x)$ στο I.

Αφού το $\int_a^b F(t)dt$ συγκλίνει, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $c_0 = c_0(\varepsilon)$ στο $[a,b]$ ώστε: $c_0 \leq c < b \Rightarrow \left|\int_a^b F(t)dt - \int_a^c F(t)dt\right| < \varepsilon \Rightarrow \int_c^b F(t)dt < \varepsilon$. Όμως τότε: $c_0 \leq c < b \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\left|g(x) - \int_a^c f(t,x)dt\right| &= \left|\int_a^b f(t,x)dt - \int_a^c f(t,x)dt\right| \\
&= \left|\int_c^b f(t,x)dt\right| \\
&\leq \int_c^b |f(t,x)|\, dt \\
&\leq \int_c^b F(t)dt < \varepsilon
\end{aligned}$$

για κάθε $x \in I$. Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα

Θα μελετήσουμε την συνάρτηση $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(tx)dt$.

Εδώ $f(t,x) = e^{-t}\sin(tx), (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι, αν ορίσουμε $F_1(t) = e^{-t}$, τότε $|f(t,x)| \leq F_1(t)$, $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$. Το $\int_0^{+\infty} F_1(t)dt$ συγκλίνει. Άρα, σύμφωνα το Θεώρημα 7, το $\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(tx)dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $g(x)$. Η συνάρτηση $f(t,x)$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 5, η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Υπολογίζουμε: $f_x(t,x) = te^{-t}\cos(tx)$, η οποια είναι συνεχής στο $[0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Άν θέσουμε $F_2(t) = te^{-t}$ στο$[0,\infty)$, τότε $|f_x(t,x)| \leq F_2(t)$, $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$ και το $\int_0^{\infty} F_2(t)dt$ συγκλίνει.

Θα αποδείξουμε τώρα οτι η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και οτι: $g(x) = \int_0^{\infty} te^{-t}\cos(tx)dt$. Το Θεώρημα 6 απαιτεί το I να είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα. Η απαίτηση αυτή, αν και απαγορεύει να δουλέψουμε στο διάστημα $I = \mathbb{R}$, δεν αποτελεί ουσιαστικό πρόβλημα. Διότι, διαλέγουμε τυχόν x_0 στο $\mathbb{R}$ και μετά διαλέγουμε οποιοδήποτε κλειστό φραγμένο διάστημα I το οποίο περιέχει το x_0. Αφού το $\int_0^{+\infty} F_2(t)dt$ συγκλίνει, το $\int_0^{+\infty} f_x(t,x)dt$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο I. Έχουμε, επίσης, ήδη αποδείξει οτι το $\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ συγκλίνει στην $g(x)$ στο I. Άρα, απο το Θεώρημα 6

$$g'(x) = h(x) = \int_0^{+\infty} f_x(t,x)dt$$

στο I. Άρα $g'(x_0) = \int_0^{+\infty} f_x(t,x_0)dt$, αφού το x_0 περιέχεται στο I. Το x_0 ήταν αυθαίρετα επιλεγμένο απο το $\mathbb{R}$ και τελειώσαμε την απόδειξη του τύπου

$$\frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(tx)dt = \int_0^{+\infty} te^{-t}\cos(tx)dt, \ x \in \mathbb{R}.$$

(Ασκ. 16,17,20,21)

8.5 Η συνάρτηση Γ (συνάρτηση-Γάμμα)

Έστω $x > 0$ και ας θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$f(t,x) = t^{x-1}e^{-t}, \ 0 < t.$$

Σχηματίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} f(t,x)dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση του x, η οποία συμβολίζεται $\Gamma(x)$ και ονομάζεται *συνάρτηση-Γάμμα*. Φυσικά, πρέπει να αποδείξουμε οτι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Πρόταση 9 *Το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ *καθώς και το* $\int_0^{+\infty} t^{x-1}(logt)^n e^{-t}dt$, $n \in \mathbb{N}$, *συγκλίνουν για κάθε* $x > 0$. *Επί πλέον, συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κάθε* $x-$*διάστημα* I *της μορφής* $I = [A,B]$ *όπου* $0 < A \le B < +\infty$.

Απόδειξη

Το πρώτο ολοκλήρωμα μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση του δευτέρου με $n = 0$. Το $\int_0^{+\infty} t^{x-1}(logt)^n e^{-t}dt$ χωρίζεται σε δυο γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 t^{x-1}(\log t)^n e^{-t}dt, \int_1^{+\infty} t^{x-1}(logt)^n e^{-t}dt.$$

Θεωρούμε $0 < A \le B < +\infty$ και $x \in [A,B]$.

Άν $t \geq 1$, τότε $|t^{x-1}(logt)^n e^{-t}| \leq t^{n+x+1}e^{-t} \leq t^{B+n+1}e^{-t}$.

Θέτουμε $F(t) = t^{B+n+1}e^{-t}$. Αφού το $\int_1^\infty F(t)dt$ συγκλίνει, το $\int_1^\infty t^{x-1}(logt)^n e^{-t}dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $I = [A, B]$.

Άν $0 < t \leq 1$, τότε $|t^{x-1}(logt)^n e^{-t}| \leq t^{A-1}|logt|^n$. Θέτουμε $F(t) = t^{A-1}|logt|^n$. Αφού το $\int_0^1 F(t)dt$ συγκλίνει (γιατί;), το

$$\int_0^1 t^{x-1}(logt)^n e^{-t}dt$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[A, B]$.

Άρα το $\int_0^\infty t^{x-1}(logt)^n e^{-t}dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[A, B]$.

Για να αποδείξουμε τώρα ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $x > 0$, εφαρμόζουμε τη γνωστή διαδικασία.Δηλαδή παίρνουμε τυχόν $x > 0$, μετά διαλέγουμε διάστημα $[A, B]$ με $0 < A \leq B < \infty$ το οποίο περιέχει το x. Αφού έχουμε αποδείξει ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει(ομοιόμορφα) στο $[A, B]$, συμπεραίνουμε ότι συγκλίνει και στο x. Ο.Ε.Δ.

Θεώρημα 8 *Το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ *ορίζει μια συνάρτηση στο* $(0, +\infty)$, *η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και* $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1}(logt)^n e^{-t}dt$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < x < +\infty$.

Απόδειξη

Άν $0 < A \leq B < \infty$, τότε στο διάστημα $[A, B]$ η σύγκλιση όλων των γενικευμένων ολοκληρωμάτων είναι ομοιόμορφη και οι συναρτήσεις $t^{x-1}(\log t)^n$ e^{-t} ειναι συνεχείς στο $(0, +\infty) \times [A, B]$ Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 6, συμπεραίνουμε οτι,

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} f_x(t, x)dt$$

όπου $f(t, x) = t^{x-1}e^{-t}$. Άρα $\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1}(\log t)e^{-t}dt$ στο $[A, B]$. Αφού τα A, B είναι αυθαίρετα,η ισότητα θα ισχύει σε ολόκληρο το $(0, \infty)$. Άν πάρουμε κι άλλη παράγωγο θα εμφανιστεί το $(logt)^2$ κ.ο.κ. Ο.Ε.Δ.

Θεώρημα 9 *Η συνάρτηση* $\Gamma(x)$ *έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

(α) Είναι θετική και $\Gamma(x) \to +\infty$ *καθώς* $x \to 0^+$ *ή* $x \to +\infty$

(β) $\Gamma(1) = 1, \Gamma(n) = (n-1)!, n \in \mathbb{N}$.

(γ) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x > 0$.

(δ) Η Γ *είναι κυρτή.*

Απόδειξη

(α) Αφού $t^{x-1}e^{-t} > 0$ για $0 < t < +\infty$, προφανώς: $\Gamma(x) > 0$.

$\Gamma(x) \geq \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt \geq e^{-1}\int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{ex}$. Άρα $\Gamma(x) \to +\infty$ καθώς $x \to 0^+$.

$\Gamma(x) > \int_2^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \geq 2^{x-1}\int_2^\infty e^{-t}dt = \frac{1}{e^2}2^{x-1}$, όταν $x \geq 1$. Άρα $\Gamma(x) \to +\infty$ καθώς $x \to +\infty$.

(γ) Με ολοκλήρωση κατά μέρη: $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = \int_0^\infty t^x(-e^{-t})'dt$ $= lim_{c\to\infty}c^x(-e^{-c}) - lim_{a\to 0^+}a^x(-e^{-a}) - \int_0^\infty (t^x)'(-e^{-t})dt = x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ $= x\Gamma(x)$.

(β) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$. Με επαγωγή, απο την $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, συμπεραίνουμε ότι $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \ldots =$ $(n-1)(n-2)\cdots 1\Gamma(1) = (n-1)!$.

(δ) $\Gamma''(x) = \int_0^\infty t^{x-1}(logt)^2 e^{-t}dt \geq 0$. Ο.Ε.Δ.

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι η συνάρτηση Γ είναι ορισμένη σε ολόκληρη την ημιευθεία $(0, +\infty)$ και στα διακριτά σημεία του $\mathbb{N}$ ταυτίζεται με την συνάρτηση «παραγοντικό».
(Ασκ. 6, 14, 22)

8.6 Ασκήσεις

Εύκολες

1. Στον ορισμό του $\int_{\leftarrow a}^{\to b} f$ αποδείξτε ότι το ενδιάμεσο σημείο d δεν επηρεάζει την σύγκλιση ή την απόκλιση ούτε την τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος

2. Αποδείξτε ότι, αν $r > 1$, το $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^r}dt$ συγκλίνει απολύτως (Υπόδ: συγκρίνατε με $\frac{1}{x^r}$) ενώ, αν $0 < r \leq 1$, το ίδιο ολοκλήρωμα συγκλίνει υπό συνθήκη.
(Υπόδ: μιμηθείτε το παράδειγμα με $r = 1$).

3. Αποδείξτε ότι το $\int_2^\infty x^r(\log x)^q dt$ συγκλίνει αν και μόνον αν
(α′) $r < -1$ ή (β′) $r = 1$, $q < -1$.
(Υπόδ: αλλαγή μεταβλητής $x = e^t$).
Ποιά σχέση σύμφωνα με το Θεώρημα 3, υπάρχει με σειρές πραγματικών αριθμών;

4. Αποδείξτε ότι τα $\int_1^\infty \sin^2(\frac{1}{x})dx$, $\int_0^\infty x^r e^{-x^q}dx$ $(r, q > 0)$ συγκλίνουν.
(Υπόδ: $|\sin t| \leq |t|$).

5. Αποδείξτε ότι τα $\int_0^1 \log x \log(1+x)dx$, $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{\sqrt{1-x}}dx$ συγκλίνουν

(Υπόδ: $\log(1+x) \leq x$ για $x > 0$ και, για το δεύτερο, αλλαγή μεταβλητής $1 - x = e^{-t}$).

6. Χρησιμοποιώντας οτι $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ και κάνοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής δείξτε ότι $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.Αποδείξτε ότι
$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (2n)! \frac{\sqrt{\pi}}{4^n n!}, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

7. Για $1 < x < \infty$ ορίζουμε $\zeta(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^x}$ Αποδείξτε ότι
   (α′) $\zeta(x) = x \int_1^\infty \frac{[t]}{t^{x+1}} dt$
   (β′) $\zeta(x) = \frac{x}{x-1} - x \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^{x+1}} dt$.

   Αποδείξτε ότι το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει για $x > 1$ ενώ το δεύτερο συγκλίνει για $x > 0$.

8. Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(t) = \frac{(-1)^n}{n}$ για $n - 1 \leq t < n, (n \in \mathbb{N})$. Αποδείξτε ότι το $\int_0^\infty f$ συγκλίνει υπό συνθήκην.

9. Έστω ότι η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και οτι $f(0) = 0, f'(0)$ υπάρχει (και είναι πραγματικός αριθμός). Αποδείξτε ότι το $\int_0^1 f(x) x^{\frac{-3}{2}} dx$ συγκλίνει απολύτως.

   (Υπόδ: $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$. Άρα η $\frac{f(x)}{x}$ ορίζεται στο $[0, 1]$ και είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Άρα είναι φραγμένη. Συγκρίνατε με το $\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx$.)

10. Προσδιορίστε τις τιμές του x για τις οποίες το καθένα απο τα
    (α′) $\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt$,
    (β′) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+t^2} dt$,
    (γ′) $\int_0^\infty \frac{\sin^2(tx)}{t^2} dt$,
    (δ′) $\int_0^\infty e^{-t^2} \cos(2tx) dt$
    συγκλίνει.

    (Υπόδ: (α) σύγκριση με $\frac{1}{1+t^2}$, (β) αλλαγή μεταβλητής $t = xs$, προσέξτε το $x = 0$, (γ) στο $[1, \infty)$ σύγκριση με $\frac{1}{t^2}$, (δ) σύγκριση με e^{-t^2})

11. (α′) Χρησιμοποιήστε την $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ μαζί με τον τύπο $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ για να δείξετε ότι $\int_0^\infty \frac{\sin x \cos x}{x} dx = \frac{\pi}{4}$.

(β′) Με ολοκλήρωση κατα μέρη στην (α) δείξτε ότι $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

(γ′) Από την (β),την $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,και αλλαγή $x = 2x'$ αποδείξτε οτι $\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

(δ′) Απο τη (γ) δείξτε ότι $\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$.

Μετριες

12. Βρείτε ποιά από τα παρακάτω ολοκληρώματα συγκλίνουν υπό συνθήκην και ποιά απολύτως

    (α′) $\int_0^\infty e^{-(t^2+t^{-2})} dt$,

    (β′) $\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$,

    (γ′) $\int_1^\infty \frac{\log t}{t\sqrt{t^2-1}} dt$,

    (δ′) $\int_0^\infty e^{-t} \sin(\frac{1}{t}) dt$.

13. Βρείτε τις τιμές των p, q για τις οποίες τα παρακάτω ολοκληρώματα συγκλίνουν είτε απολύτως είτε υπό συνθήκην

    (α′) $\int_0^1 t^p(1-t^2)^q dt$,

    (β′) $\int_0^\infty t^t e^{-t^p} dt$,

    (γ′) $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x} dx$,

    (δ′) $\int_0^\infty \frac{\sin(x^p)}{x^q} dx$,

    (ε′) $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx$.

14. Αποδείξτε ότι,αν $m, n \in \mathbb{N}$

    (α′) $\int_0^\infty \frac{(\sin t)^{2n+1}}{t} dt = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$,

    (β′) $\int_1^\infty \frac{\log t}{t^{n+1}} dt = \frac{1}{n^2}$,

    (γ′) $\int_0^\infty t^n(1+t)^{-n-m-1} dt = \frac{n!(m-1)!}{(m+n)!}$.

15. Έστω ότι $f(x) = (\int_0^x e^{-t^2} dt)^2, g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt$.

    (α′) Δείξτε ότι $f'(x)+g'(x) = 0$ για κάθε x και ότι $f(x)+g(x) = \frac{\pi}{4}$ για κάθε x (Υπόδ: $g(0) =?$) (Υπόδ: εφαρμόστε στην $g(x)$ το Λήμμα 2) (β′) Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Υπόδ: $0 \leq g(x) \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}e^{-x^2} \to 0$ για $x \to +\infty$)

16. Έστω $F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(2tx)dt, x \in \mathbb{R}$ (δες άσκηση 10δ) Εφαρμόστε το Θεώρημα 6 και αποδείξτε ότι $F'(x) + 2xF(x) = 0$ για κάθε x. Έτσι αποδείξτε ότι $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$ για κάθε x (Υπόδ: $F'(x)+2xF(x) = 0 \Rightarrow (e^{x^2}F(x))' = 0 \Rightarrow e^{x^2}F(x) =$σταθ . Θέσατε $x = 0$ και χρησιμοποιείστε την άσκηση 15β)

17. Στην άσκηση 7 αποδείξτε ότι το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[A, B]$, όπου $1 < A \leq B < \infty$. Επίσης το δεύτερο ολοκλήρωμα συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[A, B]$ όπου $0 < A \leq B < \infty$. Αποδείξτε την συνέχεια της $\zeta(x)$ στο $(1, \infty)$ καθώς και ότι

$$lim_{x\to 1^+}\zeta(x)(x-1) = 1$$

Δύσκολες

18. Τι πρόβλημα υπάρχει με τα ολοκληρώματα

(α′) $\int_0^\infty e^{-x}\log(\cos^2 x)dx$,

(β′) $\int_\pi^\infty (\log x)^p(\sin x)^{-\frac{1}{3}}dx$;

Και τι έχετε να πείτε σχετικά με τη σύγκλιση ή απόκλιση τους ;

19. Αποδείξτε ότι

(α′) το $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^8\sin^2 x}dx$ συγκλίνει,

(β′) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^8\sin^2 x}dx = +\infty$,

(γ′) το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^4\sin^2 x}dx$ συγκλίνει,

(δ′) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2\sin^2 x}dx = +\infty$.

20. Έστω ότι η f είναι $\mathbb{R}$-ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, b]$ όπου $0 < a \leq b < \infty$.

Ορίζουμε την συνάρτηση $g(t) = \frac{1}{t}\int_1^t f(s)ds, t > 0$. Έστω ότι το όριο $B = lim_{t\to+\infty}g(t)$ υπάρχει (στο $\mathbb{R}$).

Αν $a, b > 0$, τότε

(α′) $\int_a^b \frac{f(t)}{t}dt = g(b) - g(a) + \int_a^b \frac{g(t)}{t}dt$.

(β′) $lim_{T\to+\infty} \int_{aT}^{bT} \frac{f(t)}{t}dt = B\log(\frac{b}{a})$.

(γ′) $\int_1^{\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}dt = B\log(\frac{b}{a}) + \int_a^b \frac{f(t)}{t}dt$.

(δ′) 'Εστω ότι υπάρχει (στο $\mathbb{R}$) το όριο $A = lim_{t\to0^+} t\int_t^1 \frac{f(s)}{s^2}ds$. Τότε $\int_0^1 \frac{f(at)-f(bt)}{t}dt = A\log(\frac{b}{a}) - \int_a^b \frac{f(t)}{t}dt$.

(ε′) Απο (γ′) και (δ′) $\int_0^{\infty} \frac{f(at)-F(bt)}{t}dt = (B-A)\log(\frac{a}{b})$.

Χρησιμοποιείστε τα προηγούμενα για να υπολογίσετε τα

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(at)-\cos(bt)}{t}dt, \int_0^{\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt.$$

21. Έστω $F(x) = \int_0^{\infty} e^{-tx}\frac{\sin t}{t}dt$ για $x > 0$.

Αποδείξτε ότι $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}, x > 0$. Από εδώ προκύπτει ότι $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x, x > 0$.

Μετά αποδείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt = lim_{x\to0^+} \int_0^{\infty} e^{-tx}\frac{\sin t}{t}dt = lim_{x\to0^+}(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = \frac{\pi}{2}$$

(Υπόδ.Για το $F'(x)$ εφαρμόστε το Θεώρημα 6 και υπολογίστε το ολοκλήρωμα που προκύπτει με διπλή ολοκλήρωση κατά μέρη.

Κατόπιν: $F(x) - F(a) = \int_a^x \frac{1}{1+t^2}dt = -\arctan x + \arctan a$.

Αποδείξτε ότι, $lim_{a\to+\infty}F(a) = 0$ χρησιμοποιώντας το

$$\left|\int_0^{\infty} e^{-ta}\frac{\sin t}{t}dt\right| \leq \int_0^{\infty} e^{-ta}dt \longrightarrow 0$$

αν $a \to +\infty$

Για το $lim_{x\to0^+} \int_0^{\infty} e^{-tx}\frac{\sin t}{t}dt$ εφαρμόστε κριτήριο $Cauchy$ και $\sin t = (-\cos t)'$ για ολοκληρώση κατά μέρη για να αποδείξετε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$.

Αφού κάθε $F_n(x) = \int_0^n e^{-tx}\frac{\sin t}{t}dt$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ θα είναι και η $F(x)$).

22. Αποδείξτε οτι η συνάρτηση Γ φθίνει στο $(0,1]$ και αυξάνει στο $[1,\infty)$.

Το παρόν στοιχειοθετήθηκε σε μια πρώτη μορφή σαν άσκηση στο μάθημα «Εισαγωγή στη Γλώσσα Προγραμματισμού LaTeX» στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου, από τις φοιτήτριες και τους φοιτητές

Βαλαράκο Αλέξανδρο	Θωμά Ειρήνη	Μαμάρα Αννα
Μεϊντάνη Δημήτρη	Κολοβού Ξανθή	Κοτέ Μαριλένα
Παπαϊωάννου Μαρία	Σγώρα Αγγελική	

Η τελική στοιχειοθέτηση χρηματοδοτήθηκε από το Β′ Κοινοτικό Πλαίσιο Στήριξης, Εργο Ε.Π.Ε.Α.Ε.Κ. «Μαθηματικά για το 2001: Αναμόρφωση και Αναβάθμιση των Μαθηματικών Σπουδών στην Ελλάδα» και έγινε από τον

Σιδηρουργό Ελευθέριο