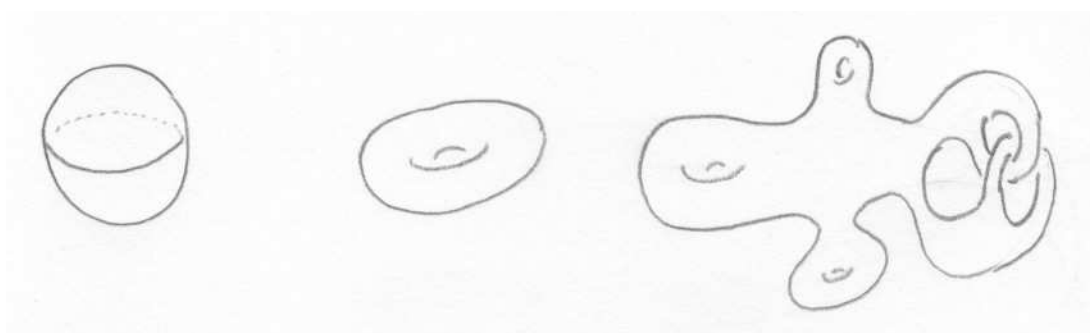

Σημειώσεις μαθήματος M2324
Γεωμετρική Τοπολογία

Χρήστος Κουρουνιώτης
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
2011

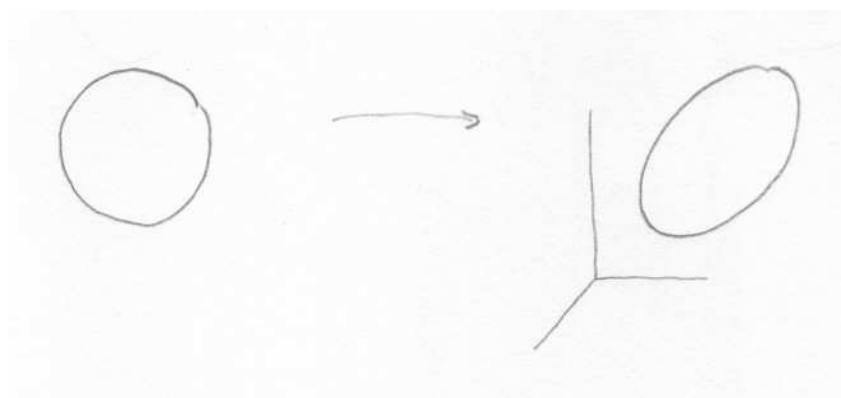
Εισαγωγή

Η Γεωμετρική Τοπολογία είναι ο κλάδος των μαθηματικών που μελετάει τα ολικά χαρακτηριστικά χώρων και απεικονίσεων μεταξύ τους. Για παράδειγμα, μία επιφάνεια είναι ένας χώρος που **τοπικά** είναι ίδιος με το επίπεδο. Αλλά **ολικά** μπορεί να έχει πολλά διαφορετικά σχήματα.



Σχήμα 1: Επιφάνειες.

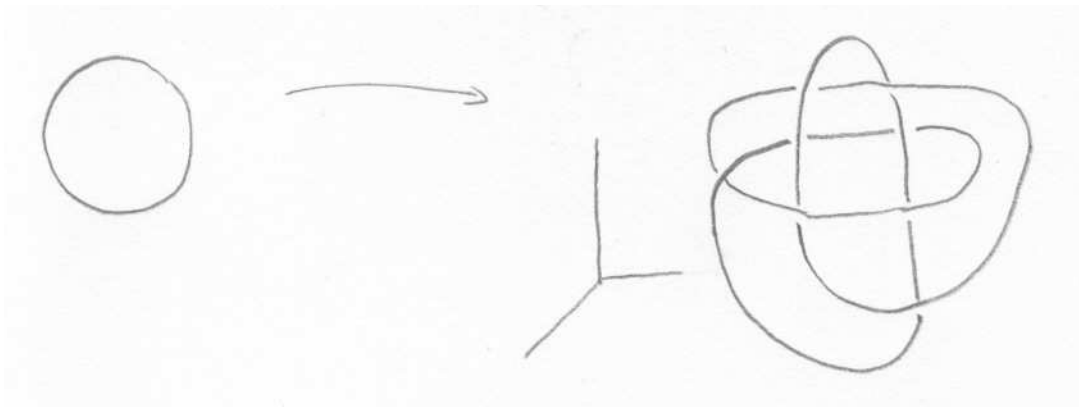
Μία απεικόνιση του κύκλου στον τριδιάστατο χώρο μπορεί να είναι πολύ απλή



Σχήμα 2: Κύκλος.

ή πολύ μπλεγμένη.

β'



Σχήμα 3: Κόμβος.

Τα προβλήματα της Γεωμετρικής Τοπολογίας αναφέρονται

- Στο χαρακτηρισμό τέτοιων χώρων. Για παράδειγμα, ποιές είναι οι ελάχιστες υποθέσεις που εξασφαλίζουν ότι ένας χώρος έχει το σχήμα μίας σφαίρας;
- Στην ταξινόμηση κατηγοριών τέτοιων χώρων. Υπάρχει ένας κατάλογος με όλα τα διαφορετικά σχήματα που μπορεί να έχει μία επιφάνεια;
- Στη μελέτη απεικονίσεων μεταξύ τέτοιων χώρων. Είναι αλήθεια ότι κάθε ε-νεικόνιση του κύκλου στο επίπεδο χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη; Υπάρχει απεικόνιση από το δίσκο στον εαυτό του χωρίς σταθερά σημεία;

Σε αυτό το μάθημα θα διαμορφώσουμε τις βασικές έννοιες για να μπορέσουμε να διατυπώσουμε με σαφήνεια ερωτήματα όπως τα παραπάνω, θα αναπτύξουμε διάφορα εργαλεία από τη συνδυαστική, την άλγεβρα, την ανάλυση και τη γεωμετρία, και θα τα χρησιμοποιήσουμε στη μελέτη δύο χαρακτηριστικών κατηγοριών αντικειμένων της Γεωμετρικής Τοπολογίας, των **επιφανειών** και των **κόμβων**. Θα ξεκινήσουμε με μία διαισθητική προσέγγιση αυτών των αντικειμένων, και θα αναπτύξουμε ad hoc εργαλεία για τη μελέτη τους. Στη συνέχεια θα εισαγάγουμε τις βασικές έννοιες της τοπολογίας για να θέσουμε σε αυστηρή βάση τις αναζητήσεις μας. (Η παρουσίαση θα είναι αυτοτελής και δεν προϋποθέτει παρακολούθηση του μαθήματος M2313 Τοπολογία.) Θα κατασκευάσουμε το βασικό αλγεβρικό εργαλείο, τη θεμελιώδη ομάδα, και θα το χρησιμοποιήσουμε για την περαιτέρω μελέτη των επιφανειών και των κόμβων.

Επιφάνειες

Η πιο απλή επιφάνεια που μας έρχεται στο νού είναι η σφαίρα. Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, τη σφαίρα με κέντρο στην αρχή των αξόνων και ακτίνα R ως το σύνολο των σημείων των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Για πολλές άλλες επιφάνειες μπορούμε να βρούμε ανάλογες αναπαραστάσεις, με εξισώσεις της μορφής $F(x, y, z) = 0$. Για να είναι 'λεία' η επιφάνεια, απαιτούμε να μην υπάρχουν κρίσιμα σημεία της F πάνω στην επιφάνεια. (Το σημείο (x, y, z) είναι κρίσιμο εάν $\nabla F(x, y, z) = 0$.)

Τα ελλειψοειδή με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

έχουν το ίδιο 'σχήμα' με τη σφαίρα, αλλά διαφορετικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά.

Η σπείρα (ή τόρος ή σαμπρέλα) είναι η επιφάνεια που λαμβάνουμε εάν περιστρέψουμε ένα κύκλο γύρω από έναν άξονα στο επίπεδο του κύκλου, ο οποίος δεν τέμνει τον κύκλο. Εάν περιστρέψουμε τον κύκλο με εξίσωση $(x - 2)^2 + z^2 = 1$, γύρω από τον z -άξονα, θα πάρουμε την επιφάνεια με εξίσωση

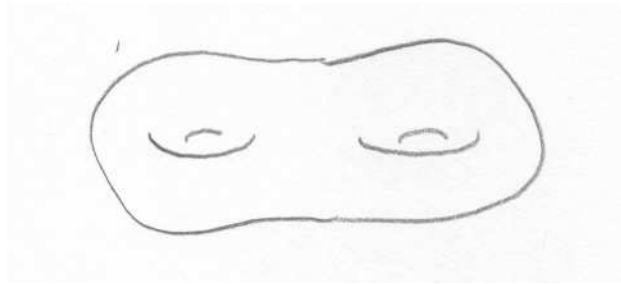
$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1.$$



Σχήμα 4: Σπείρα εκ περιστροφής.

Μπορούμε να φανταστούμε πιο πολύπλοκες επιφάνειες, όπως η διπλή σαμπρέλα, που δεν είναι επιφάνεια εκ περιστροφής. Μπορούμε να την αναπαραστήσουμε με μία εξίσωση; Δοκιμάστε!

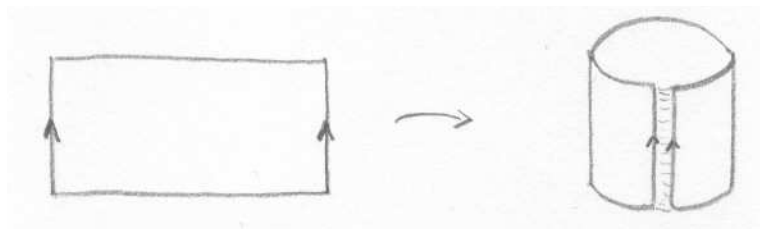
Η αναπαράσταση μίας επιφάνειας με μία εξίσωση είναι αρκετά περιοριστική. Περιέχει περισσότερες πληροφορίες από όσες χρειαζόμαστε για να μελετήσουμε το 'σχήμα' της



Σχήμα 5: Διπλή σαμπρέλα.

επιφάνειας. Ένας πιο ουσιαστικός λόγος για τον οποίο θέλουμε άλλους τρόπους αναπαράστασης επιφανειών είναι ότι η επιφάνεια που ορίζεται από μία εξίσωση της μορφής $F(x, y, z) = 0$ και δεν περιέχει κρίσιμα σημεία της F , πρέπει να έχει δύο πλευρές: από τη μία πλευρά η F είναι θετική και από την άλλη αρνητική. Θα δούμε όμως ότι υπάρχουν επιφάνειες που δεν έχουν δύο πλευρές.

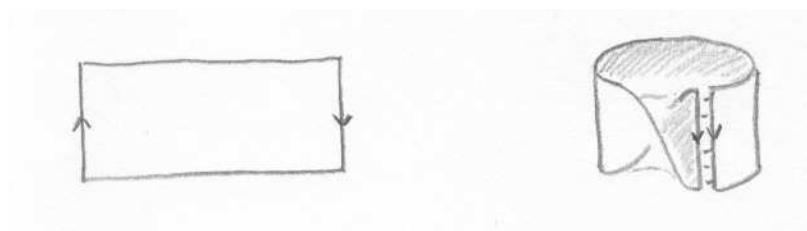
Μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν κύλινδρο χρησιμοποιώντας ένα φύλλο χαρτί και κολλώντας τις δύο απέναντι πλευρές. Το σχήμα αυτής της επιφάνειας είναι το ίδιο με την επιφάνεια με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ για $z^2 \leq 1$. Παρατηρήστε ότι αυτή η επιφάνεια έχει σύνορο, ενώ η σφαίρα ή η σπείρα δεν έχουν.



Σχήμα 6: Κύλινδρος.

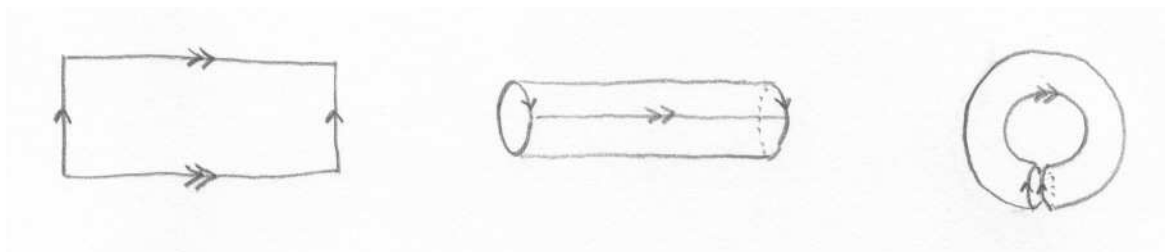
Όμως μπορούμε να κολλήσουμε τις απέναντι πλευρές του χαρτιού με την αντίθετη κατεύθυνση. Η επιφάνεια που κατασκευάζουμε τότε έχει σχήμα διαφορετικό από τον κύλινδρο, και κάποιες απρόσμενες ιδιότητες: η **ταινία του Möbius** έχει μόνο μία πλευρά, και μπορούμε να την κόψουμε κατά μήκος ενός κύκλου χωρίς να τη χωρίσουμε σε δύο μέρη.

Επιστρέφοντας στον κύλινδρο που κατασκευάσαμε κολλώντας τις δύο απέναντι πλευρές ενός φύλλου χαρτιού, μπορούμε να κολλήσουμε τις άλλες δύο πλευρές του χαρτιού (που έχουν γίνει δύο κύκλοι) και να πάρουμε μία άλλη επιφάνεια. Αυτό δεν μπορούμε να το κάνουμε στο χώρο χωρίς να τσαλακώσουμε το χαρτί, αλλά μπορούμε να φανταστούμε την επιφάνεια που προκύπτει. Έχει το σχήμα μίας σπείρας. Ενώ ό-



Σχήμα 7: Ταινία Möbius.

μως στη σπείρα εκ περιστροφής οι παράλληλοι έχουν διαφορετικό μήκος, σε αυτή την σπείρα όλοι οι παράλληλοι αντιστοιχούν σε οριζόντιες ευθείες στο χαρτί, και έχουν το ίδιο μήκος. Η επιφάνεια που κατασκευάσαμε είναι μία σπείρα, αλλά έχει γεωμετρία διαφορετική από αυτήν της σπείρας εκ περιστροφής.



Σχήμα 8: Επίπεδη σπείρα.

Κόμβοι

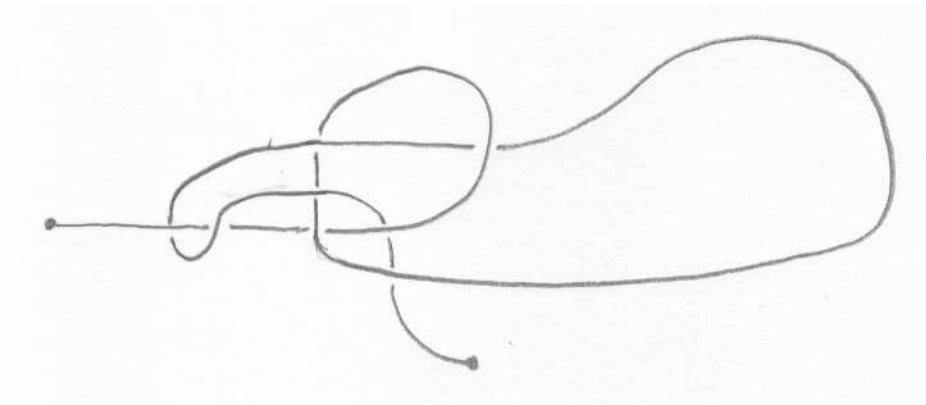
Οι κόμβοι είναι χρήσιμοι στην καθημερινή ζωή, και απαντώνται στην τέχνη πολλών πολιτισμών. Από μαθηματική άποψη, ένας κόμβος είναι μια συνεχής ενεικόνιση ενός διαστήματος στον \mathbb{R}^3 ,

$$K : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

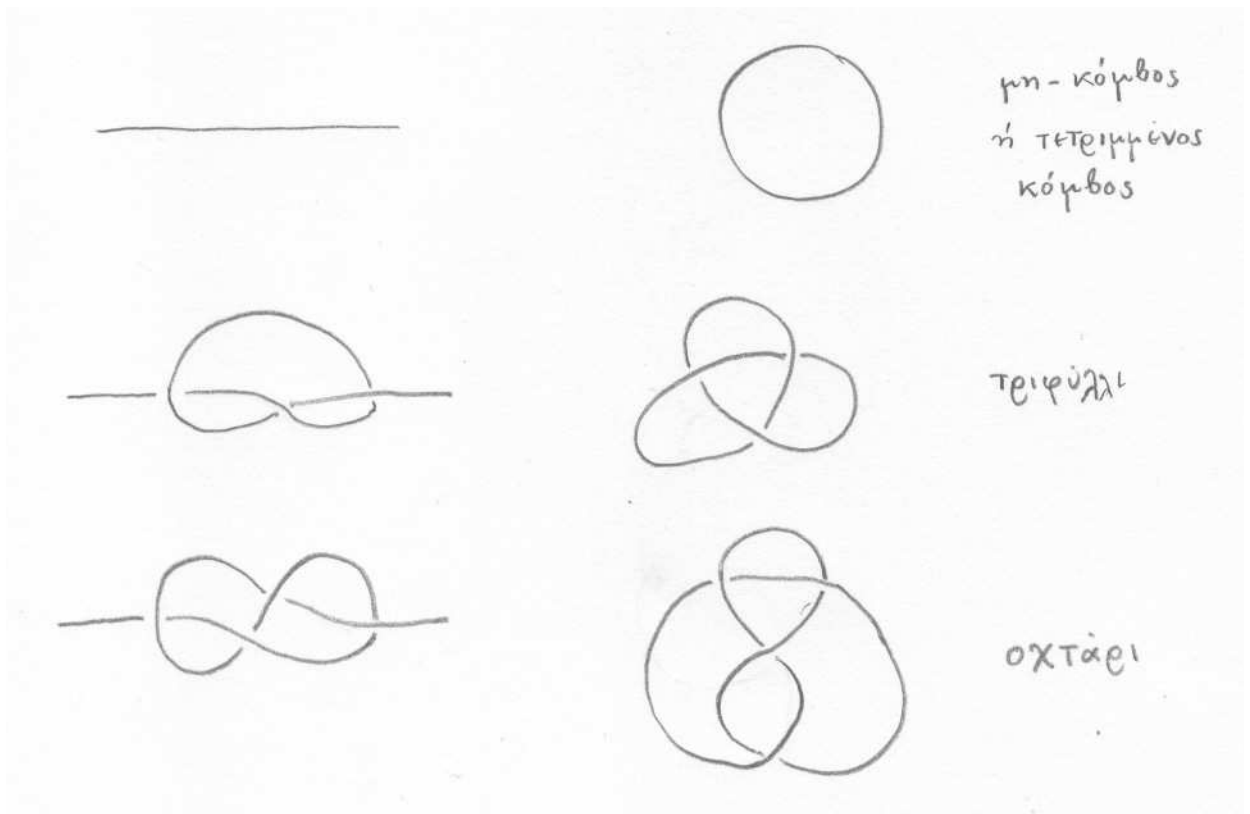
Εάν έχουμε τη δυνατότητα να κουνήσουμε τα άκρα του σχοιριού, τότε κάθε κόμβος μπορεί να λυθεί. Στα μαθηματικά, για να έχουμε κόμβους που δεν λύνονται, χωρίς να χρειάζεται να βάζουμε περιορισμούς στα άκρα, ενώνουμε τα δύο άκρα του διαστήματος. Ορίζουμε έναν **κόμβο** να είναι μία συνεχής ενεικόνιση του κύκλου $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ στο \mathbb{R}^3 ,

$$K : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Γενικότερα, θα θεωρήσουμε πολλά κυκλικά σχοιριά, μπλεγμένα σε ένα **σύνδεσμο**, δηλαδή την απεικόνιση πολλών κύκλων στο \mathbb{R}^3 .



Σχήμα 9: Κόμβος.



Σχήμα 10: Μη-Κόμβος, τριφύλλι, οχτάρι.

Αρχικά θα μελετήσουμε κόμβους και συνδέσμους μέσω των διαγραμμάτων τους, δηλαδή των προβολών τους στο επίπεδο. Αργότερα θα δούμε τη σχέση με τις απεικονίσεις στο \mathbb{R}^3 . Πριν από αυτά όμως πρέπει να γενικεύσουμε την έννοια της συνέχειας, ώστε να μπορούμε να μιλάμε για συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ χώρων πιο γενικών α-



Σχήμα 11: Σύνδεσμος Hopf, σύνδεσμος Borromeo.

πό τα υποσύνολα του \mathbb{R}^n που έχουμε δει μέχρι τώρα. Θα ορίσουμε **τοπολογικούς χώρους** και **συνεχείς απεικονίσεις** μεταξύ τοπολογικών χώρων.

Κεφάλαιο 1

Τοπολογία, ανοικτά σύνολα, συνέχεια

Στόχος μας είναι να επεκτείνουμε την έννοια της συνέχειας απεικονίσεων σε περιπτώσεις πιο γενικές από τους χώρους \mathbb{R}^n και τα υποσύνολά τους. Ξεκινάμε εξετάζοντας εναλλακτικούς χαρακτηρισμούς της συνέχειας στο \mathbb{R}^n .

Συνέχεια και ανοικτά σύνολα στο \mathbb{R}^n .

Για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Εάν $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι μία απεικόνιση και $x_0 \in \mathbb{R}^n$, λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0** εάν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ που απέχει λιγότερο από δ από το x_0 , δηλαδή που ικανοποιεί $\|x - x_0\| < \delta$, το $f(x)$ απέχει λιγότερο από ε από το $f(x_0)$, δηλαδή $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Εάν ορίσουμε τα σύνολα $U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$ και $V_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^m : \|y - f(x_0)\| < \varepsilon\}$, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε τον προηγούμενο ορισμό ως εξής:

Η f είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in U_\delta$ ισχύει $f(x) \in V_\varepsilon$.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της αντίστροφης εικόνας ενός συνόλου, αυτό γίνεται:

Η f είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $U_\delta \subseteq f^{-1}(V_\varepsilon)$.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό των ανοικτών συνόλων στο \mathbb{R}^n . Συμβολίζουμε $D(x, \varepsilon)$ τον ανοικτό δίσκο στο \mathbb{R}^n γύρω από το σημείο x : $D(x, \varepsilon) = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u - x\| < \varepsilon\}$.

Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται **ανοικτό** εάν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, \varepsilon) \subseteq A$.

Άσκηση 1.1 Χρησιμοποιήστε την ανισότητα $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για να δείξετε ότι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $\delta > 0$, το σύνολο $D(x_0, \delta)$ είναι ανοικτό.

Εξετάζουμε τη σχέση μεταξύ συνέχειας και ανοικτών συνόλων. Υπενθυμίζουμε ότι η f λέγεται συνεχής στο \mathbb{R}^n εάν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του \mathbb{R}^n .

Πρόταση 1.1 Εάν η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής στο \mathbb{R}^n και A είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^m , τότε $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n .

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in f^{-1}(A)$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $D(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(A)$. Θεωρούμε το σημείο $y_0 = f(x_0) \in A$. Αφού το A είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(y_0, \varepsilon) \subseteq A$. Άρα $x_0 \in f^{-1}(D(y_0, \varepsilon))$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 , υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $D(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(D(y_0, \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(A)$. Συνεπώς το A είναι ανοικτό. □

Θα δείξουμε ότι αυτή η ιδιότητα χαρακτηρίζει τις απεικονίσεις που είναι συνεχείς στο \mathbb{R}^n .

Πρόταση 1.2 Εάν για κάθε ανοικτό σύνολο A στο \mathbb{R}^m , η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό σύνολο στο \mathbb{R}^n , τότε η f είναι συνεχής στο \mathbb{R}^n .

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. Τότε ο δίσκος $V_\varepsilon = D(f(x_0), \varepsilon)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^m . Άρα η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(V_\varepsilon)$ είναι ανοικτό στο \mathbb{R}^n , και $x_0 \in f^{-1}(V_\varepsilon)$. Συνεπώς υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $D(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(V_\varepsilon)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 . Αυτό ισχύει για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$, άρα η f είναι συνεχής. □

Έχουμε αποδείξει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.3 Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής στο \mathbb{R}^n εάν και μόνον εάν για κάθε ανοικτό υποσύνολο A του \mathbb{R}^m , η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . □

Μπορούμε λοιπόν να εξακριβώσουμε εάν μία απεικόνιση είναι συνεχής εάν γνωρίζουμε τα ανοικτά υποσύνολα του πεδίου τιμών και του πεδίου ορισμού. Ποιές είναι οι χαρακτηριστικές ιδιότητες των ανοικτών υποσυνόλων;

Λήμμα 1.4 Τα ανοικτά υποσύνολα του \mathbb{R}^n έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Η ένωση μίας οικογένειας ανοικτών υποσυνόλων του \mathbb{R}^n είναι ανοικτό υποσύνολο.
2. Η τομή κάθε πεπερασμένης οικογένειας ανοικτών υποσυνόλων του \mathbb{R}^n είναι ανοικτό υποσύνολο.

Απόδειξη.

1. Θεωρούμε την οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$, $i \in I$. Εάν $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, τότε $x \in A_j$ για κάποιο $j \in I$. Αφού το A_j είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, \varepsilon) \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ και συνεπώς η ένωση είναι ανοικτό υποσύνολο.
2. Θεωρούμε την πεπερασμένη οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$. Εάν $x \in \bigcap_{i=1}^k A_i$, τότε $x \in A_i$ για κάθε $i = 1, \dots, k$. Αφού κάθε A_i είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_i > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, \varepsilon_i) \subseteq A_i$. Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i = 1, \dots, k\}$. Τότε $D(x, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^k A_i$ και συνεπώς η τομή είναι ανοικτό υποσύνολο.

□

Υπενθυμίζουμε ότι η τομή μίας άπειρης οικογένειας ανοικτών συνόλων μπορεί να μην είναι ανοικτό σύνολο. Για παράδειγμα, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n) = \{0\}$.

Τοπολογία.

Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες στο Λήμμα 1.4 για να ορίσουμε ανοικτά υποσύνολα σε οποιοδήποτε σύνολο.

Ορισμός. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μία οικογένεια \mathcal{T} από υποσύνολα του X , $\mathcal{T} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, ονομάζεται **τοπολογία** στο X εάν

1. Το κενό σύνολο και το X ανήκουν στην οικογένεια,

$$\emptyset \in \mathcal{T} \quad , \quad X \in \mathcal{T} .$$

2. Η ένωση κάθε υποοικογένειας της \mathcal{T} ανήκει στην οικογένεια \mathcal{T} ,

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{T} .$$

3. Η τομή κάθε πεπερασμένου υποσυνόλου της \mathcal{T} ανήκει στην οικογένεια \mathcal{T} ,

$$\mathcal{A} = \{A_i \in \mathcal{T} : i = 1, \dots, k\} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^k A_i \in \mathcal{T} .$$

Το ζεύγος (X, \mathcal{T}) ονομάζεται **τοπολογικός χώρος**. Τα σύνολα $A \in \mathcal{T}$ ονομάζονται **ανοικτά** υποσύνολα του τοπολογικού χώρου (X, \mathcal{T}) .

Ορισμός. Εάν (X, \mathcal{T}) και (Y, \mathcal{U}) είναι τοπολογικοί χώροι, μία απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ λέγεται **συνεχής** εάν για κάθε ανοικτό σύνολο B στο Y , $B \in \mathcal{U}$, η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό σύνολο στο X , $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Παρατηρούμε ότι η συνέχεια μίας απεικόνισης δεν εξαρτάται μόνον από τα σύνολα στα οποία ορίζεται η απεικόνιση, αλλά και από την τοπολογία των δύο χώρων. Η ίδια απεικόνιση, μπορεί να είναι συνεχής με κάποιες τοπολογίες, και μη συνεχής με κάποιες άλλες. Σε κάθε περίπτωση, η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής.

Λήμμα 1.5 Εάν (X, \mathcal{T}) , (Y, \mathcal{U}) και (Z, \mathcal{W}) είναι τοπολογικοί χώροι, και οι απεικονίσεις $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$ είναι συνεχείς, τότε η σύνθεση $g \circ f : X \rightarrow Z$ είναι συνεχής απεικόνιση.

Απόδειξη. Έστω A ανοικτό υποσύνολο του Z . Υπενθυμίζουμε ότι $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. Αφού g είναι συνεχής, $g^{-1}(A)$ είναι ανοικτό στο Y , και αφού f είναι συνεχής, $f^{-1}(g^{-1}(A))$ είναι ανοικτό στο X . Άρα η $g \circ f$ είναι συνεχής. □

Παράδειγμα 1.1 Όπως είδαμε, το σύνολο των ανοικτών υποσυνόλων του \mathbb{R}^n ικανοποιεί τις ιδιότητες μίας τοπολογίας. Αυτή την τοπολογία την ονομάζουμε **ευκλείδεια τοπολογία** του \mathbb{R}^n . Οι απεικονίσεις $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ που είναι συνεχείς, με τον αναλυτικό ορισμό, σε κάθε σημείο του \mathbb{R}^n , είναι συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ των τοπολογικών χώρων \mathbb{R}^n και \mathbb{R}^m με την ευκλείδεια τοπολογία.

Παράδειγμα 1.2 Σε οποιοδήποτε μη κενό σύνολο X , το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X αποτελεί μία τοπολογία στο X , $\mathcal{D} = \mathfrak{P}(X)$. Είναι απλό να ελέγξουμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες. Αυτή η τοπολογία ονομάζεται **διακριτή τοπολογία** στο X . Εάν ο χώρος X έχει τη διακριτή τοπολογία, τότε κάθε απεικόνιση από τον X σε κάποιο τοπολογικό χώρο Y είναι συνεχής, αφού κάθε υποσύνολο του X είναι ανοικτό.

Παράδειγμα 1.3 Σε οποιοδήποτε μη κενό σύνολο Y , το σύνολο $\mathcal{I} = \{\emptyset, Y\}$ αποτελεί μία τοπολογία στο Y . Είναι απλό να ελέγξουμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες. Αυτή η τοπολογία ονομάζεται **τετριμμένη τοπολογία** στο Y . Εάν ο χώρος Y έχει την τετριμμένη τοπολογία, τότε κάθε απεικόνιση από κάποιο τοπολογικό χώρο X στον Y είναι συνεχής, αφού η αντίστροφη εικόνα του Y είναι το X και η αντίστροφη εικόνα του $\emptyset \subseteq Y$ είναι το $\emptyset \subseteq X$.

Παράδειγμα 1.4 Πόσες διαφορετικές τοπολογίες ορίζονται σε ένα σύνολο με δύο στοιχεία; Έστω $X = \{0, 1\}$. Το δυναμοσύνολο του X έχει τέσσερα στοιχεία, $\mathfrak{P}(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Γνωρίζουμε την τετριμμένη τοπολογία $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{0, 1\}\}$, και τη διακριτή τοπολογία $\mathcal{D} = \mathfrak{P}(X)$. Εάν υπάρχει κάποια άλλη τοπολογία στο X , αυτή θα έχει τρία ανοικτά σύνολα. Ελέγξτε ότι το σύνολο $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες μίας τοπολογίας. Το σύνολο X με αυτή την τοπολογία ονομάζεται **χώρος Sierpinski** και θα το συμβολίζουμε $2_{\mathcal{S}}$.

Άσκηση 1.2 Ελέγξτε ότι $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες μίας τοπολογίας στο $X = \{0, 1\}$. Το σύνολο $\mathcal{S}' = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$ επίσης ικανοποιεί τις ιδιότητες μίας τοπολογίας στο X . Ελέγξτε σε ποιές από τις ακόλουθες περιπτώσεις είναι η ταυτοτική απεικόνιση συνεχής;

$$(X, \mathcal{I}) \longrightarrow (X, \mathcal{D}) \quad , \quad (X, \mathcal{S}) \longrightarrow (X, \mathcal{I}) \quad , \quad (X, \mathcal{I}) \longrightarrow (X, \mathcal{S})$$

$$(X, \mathcal{S}) \longrightarrow (X, \mathcal{D}) \quad , \quad (X, \mathcal{D}) \longrightarrow (X, \mathcal{S}) \quad , \quad (X, \mathcal{S}') \longrightarrow (X, \mathcal{S}).$$

Ορισμός. Έστω ένας τοπολογικός χώρος (X, \mathcal{T}) . Ένα υποσύνολο $F \subseteq X$ ονομάζεται **κλειστό υποσύνολο** του τοπολογικού χώρου (X, \mathcal{T}) εάν $X \setminus F$ είναι ανοικτό, $X \setminus F \in \mathcal{T}$.

Προσοχή! ‘Κλειστό’ δεν είναι η άρνηση του ‘ανοικτό’. Ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου μπορεί να είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό. Στους πιο συνηθισμένους χώρους, τα περισσότερα υποσύνολα δεν είναι ούτε το ένα ούτε το άλλο.

Πρόταση 1.6 Η οικογένεια των κλειστών συνόλων ενός τοπολογικού χώρου (X, \mathcal{T}) , έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

1. Το κενό σύνολο και το σύνολο X είναι κλειστά.
2. Η ένωση κάθε πεπερασμένης οικογένειας κλειστών υποσυνόλων του X είναι κλειστό υποσύνολο του X .
3. Η τομή κάθε οικογένειας κλειστών υποσυνόλων του X είναι κλειστό υποσύνολο του X .

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στους κανόνες De Morgan.

1. $\emptyset = X \setminus X$ και $X = X \setminus \emptyset$.

2. Εάν $F_i, i = 1, \dots, k$ είναι κλειστά υποσύνολα του X , τότε

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^k F_i = \bigcap_{i=1}^k (X \setminus F_i),$$

το οποίο είναι ανοικτό, ως πεπερασμένη τομή ανοικτών υποσυνόλων του X .

3. Εάν \mathcal{F} είναι μία οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X ,

$$X \setminus \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} (X \setminus F),$$

το οποίο είναι ανοικτό, ως ένωση ανοικτών υποσυνόλων του X .

□

Άσκηση 1.3 Δείξτε ότι η απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής εάν και μόνον εάν για κάθε κλειστό υποσύνολο $F \subseteq Y$, η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X .

Παράδειγμα 1.5 Στο \mathbb{R}^n μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα κλειστά υποσύνολα ως τα υποσύνολα που περιέχουν τα όρια όλων των συγκλινουσών ακολουθιών τους. Πιο συγκεκριμένα, εάν F είναι κλειστό υποσύνολο του τοπολογικού χώρου \mathbb{R}^n με την ευκλείδεια τοπολογία, (a_i) είναι μία συγκλίνουσα ακολουθία στο \mathbb{R}^n και $a_i \in F$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, τότε $\lim a_i \in F$. Αντίστροφα, εάν για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία (a_i) στο \mathbb{R}^n για την οποία $a_i \in F$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, ισχύει $\lim a_i \in F$, τότε F είναι κλειστό. Στην Πρόταση 1.8 θα αποδείξουμε μία γενίκευση αυτού του αποτελέσματος.

Μετρική τοπολογία.

Ένας χρήσιμος τρόπος να ορίσουμε μία τοπολογία είναι να ορίσουμε την απόσταση μεταξύ των σημείων του X χρησιμοποιώντας μία μετρική.

Ορισμός. Μία συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται **μετρική** στο σύνολο X , εάν για κάθε $x, y, z \in X$,

1. $d(x, y) = d(y, x)$.
2. $d(x, y) \geq 0$, και $d(x, y) = 0$ μόνον όταν $x = y$.
3. Τριγωνική ανισότητα: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Το ζεύγος (X, d) ονομάζεται **μετρικός χώρος**.

Στο μετρικό χώρο (X, d) , ορίζουμε τον **ανοικτό δίσκο** με κέντρο $x \in X$ και ακτίνα r , να είναι το σύνολο $D(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\}$. Παρατηρούμε ότι εάν $r > \delta > 0$, τότε $D(x, \delta) \subseteq D(x, r)$.

Ένα υποσύνολο A του X λέγεται **ανοικτό** ως προς τη μετρική d εάν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, \varepsilon) \subseteq A$.

Άσκηση 1.4 Δείξτε ότι ο ανοικτός δίσκος $D(x, r)$ είναι ανοικτό σύνολο ως προς τη μετρική d .

Λήμμα 1.7 Το σύνολο των ανοικτών συνόλων στο X ως προς τη μετρική d αποτελεί μία τοπολογία στο X , τη **μετρική τοπολογία** \mathcal{T}_d .

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη της απόδειξης του Λήμματος 1.4. □

Παράδειγμα 1.6 Η συνάρτηση $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = \|x - y\|$ είναι μετρική, η **ευκλείδεια μετρική** στο \mathbb{R}^n . Οι δύο πρώτες ιδιότητες είναι προφανείς, ενώ η τρίτη προκύπτει από την ανισότητα $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Η τοπολογία της μετρικής d είναι η ευκλείδεια τοπολογία του \mathbb{R}^n .

Άσκηση 1.5 Δείξτε ότι σε οποιοδήποτε σύνολο X , η συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } x = y \\ 1 & \text{εάν } x \neq y \end{cases}$$

αποτελεί μετρική, και ότι η τοπολογία της μετρικής d είναι η διακριτή τοπολογία στο X .

Σε ένα μετρικό χώρο μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της σύγκλισης ακολουθιών. Η ακολουθία (x_i) , $x_i \in X$, συγκλίνει στο μετρικό χώρο (X, d) , με όριο $\lim x_i = x$, εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n > n_0$ ισχύει $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Άσκηση 1.6 Δείξτε ότι οι μόνες ακολουθίες που συγκλίνουν ως προς τη μετρική της Άσκησης 1.5 είναι οι τελικά σταθερές ακολουθίες.

Πρόταση 1.8 Έστω μετρικός χώρος (X, d) . Το υποσύνολο $F \subseteq X$ είναι κλειστό ως προς τη μετρική τοπολογία εάν και μόνον εάν για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία (x_n) στο X , με $x_i \in F$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, ισχύει $\lim x_n \in F$.

Απόδειξη. Έστω F κλειστό. Θεωρούμε συγκλίνουσα ακολουθία (x_n) με $x_n \in F$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι $\lim x_n = x \notin F$. Τότε $x \in X \setminus F$, το οποίο είναι

ανοικτό. Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus F$. Αλλά τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x) > \varepsilon$, αντίφαση. Άρα $\lim x_n \in F$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι F δεν είναι κλειστό. Τότε $X \setminus F$ δεν είναι ανοικτό, και υπάρχει $x_0 \in X \setminus F$ τέτοιο ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $D(x_0, 1/k) \not\subseteq X \setminus F$. Αυτό σημαίνει ότι $D(x_0, 1/k) \cap F \neq \emptyset$. Επιλέγουμε $x_k \in D(x_0, 1/k) \cap F$. Η ακολουθία (x_k) συγκλίνει στο x_0 , αφού $d(x_k, x_0) < 1/k$.

□

Άσκηση 1.7 Δείξτε ότι εάν d είναι μετρική στο X και Y είναι υποσύνολο του X , ο περιορισμός $d|_{Y \times Y} : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζει μία μετρική στο Y .

Συμπεραίνουμε ότι κάθε υποσύνολο του \mathbb{R}^n έχει μία τοπολογία επαγόμενη από την ευκλείδεια μετρική στο \mathbb{R}^n . Θα δούμε ότι γενικότερα, για κάθε τοπολογικό χώρο, μπορούμε να ορίσουμε μία κανονική τοπολογία σε κάθε υποσύνολο του χώρου.

Περιοχές και συνέχεια σε ένα σημείο

Εάν X είναι τοπολογικός χώρος και x είναι σημείο του X , ένα υποσύνολο $U \subseteq X$ ονομάζεται **περιοχή** του σημείου x εάν υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο A του X τέτοιο ώστε $x \in A \subseteq U$.

Παράδειγμα 1.7 Ένα ανοικτό σύνολο είναι περιοχή όλων των σημείων του. Εάν U είναι περιοχή του x και $U \subseteq V$, τότε V είναι περιοχή του x .

Ορισμός. Έστω απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ και σημείο x του X . Λέμε ότι η **απεικόνιση f είναι συνεχής στο σημείο x** εάν για κάθε περιοχή V του $f(x)$, υπάρχει περιοχή U του x , τέτοια ώστε $f(U) \subseteq V$.

Πρόταση 1.9 Η απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής εάν και μόνον εάν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X .

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής. Εάν $x \in X$ και V είναι περιοχή του $f(x)$, υπάρχει ανοικτό υποσύνολο B του Y , τέτοιο ώστε $f(x) \in B \subseteq V$. Αφού η f είναι συνεχής, $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X . Αλλά $x \in f^{-1}(B)$, και συνεπώς $U = f^{-1}(B)$ είναι περιοχή του x τέτοια ώστε $f(U) \subseteq V$.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, θεωρούμε ανοικτό υποσύνολο B του Y . Για κάθε $x \in f^{-1}(B)$, το σύνολο B είναι περιοχή του $f(x)$. Άρα υπάρχει περιοχή U_x του x , τέτοια ώστε $f(U_x) \subseteq B$. Συνεπώς υπάρχει ανοικτό υποσύνολο A_x του X , τέτοιο ώστε $A_x \subseteq U_x$. Αλλά τότε $f^{-1}(B) = \bigcup_{x \in f^{-1}(B)} A_x$, άρα είναι ανοικτό, και η f είναι

συνεχής.

□

Σχετική Τοπολογία.

Ορισμός. Εάν (X, \mathcal{T}) είναι τοπολογικός χώρος και Y είναι υποσύνολο του X , το σύνολο των τομών του Y με ανοικτά υποσύνολα του X αποτελεί μία τοπολογία στο Y .

$$\mathcal{T}_Y = \{A \subseteq Y : A = B \cap Y \text{ για } B \in \mathcal{T}\}.$$

Η τοπολογία \mathcal{T}_Y ονομάζεται **σχετική τοπολογία** στο Y ως υποσύνολο του X , και ο τοπολογικός χώρος (Y, \mathcal{T}_Y) **τοπολογικός υπόχωρος** του (X, \mathcal{T}) .

Άσκηση 1.8 Θεωρούμε το διάστημα $[0, 1]$ με τη σχετική τοπολογία ως υποσύνολο του \mathbb{R} (με την ευκλείδεια τοπολογία). Ποιά από τα ακόλουθα σύνολα είναι ανοικτά υποσύνολα του $[0, 1]$;

$$[0, 1] \quad , \quad [0, 1/2) \quad , \quad (0, 1/2) \quad , \quad [1/3, 2/3).$$

Άσκηση 1.9 Θεωρούμε το σύνολο των ρητών \mathbb{Q} με τη σχετική τοπολογία ως υποσύνολο του \mathbb{R} (με την ευκλείδεια τοπολογία). Ποιά από τα ακόλουθα σύνολα είναι ανοικτά υποσύνολα του \mathbb{Q} ;

$$(0, 2) \cap \mathbb{Q} \quad , \quad (0, 2] \cap \mathbb{Q} \quad , \quad (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \quad , \quad (0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}.$$

Άσκηση 1.10 Δείξτε ότι η απεικόνιση $\sigma : [0, 1] \rightarrow 2_S$ από το κλειστό διάστημα (με τη σχετική τοπολογία) στο χώρο Sierpinski,

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } x < 1/2 \\ 1 & \text{εάν } x \geq 1/2 \end{cases}$$

είναι συνεχής.

Παράδειγμα 1.8 Η απεικόνιση του υποσυνόλου Y στο X , $\iota : Y \rightarrow X$, $\iota(y) = y$ ονομάζεται **ένθεση** και είναι συνεχής ως απεικόνιση από το (Y, \mathcal{T}_Y) στο (X, \mathcal{T}) . Πράγματι, η αντίστροφη εικόνα ενός ανοικτού υποσυνόλου $A \subseteq X$ είναι ακριβώς το σύνολο $A \cap Y$, το οποίο είναι ανοικτό στη σχετική τοπολογία.

Παράδειγμα 1.9 Εάν $f : X \rightarrow Z$ είναι συνεχής απεικόνιση και $Y \subseteq X$, ο περιορισμός της f στο Y , $f|_Y : Y \rightarrow Z$ είναι συνεχής απεικόνιση ως προς τη σχετική τοπολογία του Y . Πράγματι, εάν A είναι ανοικτό στο Z , $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό στο X , ενώ $(f|_Y)^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap Y$, το οποίο είναι ανοικτό στη σχετική τοπολογία.

Παράδειγμα 1.10 Εάν X είναι ένας χώρος με μετρική d , και Y ένα υποσύνολο του X , έχουμε δει δύο τρόπους να ορίσουμε μία κανονική τοπολογία στο Y ως υποσύνολο του X :

1. Τη μετρική τοπολογία του Y που ορίζεται από την επαγόμενη μετρική $d|_{Y \times Y}$
2. Τη σχετική τοπολογία στο Y , $(\mathcal{T}_d)_Y$.

Θα δείξουμε ότι αυτές οι δύο τοπολογίες είναι ίσες, συγκεκριμένα ότι:

Ένα υποσύνολο A του Y είναι ανοικτό ως προς τη μετρική $d|_{Y \times Y}$ εάν και μόνον εάν υπάρχει ανοικτό υποσύνολο B του X τέτοιο ώστε $A = B \cap Y$.

Έστω $A \in \mathcal{T}_{d|_{Y \times Y}}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ τέτοιο ώστε ο ανοικτός δίσκος $D_Y(x, \varepsilon_x) = \{y \in Y : d(x, y) < \varepsilon_x\}$ περιέχεται στο A . Παρατηρούμε ότι $A = \bigcup_{x \in A} D_Y(x, \varepsilon_x)$. Θεωρούμε τον ανοικτό δίσκο στο X , $D_X(x, \varepsilon_x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon_x\}$. Προφανώς $D_Y(x, \varepsilon_x) = D_X(x, \varepsilon_x) \cap Y$. Το σύνολο $B = \bigcup_{x \in A} D_X(x, \varepsilon_x)$ είναι ανοικτό στο X , αφού είναι ένωση ανοικτών δίσκων. Τότε

$$\begin{aligned} B \cap Y &= \left(\bigcup_{x \in A} D_X(x, \varepsilon_x) \right) \cap Y \\ &= \bigcup_{x \in A} (D_X(x, \varepsilon_x) \cap Y) \\ &= \bigcup_{x \in A} D_Y(x, \varepsilon_x) \\ &= A \end{aligned}$$

Συνεπώς $A \in (\mathcal{T}_d)_Y$.

Έστω τώρα $A \in (\mathcal{T}_d)_Y$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει B ανοικτό στο X τέτοιο ώστε $A = B \cap Y$. Αφού B είναι ανοικτό στο X , για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ τέτοιο ώστε $D_X(x, \varepsilon_x) \subseteq B$. Ο αντίστοιχος ανοικτός δίσκος στο Y είναι $D_Y(x, \varepsilon_x) = D_X(x, \varepsilon_x) \cap Y \subseteq B \cap Y = A$. Συνεπώς $A \in \mathcal{T}_{d|_{Y \times Y}}$.

Ομοιομορφισμοί, εμφυτεύσεις.

Ορισμός. Εάν X και Y είναι τοπολογικοί χώροι, και $f : X \rightarrow Y$ απεικόνιση, η f ονομάζεται **ομοιομορφισμός** εάν η f είναι αμφιμονοσήμαντη και συνεχής, και η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} : Y \rightarrow X$ είναι επίσης συνεχής. Δύο τοπολογικοί χώροι X και Y λέγονται **ομοιομορφικοί** εάν υπάρχει ομοιομορφισμός $f : X \rightarrow Y$. Το συμβολίζουμε $X \cong Y$.

Παράδειγμα 1.11 Θεωρούμε το διάστημα $(-1, 1)$ με τη σχετική τοπολογία ως υπόχωρο του \mathbb{R} . Η απεικόνιση $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ είναι ομοιομορφισμός. Εύκολα ελέγχουμε ότι η αντίστροφη απεικόνιση είναι συνεχής. Η απεικόνιση $g(x) = \tan(\frac{x\pi}{2})$ είναι επίσης ομοιομορφισμός από το $(-1, 1)$ στο \mathbb{R} .

Παράδειγμα 1.12 Στο σύνολο $X = \{0, 1\}$ έχουμε δει τις τοπολογίες $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ και $\mathcal{S}' = \{\emptyset, \{1\}, X\}$. Η απεικόνιση $f(0) = 1, f(1) = 0$ είναι ομοιομορφισμός από το (X, \mathcal{S}) στο (X, \mathcal{S}') .

Παράδειγμα 1.13 Δύο χώροι με τη διακριτή τοπολογία είναι ομοιομορφικοί εάν και μόνον εάν έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Παράδειγμα 1.14 Στο \mathbb{C} ορίζουμε τη μετρική τοπολογία από τη μετρική $d(z, w) = |z - w|$. Με αυτή την τοπολογία η απεικόνιση $(x, y) \mapsto x + iy$ είναι ομοιομορφισμός από το \mathbb{R}^2 στο \mathbb{C} .

Θεωρούμε το διάστημα $[0, 1)$ με τη σχετική τοπολογία ως υπόχωρο του \mathbb{R} , και τον κύκλο $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ με τη σχετική τοπολογία ως υπόχωρο του \mathbb{C} . Η απεικόνιση $f(t) = e^{2\pi it}$ από το $[0, 1)$ στο S^1 είναι συνεχής και αμφιμονοσήμαντη, αλλά δεν είναι ομοιομορφισμός. Εάν $g : S^1 \rightarrow [0, 1)$ είναι η αντίστροφη απεικόνιση, η αντίστροφη εικόνα του ανοικτού συνόλου $[0, 1/2)$ είναι $g^{-1}([0, 1/2)) = \{e^{2\pi it} : 0 \leq t < 1/2\}$, το οποίο δεν είναι ανοικτό στο S^1 .

Εάν αφαιρέσουμε τα δύστροπα σημεία, έχουμε ομοιομορφισμό $\tilde{f} : (0, 1) \rightarrow S^1 \setminus \{1\}$.

Ένας ομοιομορφισμός $f : X \rightarrow Y$ ορίζει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των ανοικτών υποσυνόλων του X και των ανοικτών υποσυνόλων του Y . Συνεπώς κάθε τοπολογική ιδιότητα – δηλαδή κάθε ιδιότητα που μπορεί να διατυπωθεί με αναφορά στα ανοικτά υποσύνολα ενός χώρου – που ισχύει στο X ισχύει και στο Y , και αντίστροφα. Από τοπολογική άποψη, οι χώροι X και Y είναι ισοδύναμοι. Θα θέλαμε να μπορούμε να διακρίνουμε πότε δύο τοπολογικοί χώροι είναι ομοιομορφικοί και πότε όχι. Δεν είναι δυνατόν να γίνει αυτό αλγοριθμικά για όλους τους τοπολογικούς χώρους. Όμως

υπάρχουν κατηγορίες τοπολογικών χώρων για τις οποίες είναι δυνατόν να δωθούν απαντήσεις, και υπάρχουν πολλά εργαλεία που μας επιτρέπουν να διακρίνουμε χώρους που δεν είναι ομοιομορφικοί.

Ορισμός. Μία απεικόνιση $f : Y \longrightarrow X$ ονομάζεται **εμφύτευση** εάν η f είναι συνεχής *εικόνιση*, και η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : Y \longrightarrow f(Y)$ είναι ομοιομορφισμός ως προς τη σχετική τοπολογία του $f(Y)$.

Παράδειγμα 1.15 Κάθε ένθεση ενός υπόχωρου Y του τοπολογικού χώρου X είναι εμφύτευση. Σε μία ένθεση, $f(Y) = Y$ με τη σχετική τοπολογία ως υπόχωρος του X .

Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t, t^2)$ είναι εμφύτευση: η απεικόνιση $(t, t^2) \mapsto t$ είναι συνεχής, αφού είναι ο περιορισμός στο $f(\mathbb{R})$ της απεικόνισης $(t, s) \mapsto t$ από το \mathbb{R}^2 στο \mathbb{R} .

Η απεικόνιση $f : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{2\pi it}$ δεν είναι εμφύτευση. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 1.14, η εικόνα της f με τη σχετική τοπολογία δεν είναι ομοιομορφική με το διάστημα $[0, 1)$.

Ορισμός. Ένας **κόμβος** είναι μία εμφύτευση από τον κύκλο S^1 στο χώρο \mathbb{R}^3 .

Κεφάλαιο 2

Διαγράμματα κόμβων και συνδέσμων

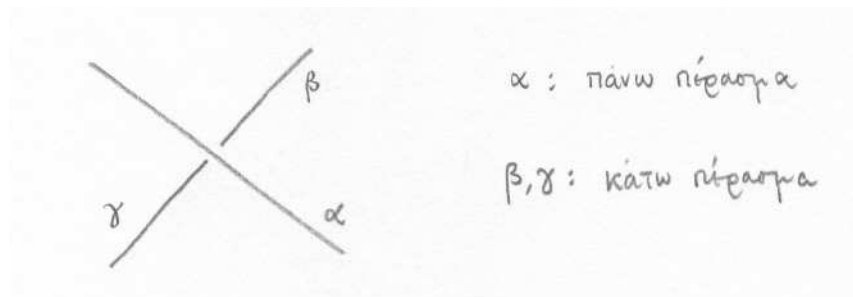
Ορίσαμε έναν κόμβο να είναι μία εμφύτευση από τον κύκλο S^1 στο χώρο \mathbb{R}^3 . Ένας **σύνδεσμος με n συνιστώσες** είναι μία εμφύτευση από την ξένη ένωση n κύκλων στο χώρο \mathbb{R}^3 . Συνήθως δεν μας ενδιαφέρει η συγκεκριμένη παραμέτρηση, και θεωρούμε ως κόμβο ή σύνδεσμο το υποσύνολο του \mathbb{R}^3 που είναι ομοιομορφικό με τον κύκλο ή την ξένη ένωση n κύκλων.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αρχίσουμε τη μελέτη των κόμβων μέσω των διαγραμμάτων τους στο επίπεδο. Διαισθητικά, το διάγραμμα ενός κόμβου ή ενός συνδέσμου είναι η προβολή ενός κόμβου ή συνδέσμου στο επίπεδο, έτσι ώστε κάθε σημείο του διαγράμματος να αντιστοιχεί το πολύ σε δύο σημεία του κόμβου, και τα διπλά σημεία να είναι πεπερασμένα.

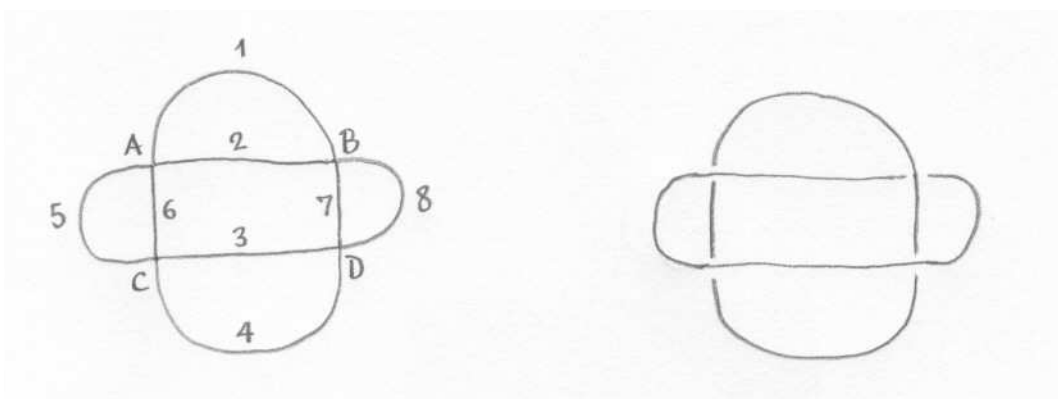
Μπορούμε να ορίσουμε ένα **διάγραμμα συνδέσμου** ως ένα σχήμα στο επίπεδο που αποτελείται από n κορυφές και $2n$ ακμές, έτσι ώστε σε κάθε κορυφή να συναντώνται ακριβώς 4 άκρα ακμών (αυτό που στα Διακριτά Μαθηματικά ονομάζουμε **επίπεδο τετρασθενές γράφημα**) με την ακόλουθη επιπλέον δομή, που μετατρέπει τις κορυφές σε **διασταυρώσεις** (crossings): σε κάθε κορυφή, το ένα ζεύγος των απέναντι άκρων ακμών είναι το **πάνω πέρασμα** της διασταύρωσης (overpass) και το άλλο ζεύγος το **κάτω πέρασμα** (underpass). Στο Σχήμα 2.1 τα άκρα που αποτελούν το πάνω πέρασμα είναι ενωμένα, ενώ τα άκρα που αποτελούν το κάτω πέρασμα δεν ενώνονται.

Παράδειγμα 2.1 Στο Σχήμα 2.2 έχουμε ένα γράφημα με 4 κορυφές και 8 ακμές, και μία επιλογή διασταυρώσεων, που δίδει ένα διάγραμμα συνδέσμου. Στην κορυφή A οι ακμές 2 και 5 αποτελούν το πάνω πέρασμα, ενώ οι ακμές 1 και 6 το κάτω πέρασμα.

Λέμε ότι δύο ακμές βρίσκονται στο ίδιο τόξο του διαγράμματος εάν τα άκρα τους αποτελούν το πάνω πέρασμα σε μία διασταύρωση. Αυτή η σχέση είναι συμμετρική,



Σχήμα 2.1: Διασταύρωση.



Σχήμα 2.2: Από το γράφημα στο διάγραμμα συνδέσμου.

και επεκτείνεται σε μία σχέση ισοδυναμίας, η οποία ορίζει μία διαμέριση των ακμών σε **τόξα**. Στο Παράδειγμα 2.1 οι ακμές 1 και 7 αποτελούν ένα τόξο, οι ακμές 2, 3, 5 και 8 αποτελούν όλες μαζί ένα τόξο, ενώ οι ακμή 4 είναι ένα τόξο και η ακμή 6 ένα άλλο τόξο.

Λέμε ότι δύο ακμές βρίσκονται στην ίδια συνιστώσα του διαγράμματος εάν τα άκρα τους αποτελούν είτε το πάνω πέρασμα είτε το κάτω πέρασμα σε μία διασταύρωση. Αυτή η σχέση είναι συμμετρική, και επεκτείνεται σε μία σχέση ισοδυναμίας, η οποία ορίζει μία διαμέριση των ακμών σε **συνιστώσες**. Παρατηρήστε ότι εάν δύο ακμές βρίσκονται στο ίδιο τόξο, τότε υποχρεωτικά είναι στην ίδια συνιστώσα. Συνεπώς έχουμε διαμέριση των τόξων σε συνιστώσες. Στο Παράδειγμα 2.1 οι ακμές 1, 7, 4 και 6 αποτελούν τη μία συνιστώσα του διαγράμματος, ενώ οι ακμές 2, 8, 3 και 5 την άλλη συνιστώσα. Ένα διάγραμμα με μία συνιστώσα είναι **διάγραμμα κόμβου**.

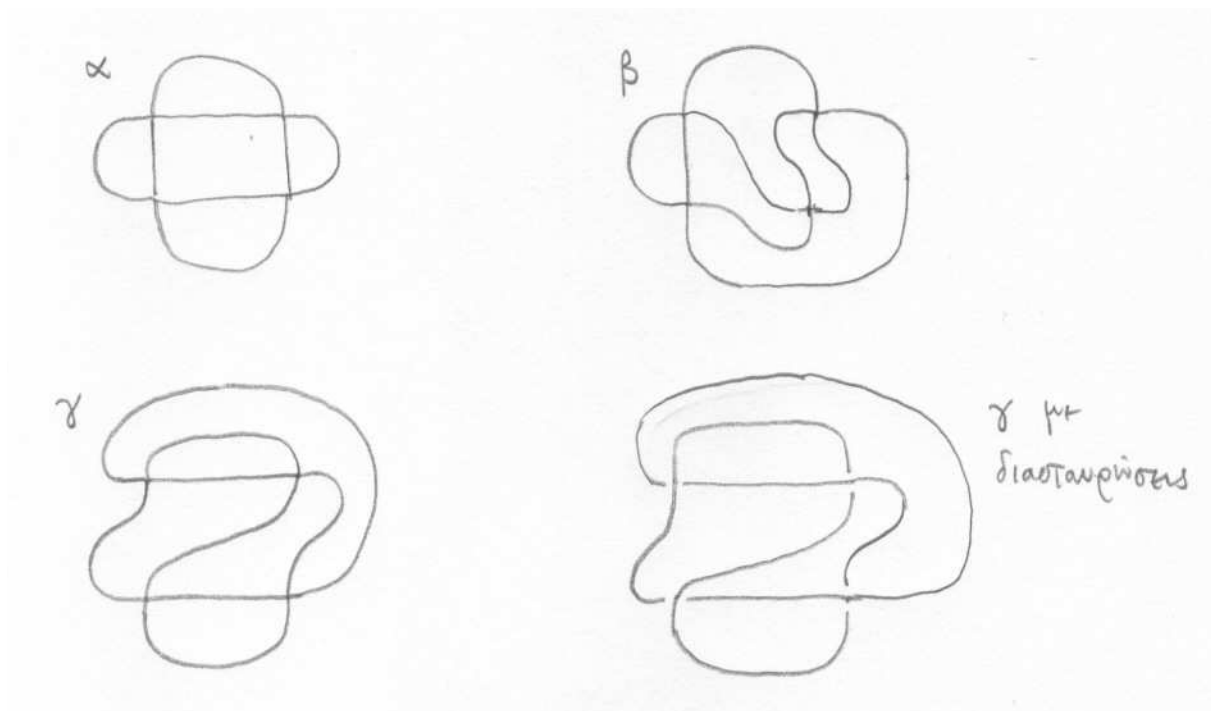
Άσκηση 2.1 Αλλάξτε μία από τις διασταυρώσεις στο Σχήμα 2.2, και βρείτε τα πάνω πέρασματα, τα τόξα και τις συνιστώσες στο νέο διάγραμμα.

Παρατηρήστε ότι σε ένα γράφημα με n κορυφές έχουμε 2^n διαφορετικούς τρόπους

να επιλέξουμε τις διασταυρώσεις, και συνεπώς 2^n διαφορετικά διαγράμματα.

Άσκηση 2.2 Στο Σχήμα 2.3 έχουμε τρία διαφορετικά γραφήματα με 4 κορυφές. Επιλέγοντας πάνω και κάτω περάσματα σε κάθε διασταύρωση παίρνουμε διαφορετικά διαγράμματα κόμβων ή συνδέσμων. Για παράδειγμα, το γράφημα γ' με την επιλογή διασταυρώσεων του Σχήματος, δίδει ένα διάγραμμα του κόμβου που ονομάσαμε οχτάρι.

1. Δοκιμάστε διαφορετικές επιλογές πάνω και κάτω περασμάτων, και προσπαθήστε να αποφασίσετε ποιό κόμβο ή σύνδεσμο έχουμε.
2. Πόσες συνιστώσες έχουν τα διαγράμματα που προκύπτουν; Μπορείτε να δείξετε ότι ο αριθμός των συνιστωσών καθορίζεται από το γράφημα και όχι από τα πάνω και κάτω περάσματα;
3. Μπορείτε να κατασκευάσετε ένα γράφημα με 4 κορυφές που να δίδει διάγραμμα με 3 συνιστώσες;



Σχήμα 2.3: Άσκηση 2.2.

Σε κάθε συνιστώσα μπορούμε να επιλέξουμε έναν από τους δύο δυνατούς προσανατολισμούς, και να έχουμε ένα **προσανατολισμένο διάγραμμα**. Σε ένα προσανατολισμένο διάγραμμα έχουμε δύο διαφορετικά είδη διασταυρώσεων, τις οποίες ονομάζουμε **θετικές** και **αρνητικές**. Θετική είναι μία διασταύρωση για την οποία

όταν η παλάμη του δεξιού χεριού βρίσκεται κάτω από τη διασταύρωση και δείχνει στην κατεύθυνση του κάτω περάσματος, ο αντίχειρας δείχνει στην κατεύθυνση του πάνω περάσματος. Στην αντίθετη περίπτωση η διασταύρωση είναι αρνητική. Παρατηρήστε ότι αν αντιστρέψουμε τον προσανατολισμό όλων των συνιστωσών, δεν αλλάζουν τα πρόσημα των διασταυρώσεων.



Σχήμα 2.4: Πρόσημα διασταυρώσεων.

Το άθροισμα των προσήμων όλων των διασταυρώσεων σε ένα προσανατολισμένο διάγραμμα D ονομάζεται **περιέλιξη** (writhe) του διαγράμματος, και συμβολίζεται $w(D)$. Από την προηγούμενη παρατήρηση βλέπουμε ότι η περιέλιξη ενός διαγράμματος κόμβου, που έχει μόνο μία συνιστώσα, δεν εξαρτάται από την επιλογή του προσανατολισμού. Αντιθέτως, η περιέλιξη ενός διαγράμματος με περισσότερες από μία συνιστώσες εξαρτάται από την επιλογή του προσανατολισμού σε κάθε συνιστώσα.

Εάν D είναι ένα διάγραμμα με m συνιστώσες C_1, \dots, C_m , ορίζουμε τον αριθμό σύνδεσης l_{ij} της συνιστώσας C_i με τη συνιστώσα C_j , για $i \neq j$,

$$l_{ij} = \frac{1}{2} (\text{άθροισμα των προσήμων των διασταυρώσεων μεταξύ } C_i \text{ και } C_j).$$

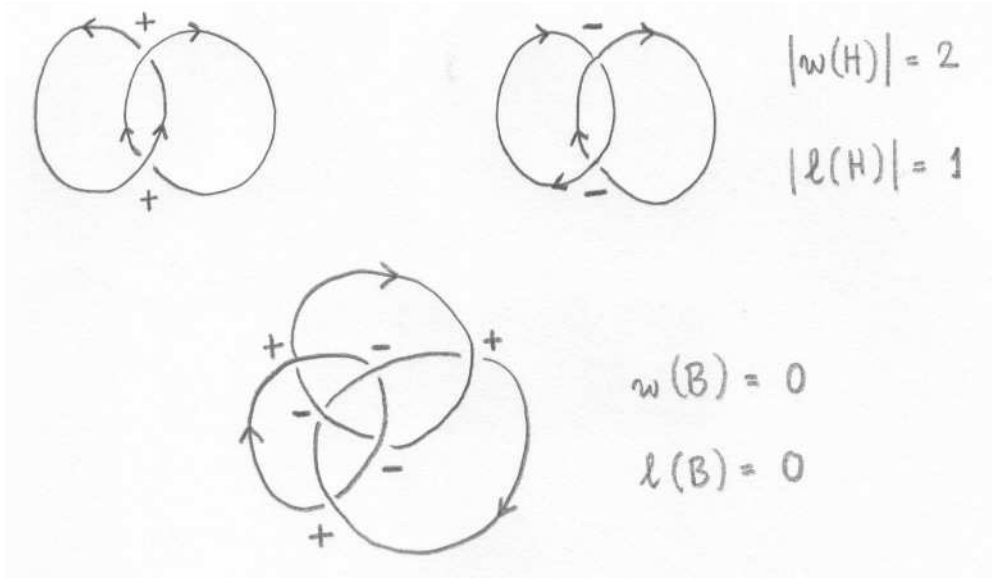
Ο **αριθμός σύνδεσης** (linking number) του διαγράμματος D είναι το άθροισμα

$$l(D) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} l_{ij}.$$

Παράδειγμα 2.2 Το τριφύλλι έχει περιέλιξη $w(T) = 3$, ανεξάρτητα από την επιλογή του προσανατολισμού.

Ο σύνδεσμος Hopf έχει περιέλιξη $w(H) = 2$ εάν οι δύο συνιστώσες έχουν αντίθετο προσανατολισμό, και $w(H) = -2$ εάν έχουν τον ίδιο προσανατολισμό. Ο αριθμός σύνδεσης του συνδέσμου Hopf είναι $l(H) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$ εάν οι δύο συνιστώσες έχουν αντίθετο προσανατολισμό, και $l(H) = -1$ εάν έχουν τον ίδιο προσανατολισμό.

Ο σύνδεσμος Borromeo έχει περιέλιξη $w(B) = 0$ και αριθμό σύνδεσης $\ell(B) = 0$, με οποιοδήποτε προσανατολισμό στις τρεις συνιστώσες.



Σχήμα 2.5: Περιέλιξη και αριθμός σύνδεσης.

Άσκηση 2.3 Στα διαγράμματα που κατασκευάσατε στην Άσκηση 2.2 επιλέξτε προσανατολισμό σε κάθε συνιστώσα, και υπολογίστε την περιέλιξη και (για διαγράμματα με περισσότερες από μία συνιστώσες) τον αριθμό σύνδεσης.

Άσκηση 2.4 Υπολογίστε την περιέλιξη των κόμβων με 5 διασταυρώσεις στο Σχήμα 2.20.

Κινήσεις Reidemeister

Είναι προφανές ότι διαφορετικά διαγράμματα μπορεί να παριστάνουν τον ίδιο κόμβο ή σύνδεσμο. Θα ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας στα διαγράμματα, έτσι ώστε ισοδύναμα διαγράμματα προφανώς περιγράφουν ισοδύναμους κόμβους ή συνδέσμους. Ένα βαθύ θεώρημα του Reidemeister εξασφαλίζει ότι ισχύει και το αντίστροφο, για την κατάλληλη σχέση ισοδυναμίας μεταξύ κόμβων ή συνδέσμων, την οποία θα ορίσουμε στη συνέχεια.

Ξεκινάμε ορίζοντας 4 είδη αλλαγών $R0$, $R1$, $R2$, $R3$, που μπορούμε να κάνουμε σε ένα διάγραμμα.

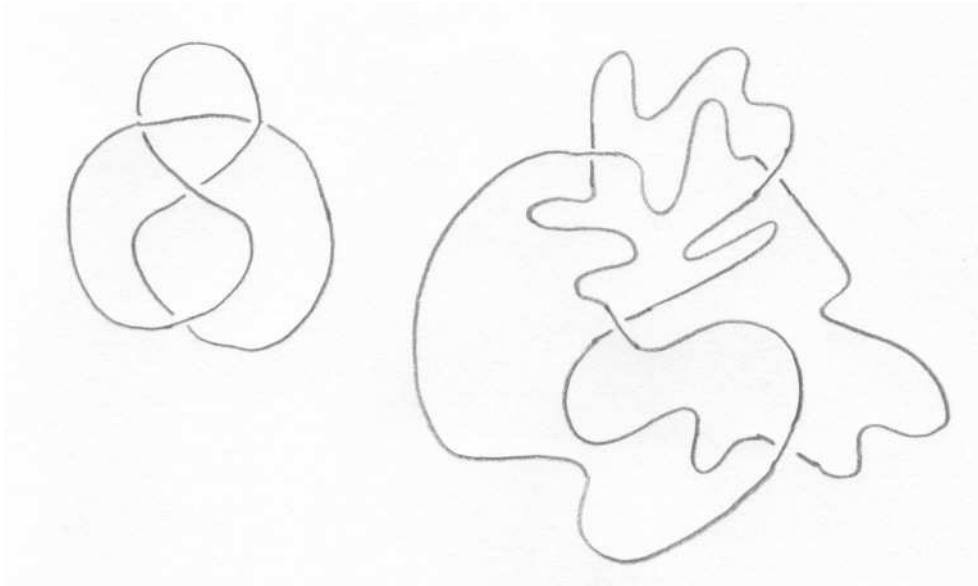
R0 Δύο διαγράμματα D και F συνδέονται με μία αλλαγή τύπου $R0$ εάν υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε

(α') για κάθε $t \in [0, 1]$ η απεικόνιση $\phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi_t(x, y) = \phi(x, y, t)$ είναι ομοιομορφισμός,

(β') για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(x, y, 0) = (x, y)$ και

(γ') για κάθε $(x, y) \in D$, $\phi(x, y, 1) \in F$.

Λέμε ότι ϕ είναι μία **συνεχής παραμόρφωση του επιπέδου** που απεικονίζει το διάγραμμα D στο F .

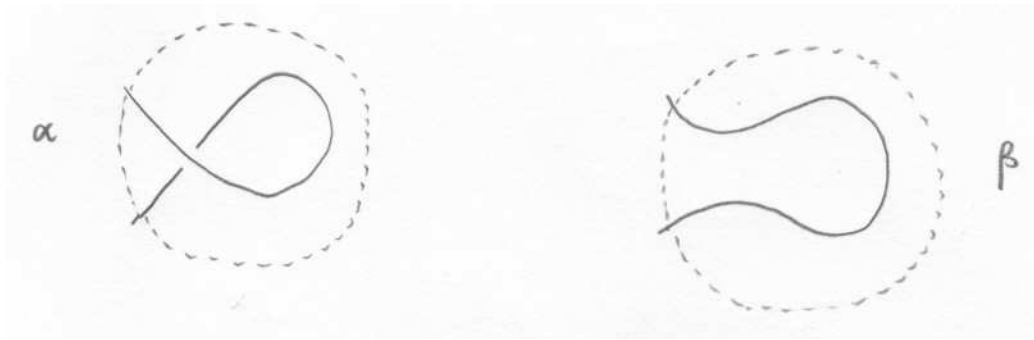
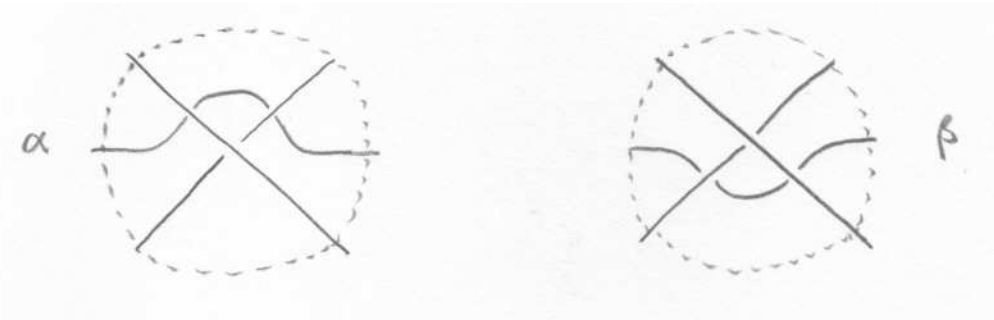


Σχήμα 2.6: Αλλαγή τύπου **R0**.

R1 Δύο διαγράμματα D και F συνδέονται με μία κίνηση Reidemeister τύπου $R1$ εάν τα διαγράμματα είναι ίδια σε όλο το επίπεδο, εκτός από το εσωτερικό ενός δίσκου, όπου το D περιέχει το Σχήμα 2.7.α και το F περιέχει το Σχήμα 2.7.β.

R2 Δύο διαγράμματα D και F συνδέονται με μία κίνηση Reidemeister τύπου $R2$ εάν τα διαγράμματα είναι ίδια σε όλο το επίπεδο, εκτός από το εσωτερικό ενός δίσκου, όπου το D περιέχει το Σχήμα 2.8.α και το F περιέχει το Σχήμα 2.8.β.

R3 Δύο διαγράμματα D και F συνδέονται με μία κίνηση Reidemeister τύπου $R3$ εάν τα διαγράμματα είναι ίδια σε όλο το επίπεδο, εκτός από το εσωτερικό ενός δίσκου, όπου το D περιέχει το Σχήμα 2.9.α και το F περιέχει το Σχήμα 2.9.β.

Σχήμα 2.7: Κίνηση Reidemeister τύπου **R1**.Σχήμα 2.8: Κίνηση Reidemeister τύπου **R2**.Σχήμα 2.9: Κίνηση Reidemeister τύπου **R3**.

Ορισμός. Δύο διαγράμματα κόμβων ή συνδέσμων D και F είναι **ισοτοπικά** εάν υπάρχει μία πεπερασμένη ακολουθία από διαγράμματα D_1, \dots, D_k τέτοια ώστε $D = D_1, F = D_k$ και για κάθε $i = 1, \dots, k - 1$ τα διαγράμματα D_i και D_{i+1} συνδέονται με μία αλλαγή τύπου $R0$ ή με μία από τις κινήσεις τύπου $R1, R2$ ή $R3$.

Πρόταση 2.1 Η ισοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των διαγραμμάτων συνδέσμων.

Θα ορίσουμε τώρα τη σχέση ισοδυναμίας μεταξύ κόμβων, η οποία επίσης ονομάζεται ισοτοπία.

Ορισμός. Δύο κόμβοι $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $M : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι **ισοτοπικοί** εάν υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $F : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου $\mathbb{R}^3 \times [0, 1]$ έχει την τοπολογία του υπόχωρου του \mathbb{R}^4 , τέτοια ώστε

1. για κάθε $t \in I$, ο περιορισμός της F στο $\mathbb{R}^3 \times \{t\}$ είναι ομοιομορφισμός,
2. για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$, $F(x, 0) = x$ και
3. για κάθε $s \in S^1$, $M(s) = F(K(s), 1)$.

Η ισοτοπία, παραμορφώνοντας το χώρο \mathbb{R}^3 , μεταφέρει τον κόμβο $K(x) = F(K(x), 0)$ στον κόμβο $M(x) = F(K(x), 1)$.

Άσκηση 2.5 Δείξτε ότι η ισοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των κόμβων.

Ορίσαμε έναν κόμβο να είναι οποιαδήποτε εμφύτευση του κύκλου S^1 στο χώρο \mathbb{R}^3 . Αυτός ο ορισμός είναι πολύ γενικός. Για να μπορέσουμε να αναπτύξουμε τη θεωρία κόμβων περιοριζόμαστε στους ονομαζόμενους 'ήμερους' κόμβους.

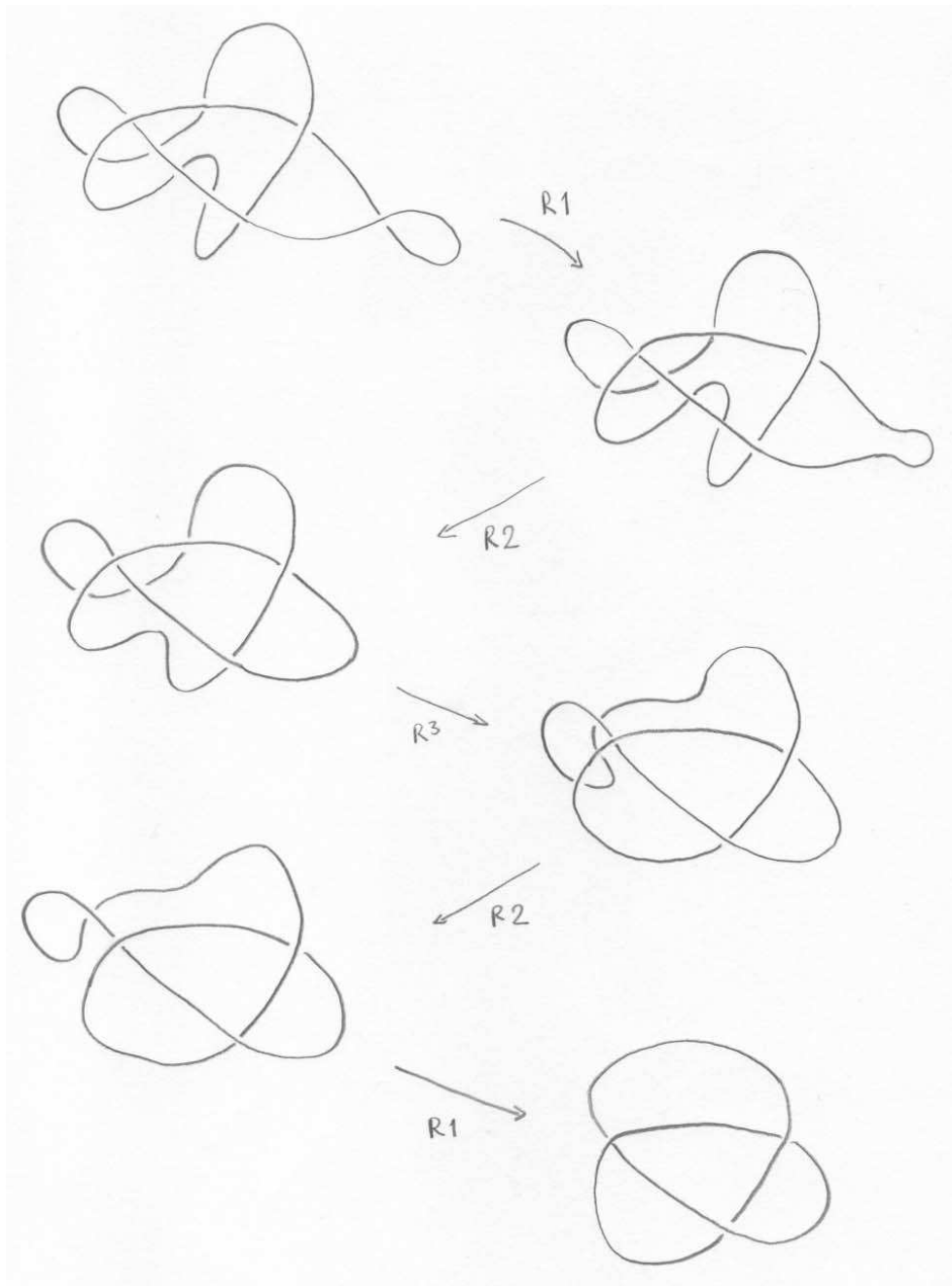
Ορισμός. Ένας **πολυγωνικός κόμβος** είναι ένας κόμβος $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ του οποίου η εικόνα είναι η ένωση πεπερασμένου πλήθους ευθυγράμμων τμημάτων στο \mathbb{R}^3 . Ένας κόμβος είναι **ήμερος**, (tame), εάν είναι ισοτοπικός με έναν πολυγωνικό κόμβο. Στην αντίθετη περίπτωση ο κόμβος λέγεται **άγριος**, (wild).

Θεώρημα 2.2 (Θεώρημα Reidemeister) Δύο κόμβοι είναι ισοτοπικοί εάν και μόνον εάν υπάρχουν ισοτοπικά διαγράμματα των κόμβων.

Μπορείτε να βρείτε μία απόδειξη του θεωρήματος Reidemeister στο βιβλίο του K.Murasagi, Knot theory and its applications.

Ένα από τα βασικά προβλήματα που θέλουμε να μελετήσουμε είναι να μπορούμε να αποφασίσουμε εάν δύο διαγράμματα είναι ισοτοπικά ή όχι. Για απλά διαγράμματα, μπορούμε να δείξουμε ότι είναι ισοτοπικά βρίσκοντας τις κινήσεις που μετατρέπουν το ένα στο άλλο.

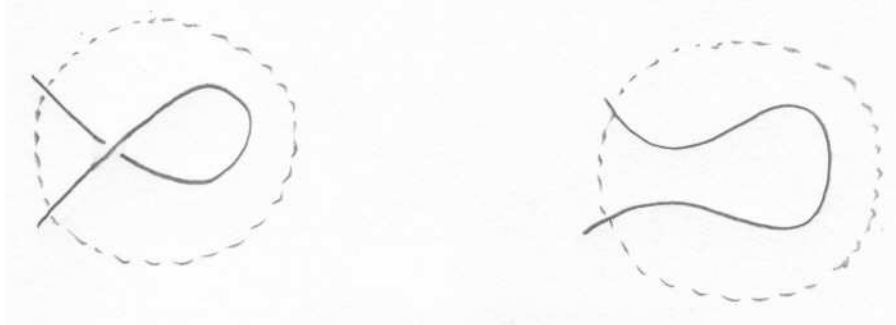
Παράδειγμα 2.3 Στο Σχήμα 2.10 παρουσιάζονται οι κινήσεις Reidemeister που μετατρέπουν το διάγραμμα (α) στο κανονικό διάγραμμα του τριφυλλιού.



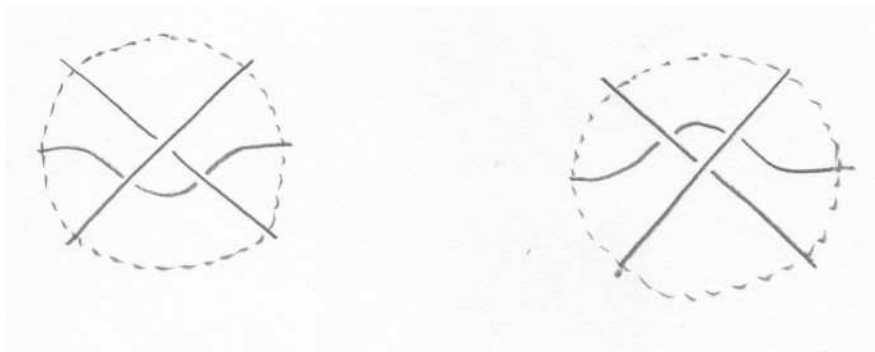
Σχήμα 2.10: Ισοτοπικά διαγράμματα.

Άσκηση 2.6 Δείξτε ότι οι τρεις κινήσεις $R1'$ στο Σχήμα 2.11, $R3'$ στο Σχήμα 2.12 και $R3''$ στο Σχήμα 2.13, οι οποίες είναι διαφορετικές από τις $R1$ και $R3$, μπορούν να

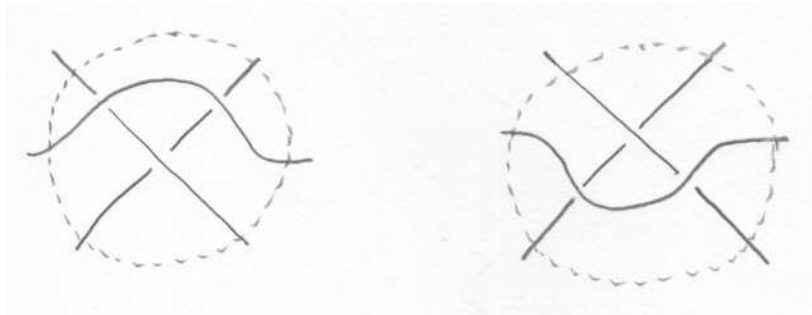
εκφραστούν ως σύνθεση κινήσεων $R1$, $R2$ και $R3$.



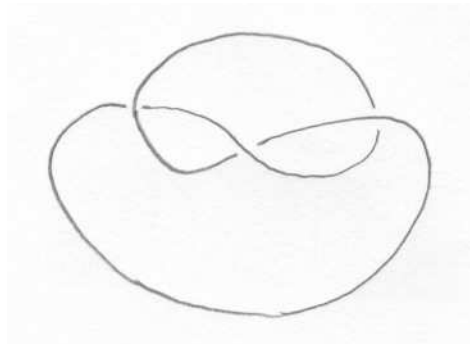
Σχήμα 2.11: Κίνηση $R1'$.



Σχήμα 2.12: Κίνηση $R3'$.

Σχήμα 2.13: Κίνηση $R3''$.

Άσκηση 2.7 Βρείτε μία ακολουθία κινήσεων Reidemeister που μετατρέπει το διάγραμμα στο Σχήμα 2.14 στο κανονικό διάγραμμα του τριφυλλιού.



Σχήμα 2.14: Άλλο διάγραμμα για το τριφύλλι.

Ισοτοπικές αναλλοίωτες

Για να δείξουμε ότι δύο διαγράμματα δεν είναι ισοτοπικά, χρειάζεται να ορίσουμε **ισοτοπικές αναλλοίωτες**, δηλαδή αριθμούς ή άλλα μαθηματικά αντικείμενα, που συνδέονται με κάποιο διάγραμμα και δεν αλλάζουν όταν εφαρμόζουμε μία αλλαγή τύπου $R0$ ή μία από τις κινήσεις τύπου $R1$, $R2$ ή $R3$. Τότε δύο διαγράμματα που διαφέρουν σε μία αναλλοίωτη ανήκουν υποχρεωτικά σε διαφορετικές κλάσεις ισοτοπίας.

Παράδειγμα 2.4 Ο αριθμός συνιστωσών ενός διαγράμματος προφανώς δεν αλλάζει από την $R0$ και την $R1$. Εύκολα ελέγχουμε ότι δεν αλλάζει ούτε από τις

κινήσεις $R2$ και $R3$: στην κίνηση $R2$ τα τόξα μέσα στο δίσκο ανήκουν σε μία ή σε δύο συνιστώσες, και αυτό δεν αλλάζει από την κίνηση, ενώ στην κίνηση $R3$ τα τόξα μέσα στο δίσκο ανήκουν σε μία, δύο ή τρεις συνιστώσες, και αυτός ο αριθμός δεν αλλάζει από την κίνηση. Άρα ένα διάγραμμα με m συνιστώσες δεν μπορεί να είναι ισοτοπικό με ένα διάγραμμα με $n \neq m$ συνιστώσες. Συμπεραίνουμε ότι το διάγραμμα του συνδέσμου Hopf δεν είναι ισοτοπικό με το διάγραμμα του συνδέσμου Borromeo, και συνεπώς οι δύο σύνδεσμοι δεν είναι ισοδύναμοι.

Δύο προσανατολισμένα διαγράμματα D και F είναι **ισοτοπικά ως προσανατολισμένα διαγράμματα** εάν υπάρχει μία ισοτοπία των υποκείμενων διαγραμμάτων τέτοια ώστε ο προσανατολισμός σε κάθε συνιστώσα του D είναι ο ίδιος με τον προσανατολισμό της αντίστοιχης συνιστώσας του F .

Παράδειγμα 2.5 Η περιέλιξη $w(D)$ δεν είναι ισοτοπική αναλλοίωτη ενός προσανατολισμένου διαγράμματος: κινήσεις τύπου $R1$ την αλλάζουν.

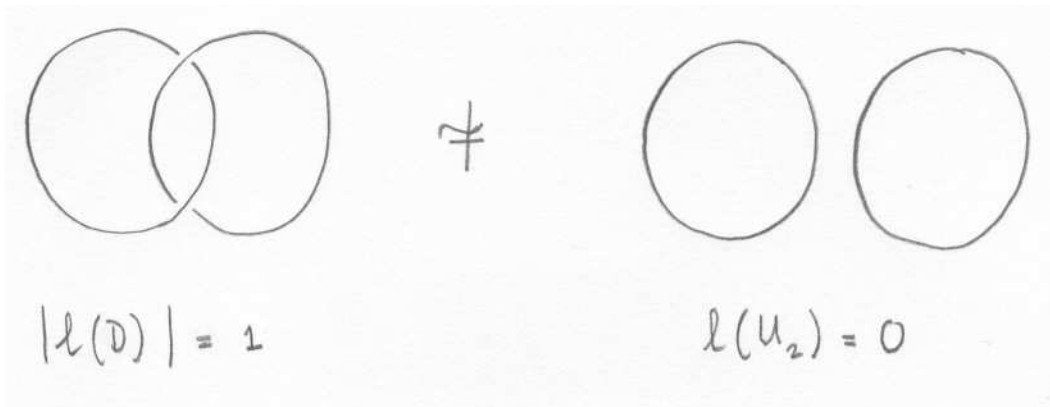
Πρόταση 2.3 Ο αριθμός σύνδεσης είναι ισοτοπική αναλλοίωτη ενός προσανατολισμένου συνδέσμου.

Απόδειξη. Αρχεί να θεωρήσουμε τους αριθμούς σύνδεσης l_{ij} για κάθε ζεύγος συνιστωσών. Οι αλλαγές του τύπου $R0$ δεν αλλάζουν τα πρόσημα των διασταυρώσεων. Οι κινήσεις του τύπου $R1$ επηρεάζουν μόνο μία συνιστώσα και συνεπώς δεν αλλάζουν τους αριθμούς l_{ij} . Οι κινήσεις του τύπου $R2$ αφαιρούν ή προσθέτουν δύο διασταυρώσεις στο διάγραμμα, οι οποίες έχουν πάντα αντίθετο πρόσημο. Άρα δεν αλλάζουν το άθροισμα l_{ij} . Τέλος οι κινήσεις του τύπου $R3$ δεν αλλάζουν ούτε τον αριθμό των διασταυρώσεων ούτε τα πρόσημά τους, και συνεπώς δεν αλλάζουν το l_{ij} .

□

Άσκηση 2.8 Ελέγξτε τους ισχυρισμούς στην προηγούμενη απόδειξη για τις κινήσεις τύπου $R2$ και $R3$. Πρέπει να ελέγξετε όλους τους δυνατούς προσανατολισμούς των τόξων που περιέχονται στους δίσκους.

Συμπεραίνουμε ότι ο σύνδεσμος Hopf δεν είναι ισοτοπικός με το μη-σύνδεσμο με δύο συνιστώσες.

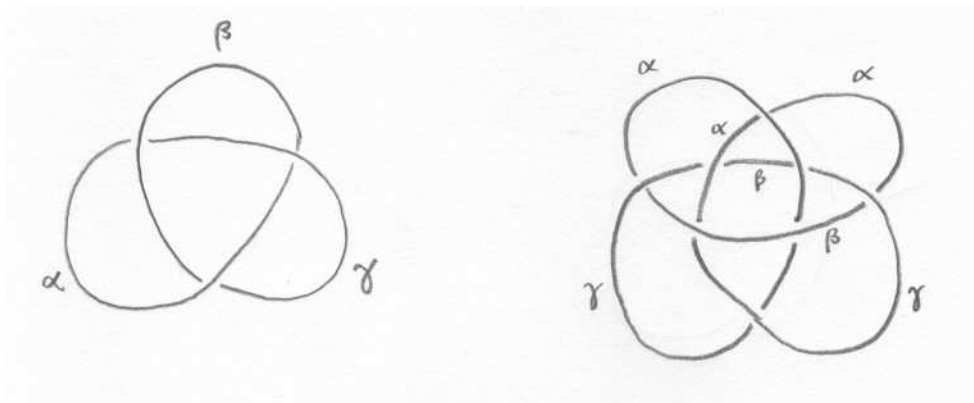


Σχήμα 2.15: Μη ισοτοπικοί σύνδεσμοι.

Θα δούμε κάποιες αναλλοίωτες για κόμβους (διαγράμματα με μία συνιστώσα).

Λέμε ότι ένα διάγραμμα κόμβου είναι **τριχρωματικό** εάν μπορούμε να ορίσουμε ένα χρώμα για κάθε τόξο, έτσι ώστε να χρησιμοποιήσουμε ακριβώς τρία διαφορετικά χρώματα, και σε κάθε διασταύρωση είτε όλα τα τόξα να έχουν το ίδιο χρώμα, είτε να εμφανίζονται και τα τρία χρώματα.

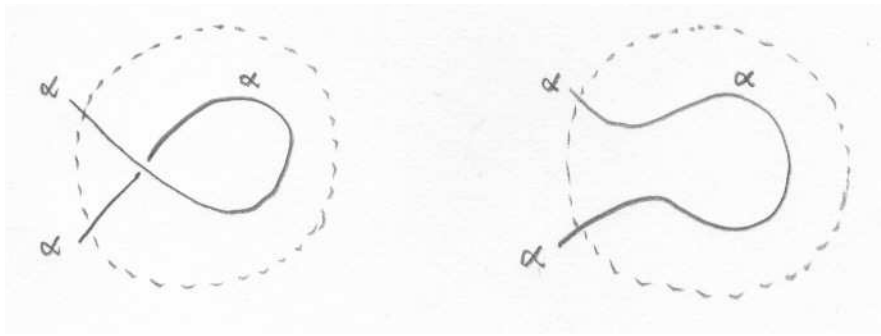
Παράδειγμα 2.6



Σχήμα 2.16: Τριχρωματικά διαγράμματα.

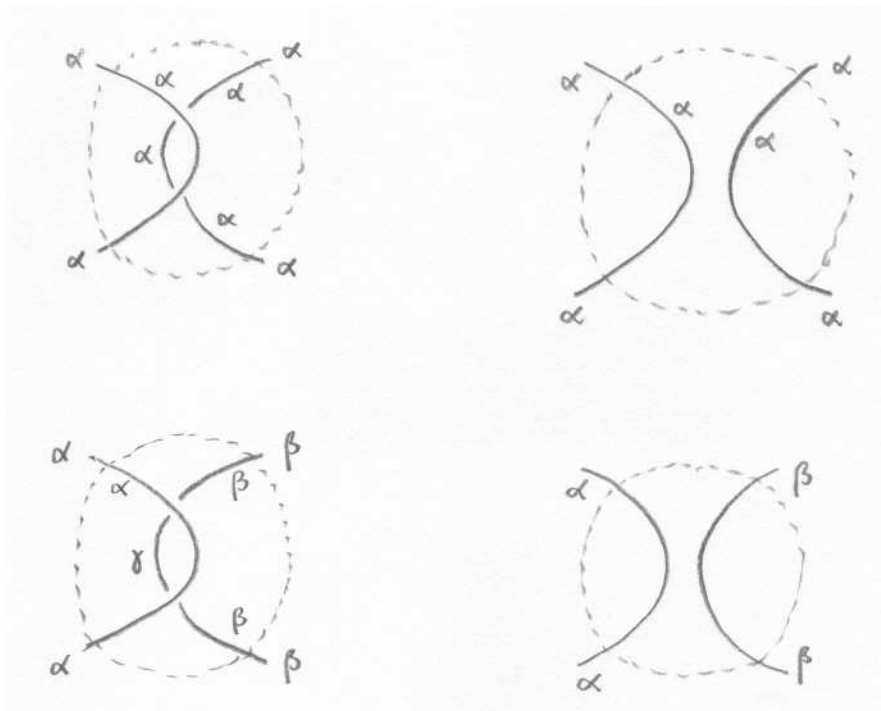
Θεώρημα 2.4 Η τριχρωματικότητα είναι ισοτοπική αναλλοίωτη ενός κόμβου.

Απόδειξη. Οι αλλαγές του τύπου $R0$ δεν αλλάζουν τις διασταυρώσεις, άρα δεν επηρεάζουν την τριχρωματικότητα. Σε κινήσεις τύπου $R1$ στη διασταύρωση συναντώνται μόνο δύο διαφορετικά τόξα, άρα έχουν υποχρεωτικά το ίδιο χρώμα.



Σχήμα 2.17: Τριχρωματικότητα στην κίνηση **R1**.

Σε κινήσεις τύπου $R2$ και $R3$ μπορεί να χρειαστεί να αλλάξουν τα χρώματα κάποιων τόξων για να διατηρηθεί η τριχρωματικότητα. Πρέπει να ελέγξουμε ότι οι αλλαγές δεν επηρεάζουν τα χρώματα στα τόξα που βγαίνουν από το δίσκο, και άρα δεν δημιουργείται πρόβλημα στο υπόλοιπο διάγραμμα.



Σχήμα 2.18: Τριχρωματικότητα στην κίνηση **R2**.

Σε κινήσεις τύπου $R2$ υπάρχουν δύο περιπτώσεις.

1. Εάν τα τέσσερα τόξα έχουν το ίδιο χρώμα, δεν χρειάζεται καμμία αλλαγή.
2. Εάν εμφανίζονται περισσότερα από ένα χρώματα, κατά την κίνηση αλλάζει χρώμα

ένα τόξο, αλλά δεν επηρεάζονται τα χρώματα των τόξων που βγαίνουν από το δίσκο.

Σε κινήσεις τύπου $R3$ υπάρχουν πέντε διαφορετικές περιπτώσεις.

1. Εάν όλα τα τόξα έχουν το ίδιο χρώμα, δεν χρειάζεται καμμία αλλαγή.
2. Τα δύο χιαστί τόξα έχουν το ίδιο χρώμα, και το τρίτο τόξο διαφορετικά χρώματα.
3. Τα δύο χιαστί τόξα έχουν διαφορετικά χρώματα, και το τόξο στα αριστερά έχει το ίδιο χρώμα με το τόξο που είναι πάνω πέρασμα σε όλες τις διασταυρώσεις.
4. Τα δύο χιαστί τόξα έχουν διαφορετικά χρώματα, και το τόξο στα αριστερά έχει το ίδιο χρώμα με το τόξο πάνω δεξιά.
5. Τα δύο χιαστί τόξα έχουν διαφορετικά χρώματα, και το τόξο στα αριστερά έχει το ίδιο χρώμα με το τόξο κάτω αριστερά.

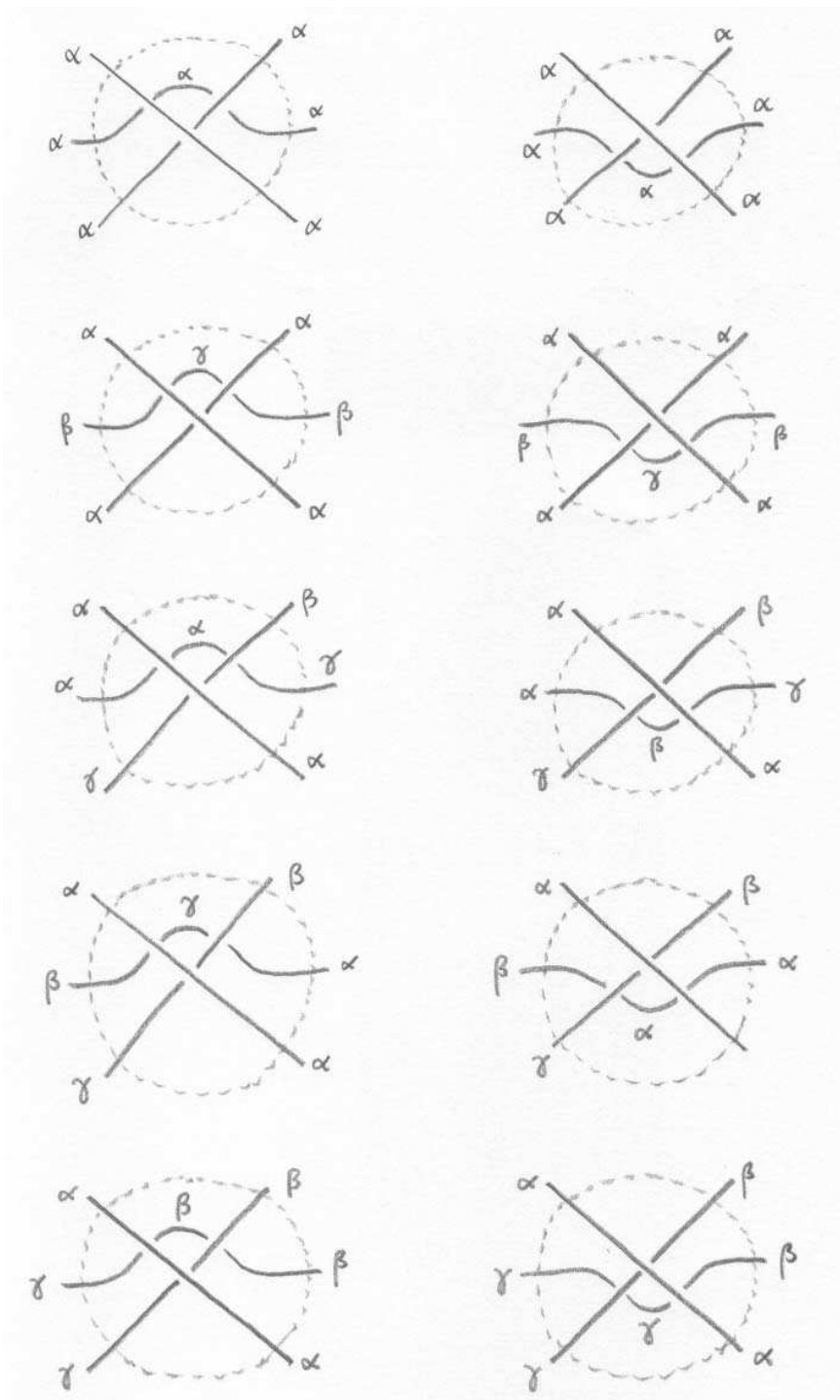
Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.19, σε όλες τις περιπτώσεις δεν αλλάζουν τα χρώματα στα τόξα που βγαίνουν από το δίσκο. Πρέπει να βεβαιωθείτε ότι έχουμε καλύψει όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

□

Ο μη-κόμβος δεν είναι τριχρωματικός: στο διάγραμμα χωρίς διασταυρώσεις δεν μπορούν να εμφανίζονται τρία χρώματα. Έχουμε δει ότι το τριφύλλι είναι τριχρωματικό. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν μη τετριμμένοι κόμβοι!

Άσκηση 2.9 Δείξτε ότι το οχτάρι δεν είναι τριχρωματικό. (Διαλέξτε κάποια διασταύρωση και υποθέστε ότι συναντώνται τρία χρώματα. Δείξτε ότι παραβιάζεται η τριχρωματικότητα σε κάποια άλλη διασταύρωση. Επαναλάβετε για τις τέσσερις διασταυρώσεις.)

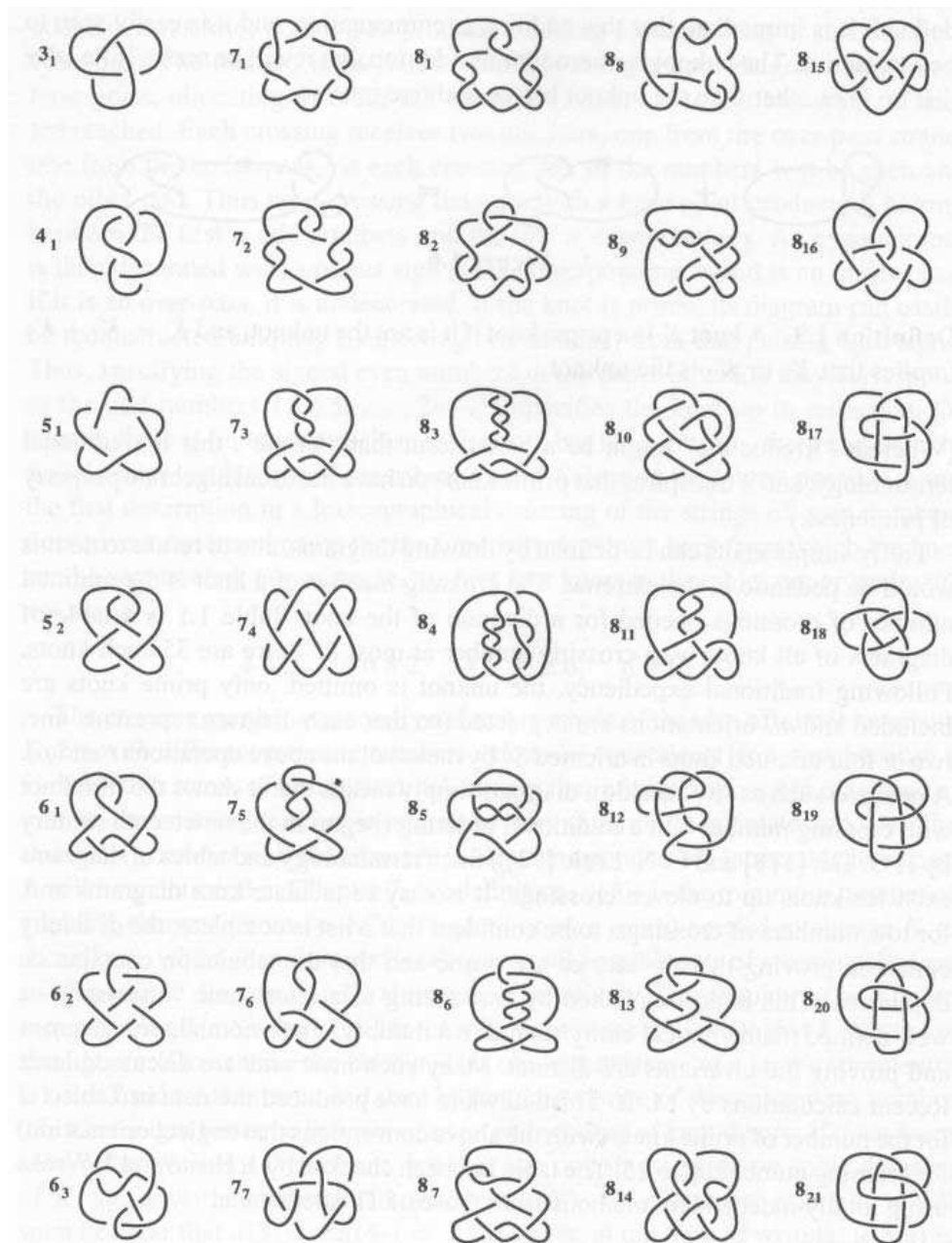
Συμπεραίνουμε ότι το τριφύλλι και το οχτάρι δεν είναι ισοτοπικοί κόμβοι.



Σχήμα 2.19: Τριχρωματικότητα στην κίνηση **R3**.

Ορίζουμε τον **αριθμό διασταυρώσεων** $c(D)$ ενός κόμβου ή ενός συνδέσμου να είναι ο ελάχιστος αριθμός διασταυρώσεων στα διαγράμματα της κλάσης ισοτοπίας του D . Ο αριθμός διασταυρώσεων είναι εξ ορισμού ισοτοπική αναλλοίωτη. Κόμβοι με

μικρό αριθμό διασταυρώσεων έχουν ταξινομηθεί και υπάρχουν πίνακες όπως αυτός στο Σχήμα 2.20.



Σχήμα 2.20: Κόμβοι με μέχρι οκτώ διασταυρώσεις.

Μία αλλαγή διασταύρωσης (crossing change) ανταλλάσσει το πάνω και το

κάτω πέρασμα στη διασταύρωση. Θα δούμε ότι κάνοντας κάποιες αλλαγές διασταυρώσεων μπορούμε να 'λύσουμε' κάθε κόμβο.



Σχήμα 2.21: Αλλαγή διασταύρωσης.

Είναι αρκετά εύκολο να πειστούμε διαισθητικά ότι αληθεύει το ακόλουθο αποτέλεσμα. Για την απόδειξή του θα χρειαστούμε εργαλεία που θα αναπτύξουμε αργότερα.

Λήμμα 2.5 *Εάν σε ένα διάγραμμα κόμβου μπορούμε να επιλέξουμε ένα σημείο τέτοιο ώστε διατρέχοντας το διάγραμμα από αυτό το σημείο, την πρώτη φορά που συναντάμε κάθε διασταύρωση βρισκόμαστε στο κάτω πέρασμα, τότε το διάγραμμα είναι ισοτοπικό με το μη-κόμβο.*



Σχήμα 2.22: Διάγραμμα που 'ανεβαίνει'.

Πρόταση 2.6 *Σε ένα διάγραμμα κόμβου με n διασταυρώσεις, χρειάζονται το πολύ $\frac{n}{2}$ αλλαγές διασταυρώσεων για να το μετατρέψουμε σε ένα διάγραμμα του μη-κόμβου.*

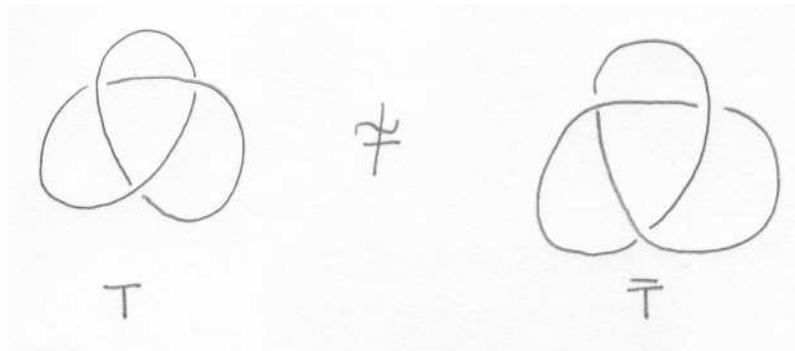
Απόδειξη. Διαλέγουμε ένα σημείο στο διάγραμμα, και διατρέχουμε το διάγραμμα σημειώνοντας την πρώτη φορά που συναντούμε μία διασταύρωση εάν βρισκόμαστε στο πάνω πέρασμα ή στο κάτω πέρασμα. Έστω ότι έχουμε k πάνω περάσματα και $n-k$ κάτω περάσματα. Εάν $k \geq \frac{n}{2}$, αλλάζουμε όλες τις διασταυρώσεις που πρωτοσυναντήσαμε ως κάτω περάσματα. Αυτές είναι το πολύ $\frac{n}{2}$. Από το Λήμμα 2.5, το διάγραμμα που παίρνουμε παριστάνει το μη-κόμβο. □

Ορίζουμε τον **αριθμό ‘ξεδεσίματος’** (unknotting number) ενός κόμβου K να είναι ο ελάχιστος αριθμός $u(K)$ αλλαγών σε διασταυρώσεις που απαιτείται σε κάποιο διάγραμμα της κλάσης ισοτοπίας του διαγράμματος του κόμβου, για να το μετατρέψει σε διάγραμμα της κλάσης ισοτοπίας του μη-κόμβου.

Παρ’ όλο που γνωρίζουμε ότι $u(K) \leq \frac{1}{2}c(K)$, ακόμα και για σχετικά απλούς κόμβους δεν είναι γνωστός αυτός ο αριθμός. Το πρόβλημα είναι ότι ένα πιο πολύπλοκο διάγραμμα μπορεί να λύνεται με λιγότερες αλλαγές.

Εάν D είναι ένα διάγραμμα συνδέσμου, ο **αντικατοπτρισμός** του D είναι το διάγραμμα \bar{D} στο οποίο έχουμε αλλάξει κάθε διασταύρωση. Το διάγραμμα \bar{D} είναι ισοτοπικό με τον αντικατοπτρισμό του D ως προς κάποιον άξονα στο επίπεδο του D .

Θα δείξουμε αργότερα ότι το τριφύλλι δεν είναι ισοτοπικό με τον αντικατοπτρισμό του.

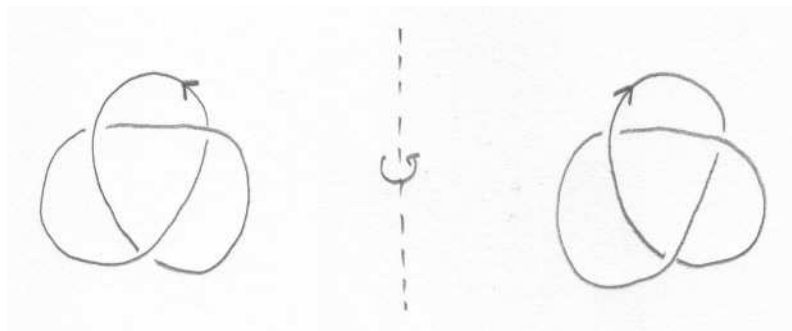


Σχήμα 2.23: Το τριφύλλι και ο αντικατοπτρισμός του.

Άσκηση 2.10 Δείξτε ότι το οχτάρι είναι ισοτοπικό με τον αντικατοπτρισμό του. (Υπόδειξη: Κάντε το πρώτα με ένα κομμάτι σκοινί, και μετά δοκιμάστε να το περιγράψετε με κινήσεις Reidemeister.) Μπορείτε να το κάνετε χωρίς να χρησιμοποιήσετε την κίνηση **R1**;

Εάν D είναι ένα προσανατολισμένο διάγραμμα συνδέσμου, το **αντίθετο** του D είναι το διάγραμμα rD , το οποίο έχει τον αντίθετο προσανατολισμό σε κάθε συνιστώσα.

Το διάγραμμα του τριφυλλιού και το αντίθετό του είναι ισοτοπικά. Εύκολα βλέπουμε ότι προκύπτουν από τον ίδιο προσανατολισμένο κόμβο, με περιστροφή γύρω από έναν άξονα στο \mathbb{R}^3 . Από το Θεώρημα Reidemeister, τα διαγράμματα πρέπει να είναι ισοτοπικά.



Σχήμα 2.24: Το προσανατολισμένο τριφύλλι είναι ισοτοπικό με το αντίθετό του.

Άσκηση 2.11 Βρείτε τις κινήσεις Reidemeister που δίδουν την ισοτοπία μεταξύ T και rT .

Μόλις το 1964 ανακαλύφθηκαν κόμβοι για τους οποίους $rD \neq D$.

Κεφάλαιο 3

Πολυώνυμα κόμβων και συνδέσμων

Το πολυώνυμο $\langle D \rangle$.

Για κάθε διάγραμμα συνδέσμου D θα ορίσουμε ένα πολυώνυμο Laurent μίας μεταβλητής A , το οποίο συμβολίζουμε $\langle D \rangle$. Το πολυώνυμο αυτό χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες.

BP1 Εάν U είναι το τετριμμένο διάγραμμα με μία συνιστώσα και καμία διασταύρωση, τότε

$$\langle U \rangle = 1.$$

BP2 Εάν $D \sqcup U$ συμβολίζει το διάγραμμα D με μία επιπλέον συνιστώσα, η οποία δεν έχει καμία διασταύρωση, τότε

$$\langle D \sqcup U \rangle = -(A^2 + A^{-2})\langle D \rangle.$$

BP3 Εάν στο διάγραμμα D ‘ανοίξουμε’ μία διασταύρωση, σύμφωνα με τα Σχήματα 3.1 και 3.2, για να πάρουμε τα διαγράμματα D_L και D_R , τότε

$$\langle D \rangle = A\langle D_L \rangle + A^{-1}\langle D_R \rangle.$$

Όταν λέμε ότι ‘ανοίγουμε’ μία διασταύρωση εννοούμε ότι κόβουμε τα σκοινιά που διασταυρώνονται, και ενώνουμε κάθε άκρο του πάνω περάσματος με ένα από τα άκρα του κάτω περάσματος. Εάν ενώσουμε κάθε άκρο του πάνω περάσματος με το άκρο του κάτω περάσματος που βρίσκεται στα αριστερά, συμβολίζουμε το νέο διάγραμμα D_L , ενώ εάν ενώσουμε κάθε άκρο του πάνω περάσματος με το άκρο του κάτω περάσματος που βρίσκεται στα δεξιά, συμβολίζουμε το νέο διάγραμμα D_R .



Σχήμα 3.1: ‘Ανοίγω’ μία διασταύρωση προς τα αριστερά, (με θετική κατάσταση).



Σχήμα 3.2: ‘Ανοίγω’ μία διασταύρωση προς τα δεξιά, (με αρνητική κατάσταση).

Οι παραπάνω ιδιότητες δίδουν ένα καλά ορισμένο πολυώνυμο εάν δείξουμε ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τη διάταξη με την οποία ‘ανοίγουμε’ τις διασταυρώσεις. Προς το παρόν υποθέτουμε ότι αυτό ισχύει και υπολογίζουμε κάποια πολυώνυμα. Θα το αποδείξουμε σε λίγο.

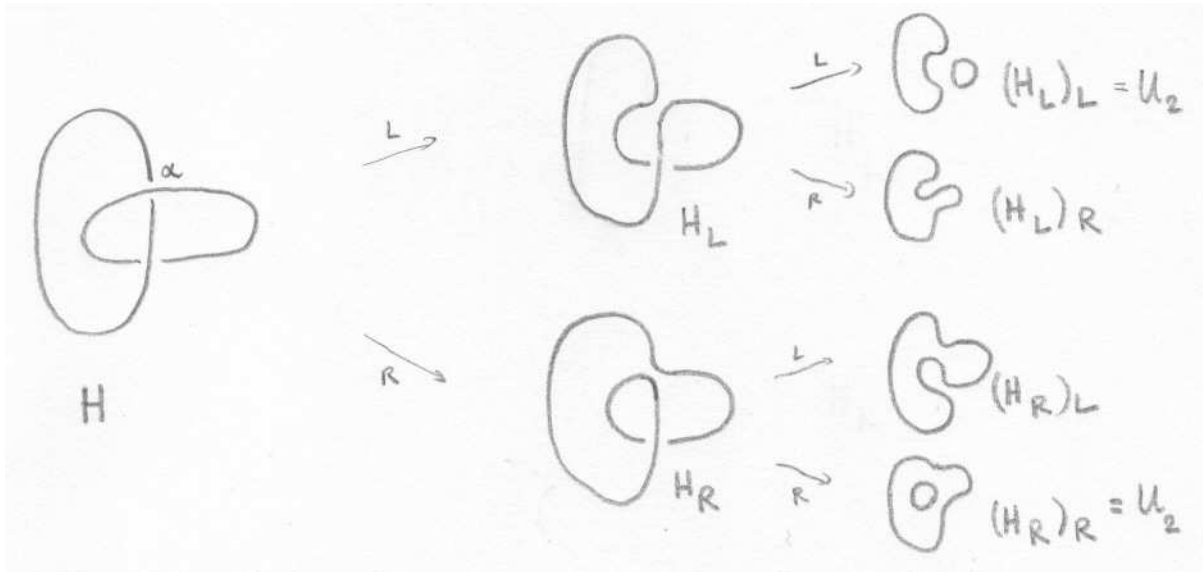
Παράδειγμα 3.1 Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες **BP1** και **BP2** υπολογίζουμε ότι το διάγραμμα του μη-συνδέσμου με k συνιστώσες και καμία διασταύρωση, $U_k = \bigsqcup_{i=1}^k U$, έχει πολυώνυμο

$$\langle U_k \rangle = (-1)^{k-1} (A^2 + A^{-2})^{k-1}.$$

Παράδειγμα 3.2 Θα υπολογίσουμε το πολυώνυμο του διαγράμματος H του συνδέσμου Hopf, στο Σχήμα 3.3, ανοίγοντας πρώτα τη διασταύρωση a . Βλέπουμε ότι τόσο το διάγραμμα H_L όσο και το διάγραμμα H_R είναι διαγράμματα του μη-κόμβου. Όμως δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα αντίστοιχα πολυώνυμα είναι τα ίδια με του U , αφού δεν έχουμε δείξει ότι το πολυώνυμο $\langle D \rangle$ είναι ισοτοπική αναλλοίωτη: θα δούμε αμέσως ότι δεν είναι!

Ανοίγοντας τη διασταύρωση στο H_L , βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle H_L \rangle &= A \langle U_2 \rangle + A^{-1} \langle U \rangle \\ &= -A(A^2 + A^{-2}) + A^{-1} \\ &= -A^3, \end{aligned}$$



Σχήμα 3.3: Υπολογισμός του πολυωνύμου του συνδέσμου Hopf.

ενώ για το H_R έχουμε

$$\begin{aligned}\langle H_R \rangle &= A\langle U \rangle + A^{-1}\langle U_2 \rangle \\ &= A - A^{-1}(A^2 + A^{-2}) \\ &= -A^{-3}.\end{aligned}$$

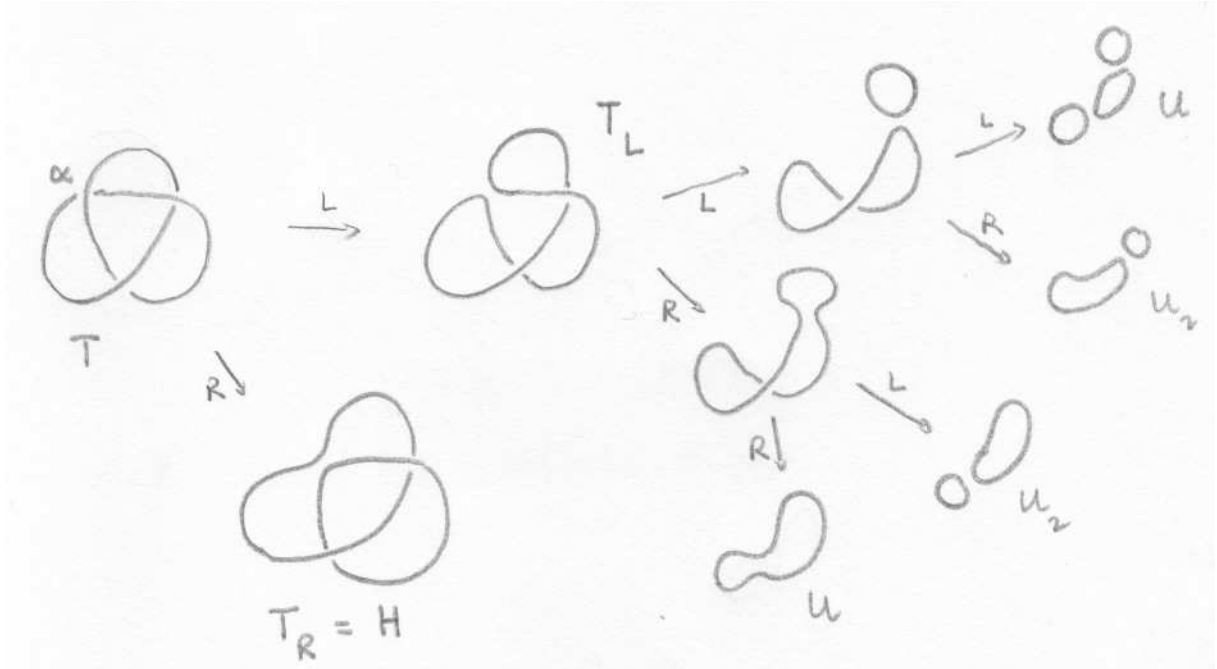
Άρα το πολυώνυμο του διαγράμματος H είναι

$$\begin{aligned}\langle H \rangle &= A\langle H_L \rangle + A^{-1}\langle H_R \rangle \\ &= A(-A^3) + A^{-1}(-A^{-3}) \\ &= -(A^4 + A^{-4}).\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.3 Θα υπολογίσουμε το πολυώνυμο του διαγράμματος T του τριφυλλίου. Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 3.4, εάν ανοίξουμε τη διασταύρωση α , το διάγραμμα T_R είναι ο σύνδεσμος Hopf, ενώ το T_L είναι διάγραμμα του μη-κόμβου με δύο διασταυρώσεις. Ας δούμε πιο αναλυτικά τον υπολογισμό για το διάγραμμα $K = T_L$.

$$\begin{aligned}\langle K \rangle &= A\langle K_L \rangle + A^{-1}\langle K_R \rangle \\ &= A(A\langle (K_L)_L \rangle + A^{-1}\langle (K_L)_R \rangle) + A^{-1}(A\langle (K_R)_L \rangle + A^{-1}\langle (K_R)_R \rangle) \\ &= A(A\langle U_3 \rangle + A^{-1}\langle U_2 \rangle) + A^{-1}(A\langle U_2 \rangle + A^{-1}\langle U \rangle) \\ &= A^2\langle U_3 \rangle + A^0\langle U_2 \rangle + A^0\langle U_2 \rangle + A^{-2}\langle U \rangle\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 &= A^2(A^2 + A^{-2})^2 - 2(A^2 + A^{-2}) + A^{-2} \\
 &= A^6.
 \end{aligned}$$



Σχήμα 3.4: Υπολογισμός του πολυωνύμου του τριφυλλιού.

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
 \langle T \rangle &= A \langle T_L \rangle + A^{-1} \langle T_R \rangle \\
 &= AA^6 - A^{-1}(A^4 + A^{-4}) \\
 &= A^7 - A^3 - A^{-5}.
 \end{aligned}$$

Άσκηση 3.1 Δείξτε ότι ο αντικατοπτρισμός του τριφυλλιού, \overline{T} , έχει πολυώνυμο

$$\langle \overline{T} \rangle = A^{-7} - A^{-3} - A^5.$$

Λήμμα 3.1 Το πολυώνυμο $\langle D \rangle$ είναι αναλλοίωτο από αλλαγές τύπου **R0** και κινήσεις **R2** και **R3**.

Απόδειξη. Οι αλλαγές τύπου **R0** δεν αλλάζουν τις διασταυρώσεις, και συνεπώς δεν επηρεάζουν το πολυώνυμο $\langle D \rangle$.

Στο Σχήμα 3.5 παρουσιάζουμε τον υπολογισμό που δείχνει ότι εάν αλλάξουμε ένα διάγραμμα μόνο στο εσωτερικό ενός δίσκου, μέσω της κίνησης **R2**, το πολυώνυμο δεν αλλάζει. Στο Σχήμα δείχνουμε μόνο το μέρος του διαγράμματος που περιέχεται στο δίσκο, ενώ το υπόλοιπο διάγραμμα παραμένει αμετάβλητο.

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{D} \rangle &= A \langle \mathcal{D} \rangle + A^{-1} \langle \mathcal{D} \rangle \\
 &= A \left(A \langle \mathcal{D} \rangle + A^{-1} \langle \mathcal{D} \rangle \right) + A^{-1} \left(A \langle \mathcal{D} \rangle + A^{-1} \langle \mathcal{D} \rangle \right) \\
 &= (A^2 + A^{-2}) \langle \mathcal{D} \rangle + \langle \mathcal{D} \cup U \rangle + \langle \mathcal{D} \rangle \\
 &= (A^2 + A^{-2}) \langle \mathcal{D} \rangle - (A^2 + A^{-2}) \langle \mathcal{D} \rangle + \langle \mathcal{D} \rangle \\
 &= \langle \mathcal{D} \rangle .
 \end{aligned}$$

Σχήμα 3.5: Το πολυώνυμο $\langle D \rangle$ είναι αναλλοίωτο από κινήσεις **R2**.

Στο Σχήμα 3.6 παρουσιάζουμε τον υπολογισμό που δείχνει ότι εάν αλλάξουμε ένα διάγραμμα μόνο στο εσωτερικό ενός δίσκου, μέσω της κίνησης **R3**, το πολυώνυμο δεν αλλάζει.

□

Λήμμα 3.2 Κινήσεις τύπου **R1**, πολλαπλασιάζουν το πολυώνυμο $\langle D \rangle$ επί $-A^{-3}$ ή $-A^3$.

Απόδειξη. Στο Σχήμα 3.7 παρουσιάζουμε τον υπολογισμό που δείχνει ότι εάν αλλάξουμε ένα διάγραμμα μόνο στο εσωτερικό ενός δίσκου, μέσω της κίνησης **R1**, το πολυώνυμο αλλάζει κατά ένα παράγοντα $-A^3$.

$$\begin{aligned}
 \langle \text{crossing} \rangle &= A \langle \text{positive crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{negative crossing} \rangle \\
 &= A \langle \text{positive crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{positive crossing} \rangle \\
 \langle \text{crossing} \rangle &= A \langle \text{positive crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{negative crossing} \rangle \\
 &= A \langle \text{positive crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{positive crossing} \rangle
 \end{aligned}$$

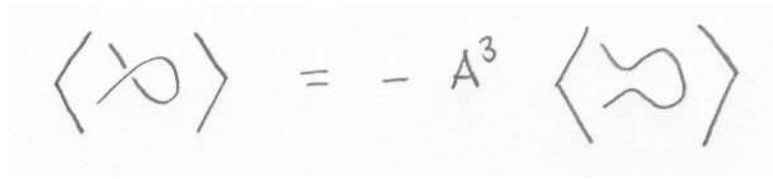
Σχήμα 3.6: Το πολυώνυμο $\langle D \rangle$ είναι αναλλοίωτο από κινήσεις **R3**.

$$\begin{aligned}
 \langle \text{loop} \rangle &= A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{empty} \rangle \\
 &= A \langle \text{empty} \rangle - A^{-1} (A^2 + A^{-2}) \langle \text{empty} \rangle \\
 &= -A^{-3} \langle \text{empty} \rangle
 \end{aligned}$$

Σχήμα 3.7: Η μεταβολή στο πολυώνυμο $\langle D \rangle$ από κινήσεις **R1**.

□

Άσκηση 3.2 Δείξτε ότι η κίνηση **R1'**, αλλάζει το πολυώνυμο κατά ένα παράγοντα $-A^{-3}$, δηλαδή όπως στο Σχήμα 3.8



Σχήμα 3.8: Η μεταβολή στο πολυώνυμο $\langle D \rangle$ από κινήσεις **R1'**.

Άσκηση 3.3 Εάν H είναι ο σύνδεσμος Hopf, T το τριφύλλι και E το οχτάρι, δείξτε ότι

$$\langle E \rangle = A\langle T \rangle - A^{-4}\langle H \rangle.$$

Επιστρέφουμε για να δείξουμε ότι το πολυώνυμο $\langle D \rangle$ εξαρτάται μόνον από το διάγραμμα D και όχι από τη διάταξη των διασταυρώσεων που επιλέγουμε για να το υπολογίσουμε. Μία **κατάσταση** για το διάγραμμα D είναι μία απεικόνιση από το σύνολο των διασταυρώσεων του D στο σύνολο $\{-1, +1\}$. Υπάρχουν 2^n καταστάσεις σε ένα διάγραμμα με n διασταυρώσεις. Μία κατάσταση προσδιορίζει τον τρόπο με τον οποίο ανοίγουμε κάθε διασταύρωση στο D : Εάν η διασταύρωση απεικονίζεται στο $+1$, ανοίγουμε τη διασταύρωση προς τα αριστερά, όπως στο Σχήμα 3.1. Στην αντίθετη περίπτωση, ανοίγουμε τη διασταύρωση προς τα δεξιά, όπως στο Σχήμα 3.2. Όταν ανοίγουμε και τις n διασταυρώσεις, έχουμε ένα διάγραμμα χωρίς διασταυρώσεις, δηλαδή το διάγραμμα αποτελείται από k ξένους κύκλους, όπου ο αριθμός των συνιστωσών k εξαρτάται από το αρχικό διάγραμμα D και την κατάσταση. Δηλαδή κάθε κατάσταση προσδιορίζει έναν τρόπο να εφαρμόσουμε επανειλημμένα τον κανόνα **BP3**, και καταλήγει σε έναν όρο της μορφής $A^m\langle U_k \rangle$, όπως είδαμε στον υπολογισμό του 3.1. Το άθροισμα για τις 2^n καταστάσεις δίνει μία έκφραση για το πολυώνυμο $\langle D \rangle$. Αλλά αυτό το άθροισμα εξαρτάται μόνον από το διάγραμμα D , και όχι από τη διάταξη των διασταυρώσεων.

Έχουμε δείξει ότι το πολυώνυμο $\langle D \rangle$ ορίζεται με μοναδικό τρόπο από τις ιδιότητες **BP1**, **BP2** και **BP3**, και ότι είναι αναλλοίωτο από τις κινήσεις **R0**, **R2** και **R3**. Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το πολυώνυμο Kauffman για προσανατολισμένους συνδέσμους, το οποίο είναι ισοτοπική αναλλοίωτη. Υπενθυμίζουμε την περιέλιξη $w(D)$ ενός προσανατολισμένου διαγράμματος, δηλαδή το άθροισμα των προσήμων όλων των

διασταυρώσεων.

Ορισμός. Για κάθε προσανατολισμένο διάγραμμα συνδέσμου D , ονομάζουμε **πολυώνυμο Kauffman** το ακόλουθο πολυώνυμο σε μία μεταβλητή A ,

$$f[D] = (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle .$$

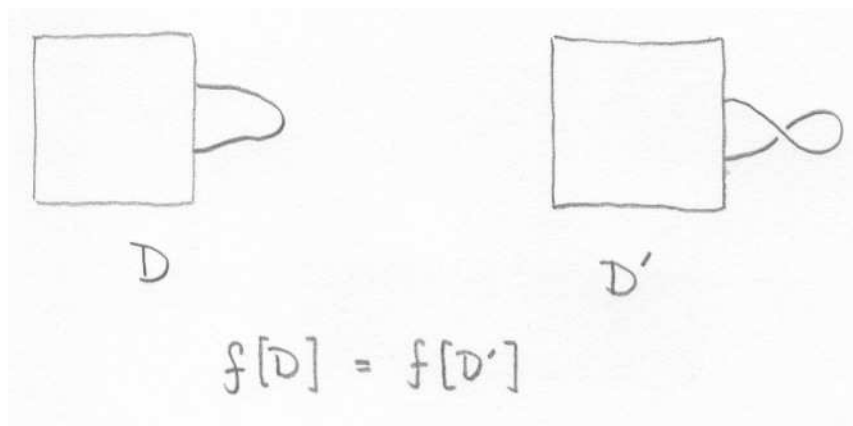
Θεώρημα 3.3 Το πολυώνυμο Kauffman είναι ισοτοπική αναλλοίωτη προσανατολισμένων συνδέσμων.

Απόδειξη. Τόσο η περιέλιξη $w(D)$ όσο και το πολυώνυμο $\langle D \rangle$ είναι αναλλοίωτα από κινήσεις **R0**, **R2** και **R3**. Αρκεί να ελέγξουμε τι γίνεται για την κίνηση **R1**.

Θεωρούμε το προσανατολισμένο διάγραμμα D , και έστω D' το προσανατολισμένο διάγραμμα με μία επιπλέον διασταύρωση, που προκύπτει από το D με μία κίνηση **R1**. Τότε $w(D') = w(D) - 1$ και $\langle D' \rangle = -A^{-3} \langle D \rangle$. Άρα

$$\begin{aligned} f[D'] &= (-A)^{-3w(D')} \langle D' \rangle \\ &= (-A)^{-3(w(D)-1)} ((-A)^{-3} \langle D \rangle) \\ &= (-A)^{-3w(D)} (-A)^3 (-A)^{-3} \langle D \rangle \\ &= f[D]. \end{aligned}$$

□



Σχήμα 3.9: Το πολυώνυμο Kauffman είναι αναλλοίωτο από κινήσεις **R1**.

Παράδειγμα 3.4 Για το σύνδεσμο Hopf έχουμε $\langle H \rangle = -(A^4 + A^{-1})$, και εάν δώσουμε αντίθετο προσανατολισμό στις δύο συνιστώσες, η περιέλιξη είναι $w(H_-) =$

–2. Άρα

$$\begin{aligned} f[H_-] &= (-A)^{-3(-2)}(-A^4 + A^{-4}) \\ &= -A^{-6}(A^4 + A^{-4}) \\ &= -(A^{10} + A^2) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.5 Θα υπολογίσουμε το πολυώνυμο Kauffman για το τριφύλλι T και τον αντικατοπτρισμό του \bar{T} . Γνωρίζουμε ότι για κόμβους, η περιέλιξη δεν εξαρτάται από την επιλογή προσανατολισμού, και είναι $w(T) = -3$, $w(\bar{T}) = 3$. Άρα έχουμε

$$f[T] = (-A)^9(A^7 - A^3 - A^{-5}) \quad \text{και} \quad f[\bar{T}] = (-A)^{-9}(A^{-7} - A^{-3} - A^5).$$

Συμπεραίνουμε ότι οι δύο κόμβοι δεν είναι ισοτοπικοί.

Πόρισμα 3.4 Το τριφύλλι δεν είναι ισοτοπικό με τον αντικατοπτρισμό του,

$$T \not\sim \bar{T}.$$

Άσκηση 3.4 Υπολογίστε το πολυώνυμο Kauffman για το οχτάρι.

Πρόταση 3.5 Εάν D είναι ένα διάγραμμα συνδέσμου, και \bar{D} ο αντικατοπτρισμός του, τότε

$$f[D](A) = f[\bar{D}](A^{-1}),$$

δηλαδή το πολυώνυμο $f[\bar{D}]$ προκύπτει από το $f[D]$ εάν αντικαταστήσουμε το A με το A^{-1} .

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το διάγραμμα \bar{D} είναι ισοτοπικό με το D στο οποίο έχουμε αλλάξει όλες τις διασταυρώσεις. Παρατηρούμε ότι η αλλαγή στις διασταυρώσεις αλλάζει το πρόσημο της περιέλιξης, και εναλλάσσει το A με το A^{-1} στο πολυώνυμο $\langle D \rangle$, έτσι ώστε $\langle \bar{D} \rangle(A) = \langle D \rangle(A^{-1})$. Άρα

$$\begin{aligned} f[\bar{D}](A) &= (-A)^{-3w(\bar{D})} \langle \bar{D} \rangle(A) \\ &= (-A)^{-3(-w(D))} \langle D \rangle(A^{-1}) \\ &= (-A^{-1})^{-3w(D)} \langle D \rangle(A^{-1}) \\ &= f[D](A^{-1}). \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 3.6 Εάν $D \simeq \overline{D}$, τότε $f[D]$ είναι συμμετρικό:

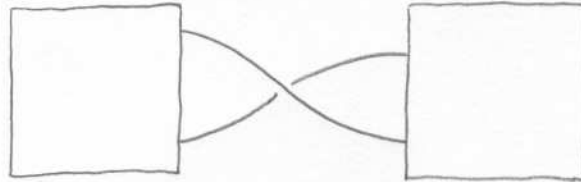
$$f[D](A) = f[D](A^{-1}).$$

Ορισμός. Το πολυώνυμο Jones ενός προσανατολισμένου διαγράμματος συνδέσμου D είναι το πολυώνυμο Laurent

$$V_D(t) = f[D](t^{1/4}).$$

Το πολυώνυμο Jones ανακαλύφθηκε το 1985, και προκάλεσε σημαντικές εξελίξεις στη θεωρία κόμβων. Μέσα σε λίγους μήνες ανακαλύφθηκαν άπειρα νέα πολυώνυμα, που δίδουν σημαντικές πληροφορίες για συνδέσμους και κόμβους. Ως ένα παράδειγμα αυτών των αποτελεσμάτων, θα δώσουμε μία σχέση μεταξύ του πολυωνύμου και του αριθμού των διασταυρώσεων σε ένα διάγραμμα.

Ένα διάγραμμα συνδέσμου λέγεται **συνεκτικό** εάν προκύπτει από ένα συνεκτικό γράφημα στο επίπεδο. Ένα διάγραμμα λέγεται **απλοποιημένο** εάν δεν χωρίζεται σε δύο τμήματα τα οποία συνδέονται με μία διασταύρωση, όπως στο Σχήμα 3.10. Ένα διάγραμμα συνδέσμου λέγεται **εναλλασσόμενο** εάν διατρέχοντας κάθε συνιστώσα, συναντάμε εναλλάξ πάνω και κάτω περάσματα.



Σχήμα 3.10: Μη απλοποιημένο διάγραμμα.

Θεώρημα 3.7 Έστω D συνεκτικό διάγραμμα συνδέσμου, με n διασταυρώσεις και πολυώνυμο Jones $V_D(t)$. Συμβολίζουμε M τον μέγιστο εκθέτη του t στο V_D , και m τον ελάχιστο εκθέτη του t στο V_D . Τότε

$$M - m \leq n.$$

Εάν το διάγραμμα D είναι εναλλασσόμενο και απλοποιημένο, τότε $M - m = n$.

Πόρισμα 3.8 Εάν ένας σύνδεσμος έχει ένα συνεκτικό, απλοποιημένο, εναλλασσόμενο διάγραμμα με n διασταυρώσεις, τότε δεν έχει διάγραμμα με λιγότερες διασταυρώσεις.

Κεφάλαιο 4

Νέοι τοπολογικοί χώροι

Μία τοπολογία στο X είναι ένα υποσύνολο του δυναμοσυνόλου του X , $\mathcal{T} \subseteq \mathfrak{P}(X)$. Η μερική διάταξη του εγκλεισμού, η οποία ορίζεται μεταξύ των υποσυνόλων του $\mathfrak{P}(X)$, ορίζει μία σχέση διάταξης στο σύνολο όλων των τοπολογιών στο X . Μία τοπολογία \mathcal{T} είναι **μικρότερη** από την τοπολογία \mathcal{U} εάν $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{U}$, και αντίστοιχα η \mathcal{U} είναι μεγαλύτερη από την \mathcal{T} . Αυτή η διάταξη των τοπολογιών μας διευκολύνει να ορίσουμε τοπολογίες με συγκεκριμένες ιδιότητες.

Θεώρημα 4.1 Έστω μη κενό σύνολο X , και οικογένεια υποσυνόλων του X , $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{P}(X)$. Τότε υπάρχει μοναδική ελάχιστη τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ στο X για την οποία κάθε σύνολο στη \mathcal{C} είναι ανοικτό, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$. Η τοπολογία $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ αποτελείται από ενώσεις πεπερασμένων τομών συνόλων της \mathcal{C} .

Απόδειξη. Έστω \mathcal{A} η οικογένεια των ενώσεων πεπερασμένων τομών συνόλων της οικογένειας \mathcal{C} . Πιο συγκεκριμένα, εάν $A \in \mathcal{A}$, τότε $A = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} A_j$, όπου για κάθε $j \in \mathcal{J}$ υπάρχει $k_j \in \mathbb{N}$ και $A_{j,1}, \dots, A_{j,k_j}$ σύνολα στην οικογένεια \mathcal{C} , τέτοια ώστε $A_j = \bigcap_{i=1}^{k_j} A_{j,i}$.

Εάν \mathcal{U} είναι τοπολογία στο X και $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$, είναι προφανές ότι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$. Συνεπώς η οικογένεια \mathcal{A} περιέχεται σε κάθε τοπολογία που περιέχει το \mathcal{C} . Εάν δείξουμε ότι \mathcal{A} είναι τοπολογία, αυτή είναι η ελάχιστη τοπολογία στο X που περιέχει το \mathcal{C} , δηλαδή $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \mathcal{A}$.

Ελέγχουμε ότι \mathcal{A} είναι τοπολογία στο X . Το σύνολο X είναι η τομή της κενής οικογένειας υποσυνόλων του X στην \mathcal{A} , ενώ το κενό σύνολο $\emptyset \subseteq X$ είναι η ένωση της κενής οικογένειας υποσυνόλων του X στην \mathcal{A} .

Είναι προφανές ότι ενώσεις συνόλων στην \mathcal{A} ανήκουν στην \mathcal{A} . Πρέπει να δείξουμε ότι οι πεπερασμένες τομές συνόλων στην \mathcal{A} ανήκουν στην \mathcal{A} . Αρκεί να το δείξουμε για την τομή δύο συνόλων, αφού μπορούμε να επεκτείνουμε, με επαγωγή, σε πεπερασμένες οικογένειες. Θεωρούμε σύνολα A και B στο \mathcal{A} , δηλαδή $A = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} A_j$, όπου $A_j =$

$\bigcap_{i=1}^{k_j} A_{j,i}$, για $k_j \in \mathbb{N}$ και $A_{j,i} \in \mathcal{C}$, και $B = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} B_s$, όπου $B_s = \bigcap_{t=1}^{m_s} B_{s,t}$, για $m_s \in \mathbb{N}$ και $B_{s,t} \in \mathcal{C}$, και υπολογίζουμε την τομή τους

$$\begin{aligned} A \cap B &= \left(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} A_j \right) \cap \left(\bigcup_{s \in \mathcal{S}} B_s \right) \\ &= \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \bigcup_{s \in \mathcal{S}} (A_j \cap B_s) \\ &= \bigcup_{(j,s) \in \mathcal{J} \times \mathcal{S}} \left(\bigcap_{i=1}^{k_j} A_{j,i} \cap \bigcap_{t=1}^{m_s} B_{s,t} \right) \end{aligned}$$

η οποία είναι ένωση πεπερασμένων τομών συνόλων του \mathcal{C} . Συνεπώς $A \cap B$ ανήκει στην \mathcal{A} .

Συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \mathcal{A}$ είναι η μοναδική ελάχιστη τοπολογία στο X που περιέχει την οικογένεια \mathcal{C} .

□

Εάν \mathcal{T} είναι η ελάχιστη τοπολογία στο X που περιέχει την οικογένεια \mathcal{C} , λέμε ότι \mathcal{C} είναι **υποβάση** της τοπολογίας \mathcal{T} . Δείξαμε ότι κάθε ανοικτό σύνολο στην τοπολογία \mathcal{T} είναι ένωση πεπερασμένων τομών συνόλων της υποβάσης \mathcal{C} .

Εάν \mathcal{B} είναι οικογένεια υποσυνόλων του X , και κάθε ανοικτό σύνολο στην τοπολογία \mathcal{T} είναι ένωση συνόλων της \mathcal{B} , λέμε ότι \mathcal{B} είναι **βάση** της τοπολογίας \mathcal{T} .

Παράδειγμα 4.1 Οι ανοικτές ημιευθείες αποτελούν υποβάση της τοπολογίας του \mathbb{R} ,

$$\mathcal{C} = \{(-\infty, b) \subseteq \mathbb{R}, (a, \infty) \subseteq \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}\},$$

ενώ τα ανοικτά διαστήματα αποτελούν βάση της τοπολογίας του \mathbb{R} . Πράγματι, κάθε ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R} είναι ένωση διαστημάτων, και κάθε διάστημα είναι η τομή δύο ημιευθειών: $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$.

Παράδειγμα 4.2 Οι ανοικτοί δίσκοι είναι βάση της τοπολογίας ενός μετρικού χώρου.

Η απόδειξη του ακόλουθου Λήμματος είναι απλή εφαρμογή των ιδιοτήτων της αντίστροφης εικόνας.

Λήμμα 4.2 Εάν \mathcal{C} είναι υποβάση της τοπολογίας του Y η απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής εάν $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό για κάθε $B \in \mathcal{C}$.

Γενικότερα, θεωρούμε μία απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ μεταξύ των συνόλων X και Y .

Εάν \mathcal{U} είναι μία τοπολογία στο Y , για να είναι η f συνεχής, πρέπει για κάθε ανοικτό B στο Y , η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ να είναι ανοικτό υποσύνολο του X . Άρα η

μικρότερη τοπολογία στο X με την οποία η f είναι συνεχής έχει ως υποβάση τα σύνολα $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{U}\}$. Τη συμβολίζουμε \mathcal{U}^f .

Εάν \mathcal{T} είναι μία τοπολογία στο X , για να είναι η f συνεχής, πρέπει ένα σύνολο B στο Y να είναι ανοιχτό μόνον όταν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ είναι ανοιχτό στο X . Άρα η μεγαλύτερη τοπολογία στο Y με την οποία η f είναι συνεχής έχει ως υποβάση τα σύνολα $\{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$. Τη συμβολίζουμε \mathcal{T}_f .

Έχουμε ήδη συναντήσει ένα παράδειγμα τοπολογίας που ορίζεται με αυτό τον τρόπο. Η σχετική τοπολογία ενός υποχώρου Y ενός τοπολογικού χώρου X , είναι η μικρότερη τοπολογία με την οποία η ένθεση $\iota : Y \rightarrow X$ είναι συνεχής. Ένα υποσύνολο $A \subseteq Y$ είναι ανοιχτό ακριβώς όταν υπάρχει υποσύνολο $B \subseteq X$, τέτοιο ώστε $A = \iota^{-1}(B) = B \cap Y$.

Τοπολογικό γινόμενο

Στο καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων ορίζονται οι **προβολές**, δηλαδή οι απεικονίσεις

$$\pi_1 : X \times Y \rightarrow X \quad \text{και} \quad \pi_2 : X \times Y \rightarrow Y,$$

για τις οποίες $\pi_1(x, y) = x$ και $\pi_2(x, y) = y$. Εάν X και Y είναι τοπολογικοί χώροι, η **τοπολογία γινόμενο** στο σύνολο $X \times Y$ είναι η μικρότερη τοπολογία ως προς την οποία οι προβολές π_1 και π_2 είναι συνεχείς.

Η αντίστροφη εικόνα του $A \subseteq X$ μέσω της προβολής π_1 είναι $\pi_1^{-1}(A) = A \times Y$, και αντίστοιχα, για $B \subseteq Y$, $\pi_2^{-1}(B) = X \times B$. Συνεπώς τα σύνολα της μορφής $A \times Y$ και $X \times B$, για κάθε A ανοιχτό υποσύνολο του X και κάθε B ανοιχτό υποσύνολο του Y , αποτελούν μία υποβάση της τοπολογίας γινόμενο στο $X \times Y$.

Λήμμα 4.3 Κάθε ανοιχτό σύνολο της τοπολογίας γινόμενο εκφράζεται ως ένωση συνόλων της μορφής $A \times B$, όπου A είναι ανοιχτό στο X και B είναι ανοιχτό στο Y .

Απόδειξη. Από τον ορισμό της τοπολογίας γινόμενο, ένα ανοιχτό σύνολο είναι ένωση πεπερασμένων τομών συνόλων της μορφής $A_i \times Y$ και $X \times B_j$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την αντιμεταθετικότητα και προσεταιριστικότητα της τομής, κάθε ανοιχτό σύνολο εκφράζεται ως ένωση συνόλων της μορφής $(\bigcap_{i=1}^k A_i \times Y) \cap (X \times \bigcap_{j=1}^\ell B_j)$. Αλλά

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i=1}^k A_i \times Y \right) \cap \left(X \times \bigcap_{j=1}^\ell B_j \right) &= \left[\left(\bigcap_{i=1}^k A_i \right) \times Y \right] \cap \left[X \times \left(\bigcap_{j=1}^\ell B_j \right) \right] \\ &= \left[\left(\bigcap_{i=1}^k A_i \right) \cap X \right] \times \left[Y \cap \left(\bigcap_{j=1}^\ell B_j \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\bigcap_{i=1}^k A_i \right) \times \left(\bigcap_{j=1}^{\ell} B_j \right) \\
&= A \times B,
\end{aligned}$$

όπου $A = \bigcap_{i=1}^k A_i$ και $B = \bigcap_{j=1}^{\ell} B_j$.

□

Παράδειγμα 4.3 Η τοπολογία γινόμενο στο σύνολο $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ είναι η ίδια με τη μετρική τοπολογία. Είναι προφανές ότι σύνολα της μορφής $A \times \mathbb{R}$ ή $\mathbb{R} \times A$, όπου A είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R} , είναι ανοικτά στη μετρική τοπολογία.

Αντίστροφα, αρκεί να δείξουμε ότι τα στοιχεία μίας βάσης της μετρικής τοπολογίας είναι ανοικτά στην τοπολογία γινόμενο. Θεωρούμε τη βάση που αποτελείται από ανοικτούς δίσκους, $D(a, r)$, για $a \in \mathbb{R}^2$ και $r > 0$. Θα δείξουμε ότι ο δίσκος $D(a, r)$ εκφράζεται ως ένωση ανοικτών υποσυνόλων στην τοπολογία γινόμενο. Έστω $x = (s, t) \in D(a, r)$ και $\rho = \|x - a\| < r$, $\varepsilon = \frac{(r-\rho)}{2}$. Τότε $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \times (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ είναι ανοικτό στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, και περιέχεται στο $D(x, \sqrt{2}\varepsilon) \subseteq D(a, r)$.

Παράδειγμα 4.4 Για κάθε τοπολογικό χώρο X , θα χρησιμοποιήσουμε σε πολλές περιπτώσεις το τοπολογικό γινόμενο $X \times I$, όπου $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Κάθε ανοικτό υποσύνολο του $X \times I$, είναι ένωση συνόλων της μορφής $A \times B$, όπου A είναι ανοικτό υποσύνολο του X , και $B = I \cap (a, b)$ για κάποιο ανοικτό διάστημα $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Μία σημαντική ιδιότητα του $X \times I$ είναι ότι για κάθε $t \in [0, 1]$, ο υπόχωρος $X \times \{t\} \subseteq X \times I$ είναι ομοιομορφικός με τον τοπολογικό χώρο X . Δηλαδή για κάθε $t \in I$ έχουμε μία φέτα του $X \times I$ ομοιομορφική με το X .

Γενικότερα, για κάθε $y \in Y$ ο υπόχωρος $X \times \{y\} \subseteq X \times Y$ είναι ομοιομορφικός προς τον X , και για κάθε $x \in X$ ο υπόχωρος $\{x\} \times Y \subseteq X \times Y$ είναι ομοιομορφικός με τον Y . Η απεικόνιση $f : X \times \{y\} \rightarrow X$, όπου $f(x, y) = x$, είναι ο περιορισμός της προβολής, και συνεπώς είναι συνεχής. Η συνέχεια της αντίστροφης απεικόνισης $x \mapsto (x, y)$ είναι συνέπεια της ακόλουθης Πρότασης.

Πρόταση 4.4 Εάν $X \times Y$ είναι τοπολογικό γινόμενο και Z τοπολογικός χώρος, μία απεικόνιση $f : Z \rightarrow X \times Y$ είναι συνεχής εάν και μόνον εάν οι συνθέσεις με τις προβολές $\pi_1 \circ f : Z \rightarrow X$ και $\pi_2 \circ f : Z \rightarrow Y$ είναι συνεχείς.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι εάν f είναι συνεχής τότε οι σύνθετες απεικονίσεις $\pi_1 \circ f$ και $\pi_2 \circ f$ είναι συνεχείς.

Για να δείξουμε το αντίστροφο, υπενθυμίζουμε ότι η f είναι συνεχής εάν για κάθε σύνολο U μίας υποβάσης της τοπολογίας γινόμενο, η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Z . Μία υποβάση της τοπολογίας γινόμενο είναι τα σύνολα

$A \times Y$ και $X \times B$, όπου A είναι ανοικτό στο X και B είναι ανοικτό στο Y . Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(A \times Y) = f^{-1}(\pi_2^{-1}(A)) = (\pi_2 \circ f)^{-1}(A)$. Εάν η απεικόνιση $\pi_2 \circ f$ είναι συνεχής, αυτό το σύνολο είναι ανοικτό. Παρόμοια, $f^{-1}(X \times B)$ είναι ανοικτό. Συνεπώς η f είναι συνεχής.

□

Παράδειγμα 4.5 Θα δείξουμε ότι το τοπολογικό γινόμενο δύο κύκλων είναι ομοιομορφικό με τη σπείρα εκ περιστροφής. Ο κύκλος είναι το σύνολο $S^1 = \{v \in \mathbb{C} : |v| = 1\}$ με τη σχετική τοπολογία ως υπόχωρος του επιπέδου $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, και $S^1 \times S^1 = \{(v, w) : v, w \in S^1\}$. Η σπείρα εκ περιστροφής είναι ο υπόχωρος του \mathbb{R}^3

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}.$$

Εάν $v = e^{2\pi i s} = \cos s + i \sin s$ και $w = e^{2\pi i t} = \cos t + i \sin t$, ορίζουμε την απεικόνιση $f : S^1 \times S^1 \rightarrow T$ με $f(v, w) = ((2 + \cos s) \cos t, (2 + \cos s) \sin t, \sin s)$. Ελέγχουμε ότι πράγματι $f(v, w) \in T$ και ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη και συνεχής.

Για να δείξουμε ότι η $f^{-1} : T \rightarrow S^1 \times S^1$ είναι συνεχής, παρατηρούμε ότι εάν $(x, y, z) \in T$, τότε $f^{-1}(x, y, z) = (\cos s + i \sin s, \cos t + i \sin t)$, όπου

$$\sin s = z, \quad \cos s = \sqrt{x^2 + y^2} - 2, \quad \sin t = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Δηλαδή οι συνθέσεις $\pi_1 \circ f^{-1}$ και $\pi_2 \circ f^{-1}$ είναι συνεχείς, και συνεπώς f^{-1} είναι συνεχής.

Τώρα μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της ισοτοπίας, της συνεχούς παραμόρφωσης του χώρου, που χρησιμοποιήσαμε στην ταξινόμηση των κόμβων.

Ορισμός. Ισοτοπία ονομάζεται μία συνεχής απεικόνιση $F : X \times I \rightarrow X$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1. Για κάθε $x \in X$, $F(x, 0) = x$.
2. Για κάθε $t \in I$, ο περιορισμός $F|_{X \times \{t\}} : X \times \{t\} \rightarrow X$ είναι ομοιομορφισμός.

Παράδειγμα 4.6 Η απεικόνιση $F((x, y), t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ είναι μία ισοτοπία του επιπέδου.

Επειδή η τοπολογία του $\mathbb{R}^3 \times [0, 1]$ ως υπόχωρος του \mathbb{R}^4 ταυτίζεται με την τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{R}^3 \times I$, δύο κόμβοι $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $M : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι ισοτοπικοί (με τον ορισμό 2) εάν υπάρχει ισοτοπία του \mathbb{R}^3 , $F : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $M(x) = F(K(x), 1)$. Η ισοτοπία, παραμορφώνοντας το χώρο \mathbb{R}^3 , μεταφέρει τον κόμβο $K(x) = F(K(x), 0)$ στον κόμβο $M(x) = F(K(x), 1)$.

Ορίσαμε το τοπολογικό γινόμενο δύο τοπολογικών χώρων. Ο ανάλογος ορισμός ισχύει για το καρτεσιανό γινόμενο οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους τοπολογικών χώρων $X = \prod_{i=1}^k X_i$. Η τοπολογία γινόμενο είναι η μικρότερη τοπολογία η οποία κάνει όλες τις προβολές $\pi_i : X \rightarrow X_i$ συνεχείς. Μία υποβάση της τοπολογίας γινόμενο αποτελείται από όλες τις αντίστροφες εικόνες $\pi_i^{-1}(A_i)$, όπου A_i είναι ανοικτό υποσύνολο του X_i και $i = 1, \dots, k$. Μία βάση της τοπολογίας γινόμενο αποτελείται από όλα τα υποσύνολα της μορφής $\prod_{i=1}^k A_i$ όπου A_i είναι ανοικτό υποσύνολο του X_i .

Όταν έχουμε καρτεσιανό γινόμενο απείρου πλήθους τοπολογικών χώρων, ο ορισμός είναι ανάλογος, αλλά χρειάζεται κάποια προσοχή στην περιγραφή της βάσης. Εάν $X_j, j \in \mathcal{J}$ είναι μία άπειρη οικογένεια τοπολογικών χώρων, και $X = \prod_{j \in \mathcal{J}} X_j$, η τοπολογία γινόμενο στο X είναι η μικρότερη τοπολογία που κάνει όλες τις προβολές $\pi_j : X \rightarrow X_j$ συνεχείς. Μία υποβάση της τοπολογίας γινόμενο αποτελείται από όλες τις αντίστροφες εικόνες $\pi_j^{-1}(A_j)$, όπου A_j είναι ανοικτό υποσύνολο του X_j και $j \in \mathcal{J}$. Αλλά μία βάση της τοπολογίας γινόμενο αποτελείται από όλες τις πεπερασμένες τομές των συνόλων της υποβάσης, δηλαδή από σύνολα της μορφής $\prod_{j \in \mathcal{J}} A_j$, όπου A_j είναι ανοικτό, γνήσιο υποσύνολο του X_j για πεπερασμένο πλήθος $j \in \{j_1, \dots, j_k\}$ και $A_j = X_j$ για $j \in \mathcal{J} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$.

Άσκηση 4.1 Ελέγξτε ότι το σύνολο $\prod_{i=1}^k \pi_{j_i}^{-1}(A_{j_i})$ είναι πράγματι της μορφής που περιγράφεται πιο πάνω.

Τοπολογικό άθροισμα, ή ξένη ένωση

Η *ξένη ένωση* δύο συνόλων είναι η ένωση των συνόλων, σημαδεμένων με δείκτες, ώστε να έχουν κενή τομή. Για παράδειγμα, η ξένη ένωση δύο κύκλων είναι το σύνολο $S^1 \sqcup S^1 = \{(z, 1) : z \in S^1\} \cup \{(w, 2) : w \in S^1\}$.

Γενικότερα, εάν $Y_j, j \in \mathcal{J}$ είναι μία οικογένεια συνόλων, η *ξένη ένωση* της οικογένειας είναι το σύνολο

$$\bigsqcup_{j \in \mathcal{J}} Y_j = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} Y_j \times \{j\}.$$

Εάν $Y_j, j \in \mathcal{J}$ είναι μία οικογένεια τοπολογικών χώρων, το **τοπολογικό άθροισμα** (ή η ξένη ένωση) της οικογένειας είναι το σύνολο $Y = \bigsqcup_{j \in \mathcal{J}} Y_j$ με τη μεγαλύτερη τοπολογία που κάνει συνεχείς όλες τις ενθέσεις $\iota_j : Y_j \rightarrow Y, \iota_j(y) = (y, j)$. Ένα υποσύνολο B είναι ανοικτό στο Y εάν και μόνον εάν $B \cap (Y_j \times \{j\}) = A \times \{j\}$ για κάποιο ανοικτό υποσύνολο A του Y_j .

Πρόταση 4.5 Εάν Y είναι το τοπολογικό άθροισμα μίας οικογένειας τοπολογικών χώρων $Y_j, j \in \mathcal{J}$, μία απεικόνιση $f : Y \rightarrow X$ είναι συνεχής εάν και μόνον εάν, για κάθε $j \in \mathcal{J}$ η σύνθεση $f \circ \iota_j : Y_j \rightarrow X$ είναι συνεχής.

Άσκηση 4.2 Αποδείξτε την πιο πάνω Πρόταση.

Παράδειγμα 4.7 Ένας σύνδεσμος με k συνιστώσες είναι μία εμφύτευση

$$L : \bigsqcup_{i=1}^k S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Χώρος πηλίκο

Έστω τοπολογικός χώρος X και απεικόνιση του X επί του συνόλου Y , $p : X \longrightarrow Y$. Η **τοπολογία πηλίκο** στο Y (από την απεικόνιση p) είναι η μεγαλύτερη τοπολογία με την οποία η απεικόνιση p είναι συνεχής. Ένα υποσύνολο $B \subseteq Y$ είναι ανοικτό στην τοπολογία πηλίκο εάν και μόνον εάν $p^{-1}(B)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X .

Μία απεικόνιση $p : X \longrightarrow Y$ ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας στο X : $x_1 \sim x_2$ εάν $p(x_1) = p(x_2)$. Αντίστροφα, κάθε σχέση ισοδυναμίας \sim στο X , ορίζει μία απεικόνιση, την προβολή στο σύνολο-πηλίκο, $p : X \longrightarrow X/\sim$. Εάν X είναι τοπολογικός χώρος, το σύνολο X/\sim με την τοπολογία πηλίκο από την απεικόνιση $p : X \longrightarrow X/\sim$ ονομάζεται **χώρος πηλίκο** του X ως προς τη σχέση ισοδυναμίας \sim .

Παράδειγμα 4.8 Στο διάστημα $I = [0, 1]$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας που παράγεται από $0 \sim 1$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι τα μονοσύνολα $\{t\}$ για $0 < t < 1$, και το σύνολο $\{0, 1\}$. Διαισθητικά, ταυτίζουμε τα δύο άκρα του διαστήματος. Ο χώρος πηλίκο I/\sim είναι ομοιομορφικός με τον κύκλο S^1 . Θεωρούμε την απεικόνιση $g : I/\sim \longrightarrow S^1$ η οποία απεικονίζει την κλάση του t στο $e^{2\pi it}$. Η g είναι καλά ορισμένη, αφού εάν $s \sim t$ τότε $e^{2\pi it} = e^{2\pi is}$. Η g είναι αμφιμονοσήμαντη, αφού, για $s, t \in I$, ισχύει $e^{2\pi it} = e^{2\pi is}$ μόνον εάν $s = t$ ή $|s - t| = 1$. Θα δείξουμε ότι η g και η g^{-1} είναι συνεχείς.

Ας δούμε πρώτα την αντίστροφη απεικόνιση, $h = g^{-1} : S^1 \longrightarrow I/\sim$. Έστω ότι A είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του I . Θέλουμε να δείξουμε ότι $h^{-1}(A)$ είναι ανοικτό, δηλαδή ότι $g(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του S^1 . Έστω ένα σημείο $z \in g(A)$. Τότε $z = e^{2\pi it}$, για κάποιο $[t] \in I/\sim$. Αφού A είναι ανοικτό, $p^{-1}(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του I . Δηλαδή, για κάθε $s \sim t$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \cap I \subseteq p^{-1}(A)$. Πιο συγκεκριμένα, εάν $t \neq 0$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subseteq p^{-1}(A)$, ενώ εάν $t \sim 0$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $[0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1] \subseteq p^{-1}(A)$. Σε κάθε περίπτωση το τόξο $\{e^{2\pi is} : s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)\}$ ή το τόξο $\{e^{2\pi is} : s \in [0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1]\}$ ανήκουν στο $g(A) \subseteq S^1$. Συνεπώς $g(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του S^1 .

Για να δείξουμε ότι η g είναι συνεχής θα βασιστούμε στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 4.6 Θεωρούμε τοπολογικό χώρο X , σχέση ισοδυναμίας \sim στο X και την προβολή στο χώρο πηλίκου $p : X \rightarrow X/\sim$, καθώς και τοπολογικό χώρο Z . Μία απεικόνιση $g : X/\sim \rightarrow Z$ είναι συνεχής εάν και μόνον εάν η $g \circ p : X \rightarrow Z$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. Εφ' όσον η προβολή p είναι συνεχής, εάν g είναι συνεχής, η σύνθεση $g \circ p$ είναι συνεχής.

Για το αντίστροφο, εάν η $g \circ p$ είναι συνεχής, για κάθε ανοικτό υποσύνολο A του Z , το $(g \circ p)^{-1}(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X . Αλλά $(g \circ p)^{-1}(A) = p^{-1}(g^{-1}(A))$, και συνεπώς $g^{-1}(A)$ είναι ανοικτό στην τοπολογία πηλίκου.

□

Παρατηρούμε ότι οι εικόνες ανοικτών ή κλειστών συνόλων μέσω συνεχών απεικονίσεων δεν είναι ανοικτά ή κλειστά σύνολα. Για παράδειγμα, η απεικόνιση $f : I \rightarrow S^1 : t \mapsto e^{2\pi it}$ είναι συνεχής, το $[0, \frac{1}{2})$ είναι ανοικτό στο I , αλλά η εικόνα του είναι το τόξο $\{e^{i\theta} : 0 \leq \theta < \frac{1}{2}\}$, το οποίο δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του S^1 .

Ορισμός. Η απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ λέγεται **ανοικτή** εάν για κάθε ανοικτό υποσύνολο A του X , η εικόνα $f(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y .

Η απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ λέγεται **κλειστή** εάν για κάθε κλειστό υποσύνολο A του X , η εικόνα $f(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y .

Παράδειγμα 4.9 Η απεικόνιση $f : I \rightarrow S^1 : t \mapsto e^{2\pi it}$ είναι συνεχής και κλειστή, αλλά δεν είναι ανοικτή. Η αντίστροφη απεικόνιση, $f^{-1} : S^1 \rightarrow I$, είναι ανοικτή και κλειστή, αλλά δεν είναι συνεχής.

Η συνεχής απεικόνιση $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$ είναι ανοικτή, αλλά δεν είναι κλειστή: το υποσύνολο $\{(x, \frac{1}{x}) : x \neq 0\}$ είναι κλειστό στο \mathbb{R}^2 , αλλά η εικόνα του είναι το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, το οποίο δεν είναι κλειστό στο \mathbb{R} .

Εάν μία συνεχής απεικόνιση είναι ανοικτή ή κλειστή, τότε η εικόνα της έχει την τοπολογία πηλίκου.

Πρόταση 4.7 Εάν X και Y είναι τοπολογικοί χώροι, και η απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής, εικονική και είναι είτε ανοικτή είτε κλειστή, τότε ο χώρος Y έχει την τοπολογία πηλίκου της f .

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι A είναι ανοικτό στο Y εάν και μόνον εάν $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό στο X . Εάν A είναι ανοικτό στο Y , $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό στο X αφού η f είναι συνεχής.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι $A \subseteq Y$ και $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό στο X . Εάν η f είναι ανοικτή απεικόνιση, τότε $A = f(f^{-1}(A))$ είναι ανοικτό. Εάν η f είναι κλειστή απεικόνιση, απεικονίζει το κλειστό σύνολο $X \setminus f^{-1}(A)$ σε κλειστό υποσύνολο του Y . Συνεπώς $f(X \setminus f^{-1}(A))$ είναι κλειστό

□

Άσκηση 4.3 Στο \mathbb{R} ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim x'$ εάν $x - x' \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι \mathbb{R}/\sim είναι ομοιομορφικό με τον κύκλο, και ότι η προβολή είναι ανοικτή απεικόνιση.

Παράδειγμα 4.10 Στο σύνολο $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim_1 y$ εάν υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $y = \lambda x$. Θα δείξουμε ότι ο χώρος πηλίκο είναι ομοιομορφικός με τη σφαίρα, $X/\sim_1 \cong S^2$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.7, αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση $p_1 : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow S^2 : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ είναι ανοικτή. Έστω $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, και ε τέτοιο ώστε $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\|x\|$. Τότε οι δίσκοι $D(x, \varepsilon)$ αποτελούν βάση της τοπολογίας του $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Η εικόνα $p_1(D(x, \varepsilon))$ είναι η τομή της σφαίρας S^2 με έναν ανοικτό κώνο στο \mathbb{R}^3 , και συνεπώς είναι ανοικτό στη σχετική τοπολογία της σφαίρας. Άρα η p_1 είναι ανοικτή απεικόνιση, και $X/\sim_1 \cong S^2$.

Παράδειγμα 4.11 Στη σφαίρα S^2 ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim_2 -x$, η οποία ταυτίζει τα αντιποδικά σημεία x και $-x$. Ο χώρος πηλίκο S^2/\sim_2 ονομάζεται **προβολικό επίπεδο**, και συμβολίζεται $\mathbb{R}P^2$.

Στο σύνολο $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ορίζουμε μία άλλη σχέση ισοδυναμίας $x \sim_3 y$ εάν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $y = \lambda x$. Θα δείξουμε ότι ο χώρος πηλίκο X/\sim_3 είναι ομοιομορφικός με το προβολικό επίπεδο.

Θεωρούμε τις προβολές $p_2 : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ και $p_3 : X \rightarrow X/\sim_3$, καθώς και την απεικόνιση $f : X/\sim_3 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ η οποία απεικονίζει την κλάση $[x]$, για $x \in X$, στην κλάση $\left[\frac{x}{\|x\|}\right] \in \mathbb{R}P^2$. Η f είναι καλά ορισμένη: εάν $x = \lambda y$ για $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\frac{x}{\|x\|} = \pm \frac{y}{\|y\|}$. Η f είναι αμφιμονοσήμαντη: εάν $\frac{x}{\|x\|} = \pm \frac{y}{\|y\|}$, τότε $x = \lambda y$ για $\lambda \in \mathbb{R}$.

Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής, παρατηρούμε ότι η $f \circ p_3$ είναι συνεχής, αφού $f \circ p_3 = p_2 \circ p_1$. Συνεπώς, από την Πρόταση 4.6, η f είναι συνεχής.

Για να δείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής, παρατηρούμε ότι, εάν $\iota : S^2 \rightarrow X$ είναι η ένθεση, $f^{-1} \circ p_2 = p_3 \circ \iota$ η οποία είναι συνεχής, και συνεπώς η f^{-1} είναι συνεχής από την Πρόταση 4.6.

Παράδειγμα 4.12 Θεωρούμε ένα τετράγωνο στο οποίο κολλάμε την κάτω πλευρά με την πάνω, και την αριστερή με τη δεξιά, με την ίδια κατεύθυνση. Συγκεκριμένα, στο σύνολο $I^2 = I \times I = \{(s, t) : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας που παράγεται από τις

1. για κάθε s , $(s, 0) \sim (s, 1)$ και
2. για κάθε t , $(0, t) \sim (1, t)$.

Το σύνολο πηλίκο αποτελείται από τεσσάρων ειδών κλάσεις:

1. εάν $0 < s < 1$ και $0 < t < 1$, τότε $[(s, t)] = \{(s, t)\}$
2. εάν $0 < s < 1$, τότε $[s, 0] = [s, 1] = \{(s, 0), (s, 1)\}$
3. εάν $0 < t < 1$, τότε $[0, t] = [1, t] = \{(0, t), (1, t)\}$ και
4. $[0, 0] = [0, 1] = [1, 0] = [1, 1] = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

Θα δείξουμε ότι ο χώρος πηλίκο I^2/\sim είναι ομοιομορφικός με τη σπείρα $S^1 \times S^1$. Θεωρούμε την προβολή $p : I^2 \rightarrow I^2/\sim$ και ορίζουμε τις απεικονίσεις $f : I^1 \rightarrow S^1 \times S^1 : (s, t) \mapsto (e^{2\pi is}, e^{2\pi it})$ και $g : I^2/\sim \rightarrow S^1 \times S^1, [(s, t)] \mapsto (e^{2\pi is}, e^{2\pi it})$. Παρατηρούμε ότι η g είναι καλά ορισμένη και αμφιμονοσήμαντη, αφού για $s \neq s' \in I$, $e^{2\pi is} = e^{2\pi is'}$ ακριβώς όταν τα s και s' είναι 0 ή 1. Η g είναι συνεχής, αφού η $f = g \circ p$ είναι συνεχής.

Έστω h η αντίστροφη απεικόνιση, $h = g^{-1} : S^1 \times S^1 \rightarrow I^2/\sim$. Για να δείξουμε ότι η h είναι συνεχής, εξετάζουμε τα σημεία του $S^1 \times S^1$ που απεικονίζονται σε διαφορετικά είδη σημείων του I^2/\sim .

Εάν $(u, v) \in S^1 \times S^1$ και $u \neq 1, v \neq 1$, τότε $(u, v) = (e^{2\pi is}, e^{2\pi it})$ για μοναδικά s και t τέτοια ώστε $0 < s < 1$ και $0 < t < 1$. Η απεικόνιση $h(u, v) = (\frac{1}{2\pi} \arg u, \frac{1}{2\pi} \arg v)$ είναι συνεχής στο (u, v) .

Εάν $(u, v) = (1, e^{2\pi it})$ για $0 < t < 1$, τότε $h(u, v) = [(0, t)] = \{(0, t), (1, t)\}$. Θεωρούμε μία περιοχή V του $[(0, t)] \in I^2/\sim$. Η προβολή $p : I^2 \rightarrow I^2/\sim$ είναι συνεχής, άρα $p^{-1}(V)$ περιέχει ένα ανοικτό σύνολο $A \subseteq I^2$, τέτοιο ώστε $(0, t) \in A$ και $(1, t) \in A$. Άρα υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $\delta > 0$ τέτοια ώστε το σύνολο $D = [0, \delta] \times (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cup (1 - \delta, 1] \times (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subseteq A$. Τώρα $f(D) = \{(e^{2\pi is}, e^{2\pi ir}) : (s, r) \in D\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $S^1 \times S^1$, που περιέχει το σημείο $(1, e^{2\pi it})$, και $h(f(D)) = p(D) \subseteq V$. Δηλαδή η h είναι συνεχής στο $(1, e^{2\pi it})$.

Παρόμοια δείχνουμε ότι η h είναι συνεχής στα σημεία $(e^{2\pi is}, 1)$, για $0 < s < 1$, και στο σημείο $(1, 1)$. Καταλήγουμε ότι η h είναι συνεχής απεικόνιση, και ότι η g είναι ομοιομορφισμός.

Άσκηση 4.4 Στο \mathbb{R}^2 ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \text{εάν} \quad (x - x', y - y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Δείξτε ότι ο χώρος πηλίκο \mathbb{R}^2/\sim είναι επίσης ομοιομορφικός με τη σπείρα $S^1 \times S^1$ και ότι η προβολή είναι ανοικτή απεικόνιση.

Κεφάλαιο 5

Ιδιότητες τοπολογικών χώρων

Κλειστότητα

Ορισμός. Θεωρούμε ένα υποσύνολο C ενός τοπολογικού χώρου X . Το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του X που περιέχει το C ονομάζεται **κλειστότητα**, ή **κλειστή θήκη** του C , και συμβολίζεται \bar{C} . \bar{C} είναι η τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων του X που περιέχουν το C :

$$\bar{C} = \bigcap \{F \subseteq X : C \subseteq F, F \text{ κλειστό στο } X\}.$$

Λήμμα 5.1 Ένα σημείο $x \in X$ ανήκει στην κλειστότητα \bar{C} εάν και μόνον εάν κάθε περιοχή του x τέμνει το C .

Απόδειξη. Εάν υπάρχει περιοχή του x που δεν τέμνει το C τότε υπάρχει ανοικτό υποσύνολο A του X τέτοιο ώστε $x \in A$ και $A \cap C = \emptyset$, άρα $C \subseteq X \setminus A$. Αλλά $X \setminus A$ είναι κλειστό, άρα $\bar{C} \subseteq X \setminus A$, και αφού $x \in A$, $x \notin \bar{C}$.

Αντίστροφα, εάν $x \notin \bar{C}$, τότε $x \in X \setminus \bar{C}$, το οποίο είναι ανοικτό. Άρα το $X \setminus \bar{C}$ είναι μία περιοχή του x που δεν τέμνει το \bar{C} .

□

Τα σημεία του X που ανήκουν στο \bar{C} λέγονται **οριακά σημεία** του C .

Ιδιότητα Hausdorff

Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται χώρος Hausdorff εάν για κάθε δύο σημεία $x, y \in X$, $x \neq y$, υπάρχουν περιοχές V του x και W του y , τέτοιες ώστε $V \cap W = \emptyset$.

Παράδειγμα 5.1 Ένας μετρικός χώρος είναι χώρος Hausdorff . Πράγματι, εάν $x \neq y$ τότε $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y) > 0$, και οι ανοικτοί δίσκοι $D(x, \varepsilon)$ και $D(y, \varepsilon)$ είναι ξένοι μεταξύ τους.

Ο χώρος Sierpinski δεν είναι χώρος Hausdorff : η μόνη περιοχή του σημείου 1 είναι όλος ο χώρος.

Λήμμα 5.2 Σε ένα χώρο Hausdorff , κάθε πεπερασμένο υποσύνολο είναι κλειστό.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ένα μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό. Εάν $y \neq x$, τότε υπάρχει ανοικτό υποσύνολο W_y ξένο προς το $\{x\}$. Αλλά $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} W_y$ είναι ένωση ανοικτών υποσυνόλων, και συνεπώς είναι ανοικτό. □

Πρόταση 5.3 Κάθε υπόχωρος ενός χώρου Hausdorff είναι χώρος Hausdorff . Γενικότερα, εάν $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής ενεικόνιση, και Y είναι χώρος Hausdorff , τότε X είναι χώρος Hausdorff .

Το καρτεσιανό γινόμενο χώρων Hausdorff είναι χώρος Hausdorff .

Απόδειξη. Εάν x και y είναι διαφορετικά σημεία του X , τα $f(x)$ και $f(y)$ είναι διαφορετικά σημεία του Y , αφού η f είναι ενεικόνιση. Στο χώρο Hausdorff Y , υπάρχουν ανοικτές περιοχές V και W του $f(x)$ και $f(y)$ αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $V \cap W = \emptyset$. Τότε $f^{-1}(V)$ και $f^{-1}(W)$ είναι περιοχές των σημείων x και y , ξένες μεταξύ τους.

Εάν τα σημεία (x_1, x_2) και (y_1, y_2) του $X_1 \times X_2$ είναι διαφορετικά, τότε διαφέρουν σε κάποια συντεταγμένη. Υποθέτουμε ότι $x_1 \neq y_1$. Αφού X_1 είναι χώρος Hausdorff , υπάρχουν περιοχές V του x_1 και W του y_1 , ξένες μεταξύ τους. Τότε $V \times X_2 \cap W \times X_2 = \emptyset$. □

Ο χώρος πηλίκο ενός χώρου Hausdorff δεν είναι πάντα χώρος Hausdorff . Έχουμε δει ότι ο χώρος Sierpinski δεν είναι χώρος Hausdorff . Όμως ο χώρος Sierpinski είναι ομοιομορφικός με το πηλίκο του χώρου Hausdorff $I = [0, 1]$ μέσω της σχέσης ισοδυναμίας που παράγεται από την: $x \sim 0$ εάν $x < 1$.

Συμπάγεια

Μία άλλη σημαντική ιδιότητα ενός τοπολογικού χώρου είναι η συμπάγεια, η οποία γενικεύει την ιδιότητα ενός υποσυνόλου του \mathbb{R}^n να είναι κλειστό και φραγμένο. Για να

ορίσουμε τη συμπαγεια σε ένα τοπολογικό χώρο, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα Heine – Borel, η οποία χαρακτηρίζει τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του \mathbb{R}^n .

Μία οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του τοπολογικού χώρου X , A_j , $j \in \mathcal{J}$, λέγεται **ανοικτό κάλυμμα** του X εάν $X = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} A_j$.

Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται **συμπαγής** εάν ο X είναι χώρος Hausdorff και εάν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα: εάν A_j , $j \in \mathcal{J}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X , τότε υπάρχουν j_1, \dots, j_k τέτοια ώστε $X = \bigcup_{i=1}^k A_{j_i}$.

Παράδειγμα 5.2 Το διάστημα $[0, 1)$ δεν είναι συμπαγές, αφού η οικογένεια $A_n = [0, 1 - \frac{1}{n})$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $[0, 1)$, αλλά οποιαδήποτε πεπερασμένη υποοικογένεια δεν καλύπτει το $[0, 1)$.

Πρόταση 5.4 Εάν X είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος, τότε κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος με τη σχετική τοπολογία.

Απόδειξη. Θεωρούμε κλειστό υποσύνολο F του X , και ανοικτό κάλυμμα του F , A_j , $j \in \mathcal{J}$. Υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα G_j του X , τέτοια ώστε $A_j = G_j \cap F$. Τότε το ανοικτό σύνολο $X \setminus F$ μαζί με τα G_j , $j \in \mathcal{J}$ αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του X . Αφού το X είναι συμπαγές, υπάρχουν j_1, \dots, j_k τέτοια ώστε $F \subseteq \bigcup_{i=1}^k A_{j_i}$. □

Θεώρημα 5.5 Εάν οι χώροι X και Y είναι συμπαγείς, τότε $X \times Y$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Κάθε ανοικτό υποσύνολο του $X \times Y$ εκφράζεται ως ένωση υποσυνόλων της μορφής $A \times B$, όπου A και B είναι ανοικτά στο X και στο Y . Συνεπώς αρκεί να εξετάσουμε καλύμματα από σύνολα αυτής της μορφής. Θεωρούμε A_j και B_j , για $j \in \mathcal{J}$ τέτοια ώστε $X \times Y \subseteq \bigcup_{j \in \mathcal{J}} A_j \times B_j$. Για κάθε $x \in X$, το σύνολο $\{x\} \times Y \cong Y$ είναι συμπαγές, άρα υπάρχουν $j_{x,1}, \dots, j_{x,k(x)}$ τέτοια ώστε $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k(x)} A_{j_{x,i}} \times B_{j_{x,i}}$. Θεωρούμε τώρα το σύνολο $V_x = \bigcap_{i=1}^{k(x)} A_{j_{x,i}}$. Αυτό είναι ανοικτή περιοχή του x , και $V_x \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k(x)} A_{j_{x,i}} \times B_{j_{x,i}}$. Τα σύνολα V_x , για κάθε $x \in X$, αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του X . Αφού το X είναι συμπαγές, υπάρχουν x_1, \dots, x_m τέτοια ώστε $X = \bigcup_{l=1}^m V_{x_l}$, και

$$\begin{aligned} X \times Y &= \bigcup_{l=1}^m V_{x_l} \times Y \\ &\subseteq \bigcup_{l=1}^m \left(\bigcup_{i=1}^{k(x_l)} A_{j_{x_l,i}} \times B_{j_{x_l,i}} \right) \end{aligned}$$

το οποίο είναι πεπερασμένο υποκάλυμμα του $A_j \times B_j$, $j \in \mathcal{J}$.

□

Πρόταση 5.6 Κάθε συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Hausdorff είναι κλειστό.

Απόδειξη. Θεωρούμε τοπολογικό χώρο Hausdorff X , συμπαγή υπόχωρο Y και σημείο $x \in X \setminus Y$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο A του X τέτοιο ώστε $x \in A$ και $A \cap Y = \emptyset$.

Θεωρούμε σημείο $y \in Y$. Αφού X είναι Hausdorff, υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα A_y και B_y τέτοια ώστε $x \in A_y$, $y \in B_y$ και $A_y \cap B_y = \emptyset$. Τα σύνολα B_y , $y \in Y$ αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του Y , και αφού Y είναι συμπαγές, υπάρχουν $y_1, \dots, y_k \in Y$, τέτοια ώστε $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_{y_i}$. Συνεπώς το ανοικτό σύνολο $A = \bigcap_{i=1}^k A_{y_i}$ είναι ξένο προς το Y , αφού $A \cap B_{y_i} = \emptyset$ για κάθε $i = 1, \dots, k$. Αφού $x \in A$, συμπεραίνουμε ότι το Y είναι κλειστό.

□

Θεώρημα 5.7 Εάν X είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος Hausdorff, και $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής απεικόνιση, τότε η εικόνα $f(X)$ είναι συμπαγής υπόχωρος του Y και η απεικόνιση f είναι κλειστή.

Απόδειξη. Θεωρούμε ανοικτό κάλυμμα A_j , $j \in \mathcal{J}$ του τοπολογικού υπόχωρου $f(X)$. Τότε $f^{-1}(A_j)$, $j \in \mathcal{J}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X . Αφού ο χώρος X είναι συμπαγής, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του X , έστω $f^{-1}(A_{j_1}), \dots, f^{-1}(A_{j_k})$. Αλλά τότε τα σύνολα A_{j_1}, \dots, A_{j_k} είναι πεπερασμένο υποκάλυμμα του $f(X)$. Συνεπώς $f(X)$ είναι συμπαγής υπόχωρος του Y .

Εάν $F \subseteq X$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς χώρου X , τότε F είναι συμπαγής υπόχωρος, και συνεπώς $f(F)$ είναι συμπαγής υπόχωρος του Y . Αφού Y είναι χώρος Hausdorff, $f(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y . Άρα η απεικόνιση f είναι κλειστή.

□

Πόρισμα 5.8 Εάν X είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος Hausdorff, και $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής αμφιμοιότητα απεικόνιση, τότε η απεικόνιση f είναι ομοιομορφισμός.

Λήμμα 5.9 (Λήμμα Lebesgue) Θεωρούμε συμπαγή μετρικό χώρο X , με μετρική d , και ανοικτό κάλυμμα A_j , $j \in \mathcal{J}$ του X . Τότε υπάρχει θετικός αριθμός λ , τέτοιος ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $j \in \mathcal{J}$ με $D(x, \lambda) \subseteq A_j$.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$, υπάρχει $j \in \mathcal{J}$ τέτοιο ώστε $x \in A_j$. Συνεπώς υπάρχει $\varepsilon(x) > 0$ τέτοιο ώστε $x \in D(x, \varepsilon(x)) \subseteq A_j$. Η οικογένεια $D(x, \frac{1}{2}\varepsilon(x))$, $x \in X$, αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς χώρου X , και συνεπώς υπάρχουν $x_1, \dots, x_k \in X$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{i=1}^k D(x_i, \frac{1}{2}\varepsilon(x_i))$.

Θέτουμε $\lambda = \min\{\frac{1}{2}\varepsilon(x_1), \dots, \frac{1}{2}\varepsilon(x_k)\}$. Για κάθε $x \in X$, υπάρχει j , με $1 \leq j \leq k$ και $x \in D(x_j, \frac{1}{2}\varepsilon(x_j))$. Θα δείξουμε ότι $D(x, \lambda) \subseteq V_j$.

Εάν $y \in D(x, \lambda)$, τότε

$$\begin{aligned} d(y, x_j) &\leq d(y, x) + d(x, x_j) \\ &< \lambda + \frac{1}{2}\varepsilon(x_j) \\ &\leq \varepsilon(x_j). \end{aligned}$$

Άρα $D(x, \lambda) \subseteq D(x_j, \varepsilon(x_j)) \subseteq V_j$.

□

Ο αριθμός λ λέγεται **αριθμός Lebesgue** του καλυμμάτος.

Συνεκτικότητα

Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται συνεκτικός εάν δεν υπάρχει συνεχής απεικόνιση από το X στο διακριτό χώρο με δύο σημεία, $f : X \rightarrow \{0, 1\}$.

Ένα υποσύνολο $Y \subseteq X$ ονομάζεται συνεκτικό εάν είναι συνεκτικός χώρος με τη σχετική τοπολογία.

Παράδειγμα 5.3 Ο χώρος Sierpinski είναι συνεκτικός. Οι μονες συνεχείς απεικονίσεις από το χώρο Sierpinski στο $\{0, 1\}$ είναι οι σταθερές.

Ένας διακριτός χώρος είναι συνεκτικός εάν και μόνον εάν είναι ο χώρος με ένα σημείο.

Στην Ανάλυση αποδεικνύεται ότι η ευθεία των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , με την ευκλείδεια τοπολογία, είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύεται το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 5.10 Τα μοναδικά συνεκτικά υποσύνολα του \mathbb{R} είναι τα μονοσύνολα, τα διαστήματα και όλο το \mathbb{R} .

Το σύνολο \mathbb{Q} των ρητών αριθμών αριθμών, με τη σχετική τοπολογία ως υποσύνολο του \mathbb{R} , δεν είναι συνεκτικό σύνολο. Εάν α είναι ένας άρρητος αριθμός, η απεικόνιση

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } r < \alpha \\ 1 & \text{εάν } r > \alpha \end{cases}$$

είναι συνεχής και επί του $\{0, 1\}$.

Άσκηση 5.1 Δείξτε ότι εάν ένα υποσύνολο του Q περιέχει δύο διαφορετικά στοιχεία δεν είναι συνεκτικό.

Πρόταση 5.11 Σε ένα τοπολογικό χώρο X τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Ο X είναι συνεκτικός
2. Δεν υπάρχουν μη κενά, ανοικτά υποσύνολα A και B του X τέτοια ώστε $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B = X$.
3. Τα μόνα υποσύνολα του X που είναι ανοικτά και κλειστά είναι το \emptyset και το X .

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι $(1) \Rightarrow (2)$. Εάν ο X είναι συνεκτικός και υπάρχουν υποσύνολα A και B όπως στο (2), ορίζουμε

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } x \in A \\ 1 & \text{εάν } x \in B \end{cases}$$

Η f είναι καλά ορισμένη, αφού $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B = X$, και συνεχής, αφού A και B είναι ανοικτά. Συνεπώς η f δεν είναι επεικονική, και ένα από τα A, B είναι κενό.

Για να δείξουμε ότι $(2) \Rightarrow (3)$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι εάν υπάρχει ανοικτό και κλειστό υποσύνολο A του X , τότε A και $B = X \setminus A$ ικανοποιούν τις συνθήκες του (2).

Τέλος, εάν υπάρχει συνεχής επεικόνιση $f : X \rightarrow \{0, 1\}$, τότε $f^{-1}(0)$ είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο, διαφορετικό από το \emptyset και το X .

□

Πρόταση 5.12 Εάν ο τοπολογικός χώρος X είναι συνεκτικός και η $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής επεικόνιση, τότε ο τοπολογικός χώρος Y είναι συνεκτικός.

Απόδειξη. Εάν ο Y δεν είναι συνεκτικός, υπάρχει συνεχής επεικόνιση $g : Y \rightarrow \{0, 1\}$. Τότε η $g \circ f : X \rightarrow \{0, 1\}$ είναι συνεχής επεικόνιση, και ο X δεν είναι συνεκτικός.

□

Πόρισμα 5.13 Η εικόνα ενός συνεκτικού τοπολογικού χώρου, μέσω μίας συνεχούς απεικόνισης είναι συνεκτικός υπόχωρος.

Πρόταση 5.14 Θεωρούμε οικογένεια $A_j, j \in \mathcal{J}$ συνεκτικών υποχώρων του τοπολογικού χώρου X , και υποθέτουμε ότι $\bigcap_{j \in \mathcal{J}} A_j \neq \emptyset$. Τότε ο υπόχωρος $\bigcup_{j \in \mathcal{J}} A_j$ είναι συνεκτικός.

Πρόταση 5.15 *Εάν A είναι συνεκτικός υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου X και B είναι υποσύνολο του X τέτοιο ώστε $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$, ο υπόχωρος B είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη. Εάν B δεν είναι συνεκτικός, υπάρχει συνεχής επεικόνιση $f : B \rightarrow \{0, 1\}$. Αφού ο A δεν είναι συνεκτικός, ο περιορισμός $f|_A$ δεν είναι επεικονικός. Έστω ότι $f(A) = \{0\}$. Το σύνολο $f^{-1}(1)$ είναι ανοικτό στο B , άρα υπάρχει ανοικτό υποσύνολο G του X τέτοιο ώστε $G \cap B = f^{-1}(1)$. Εφ' όσον $f(A) = \{0\}$, $A \subseteq B \setminus G \subseteq X \setminus G$. Αλλά $X \setminus G$ είναι κλειστό, άρα $\bar{A} \subseteq X \setminus G$, και έχουμε $B \subseteq \bar{A} \subseteq X \setminus G$. Όμως $G \cap B = f^{-1}(1) \neq \emptyset$.

□

Θεώρημα 5.16 *Το καρτεσιανό γινόμενο συνεκτικών τοπολογικών χώρων είναι συνεκτικός χώρος.*

Απόδειξη. Θα δώσουμε την απόδειξη μόνο για το γινόμενο δύο συνεκτικών χώρων, $X \times Y$, απ' όπου, με επαγωγή, αποδεικνύεται ότι ισχύει για κάθε πεπερασμένο γινόμενο. Το Θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση γινομένου αυθαίρετης οικογένειας τοπολογικών χώρων.

Θεωρούμε σημεία $x_0 \in X$ και $y_0 \in Y$. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$$A_x = (X \times \{y_0\}) \cup (\{x\} \times Y).$$

Οι υπόχωροι $X \times \{y_0\}$ και $\{x\} \times Y$ είναι ομοιομορφικοί με τους X και Y αντίστοιχα, και συνεπώς είναι συνεκτικοί υπόχωροι του $X \times Y$.

Για κάθε x , ο υπόχωρος A_x είναι συνεκτικός, αφού είναι η ένωση των συνεκτικών $(X \times \{y_0\})$ και $(\{x\} \times Y)$, που έχουν μη κενή τομή $\{(x, y_0)\}$. Τέλος, το καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ είναι η ένωση

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} A_x,$$

και είναι συνεκτικό αφού $(x_0, y_0) \in \bigcap_{x \in X} A_x$.

□

Ορισμός. Θεωρούμε σημείο x του τοπολογικού χώρου X . Η ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του X που περιέχουν το x ονομάζεται **συνεκτική συνιστώσα** του x στον τοπολογικό χώρο X , και συμβολίζεται $C(x)$.

Άσκηση 5.2 Κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι συνεκτικό και κλειστό υποσύνολο του X . Τα υποσύνολα $C(x)$, $x \in X$, αποτελούν διαμέριση του X .

Θεώρημα 5.17 Θεωρούμε συνεκτικό τοπολογικό χώρο X και συνεχή απεικόνιση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Εάν $x, y \in X$ και $f(x) < c < f(y)$, τότε υπάρχει $z \in X$ με $f(z) = c$.

Θεώρημα 5.18 Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ έχει ένα σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $t \in [0, 1]$ με $f(t) = t$.

Ορισμός. Μία συνεχής απεικόνιση $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ ονομάζεται **δρόμος** στο X από το $x = \sigma(0)$ στο $y = \sigma(1)$.

Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται **κατά δρόμους συνεκτικός** (path connected) εάν για κάθε δύο σημεία $x, y \in X$, υπάρχει δρόμος στο X από το x στο y .

Λήμμα 5.19 Ένας τοπολογικός χώρος X είναι κατά δρόμους συνεκτικός εάν και μόνον εάν υπάρχει ένα σημείο $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in X$ υπάρχει δρόμος από το x_0 στο y .

Απόδειξη. Θεωρούμε σημεία y_1 και y_2 του X , και υποθέτουμε ότι σ_1 είναι δρόμος από το x_0 στο y_1 και σ_2 δρόμος από το x_0 στο y_2 . Ορίζουμε δρόμο από το y_1 στο y_2 :

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1(1 - 2t) & \text{για } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma_2(2t - 1) & \text{για } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

□

Θεώρημα 5.20 Κάθε κατά δρόμους συνεκτικός χώρος είναι συνεκτικός.

Το αντίστροφο δεν ισχύει, όπως θα δούμε με το παράδειγμα της τοπολογικής κτένας.

Παράδειγμα 5.4 Η τοπολογική κτένα. Το σύνολο

$$C = \{(0, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(s, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq 1\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, t \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1, n \in \mathbb{N} \right\}$$

ονομάζεται τοπολογική κτένα, και είναι ένα κατά δρόμους συνεκτικό, κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Το υποσύνολο $C_1 = C \setminus \{(0, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1\}$ είναι κατά δρόμους συνεκτικό. Το υποσύνολο $C_2 = C \setminus \{(0, 0)\}$ δεν είναι κατά δρόμους συνεκτικό. Όμως $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \overline{C_1} = C$, και εφ' όσον C_1 είναι συνεκτικό, C_2 είναι συνεκτικό από την Πρόταση 5.15.

Ορισμός. Θεωρούμε σημείο x του τοπολογικού χώρου X . Η ένωση όλων των κατά δρόμους συνεκτικών υποσυνόλων του X που περιέχουν το x ονομάζεται **κατά δρόμους συνεκτική συνιστώσα** του x στον τοπολογικό χώρο X , και συμβολίζεται $K(x)$.

Θεώρημα 5.21 Ένα ανοικτό υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$, για $n \in \mathbb{N}$, είναι συνεκτικό κατά δρόμους εάν και μόνον εάν είναι συνεκτικό.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα σημείο $x \in A$ και την κατά δρόμους συνεκτική συνιστώσα του x στο A , $K(x)$. Θα δείξουμε ότι $K(x)$ είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του A . Αφού $K(x) \neq \emptyset$, εάν A είναι συνεκτικό, $K(x) = A$ και A είναι κατά δρόμους συνεκτικό.

Έστω $y \in K(x)$. Επειδή A είναι ανοικτό \mathbb{R}^n υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(y, \varepsilon) \subseteq A$. Εάν $z \in D(y, \varepsilon)$, το ευθύγραμμο τμήμα από το y στο z βρίσκεται μέσα στο $D(y, \varepsilon)$. Άρα υπάρχει δρόμος από το x στο z . Συνεπώς $D(y, \varepsilon) \subseteq K(x)$ και $K(x)$ είναι ανοικτό.

Έστω $y \in A \setminus K(x)$, και $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(y, \varepsilon) \subseteq A$. Εάν $z \in D(y, \varepsilon)$ και $z \in K(x)$, τότε θα υπήρχε δρόμος από το x στο y , μέσω του z . Συμπεραίνουμε ότι $D(y, \varepsilon) \subseteq A \setminus K(x)$, και συνεπώς ότι $K(x)$ είναι κλειστό στο A .

□

Η ιδιότητα της συνεκτικότητας μας επιτρέπει να διακρίνουμε διάφορους τοπολογικούς χώρους μεταξύ τους. Για παράδειγμα, ο κύκλος δεν είναι ομοιομορφικός με την ευθεία, $S^1 \not\cong \mathbb{R}$, αφού εάν αφαιρέσουμε ένα σημείο από τον κύκλο έχουμε ένα συνεκτικό σύνολο, ενώ αν αφαιρέσουμε ένα σημείο από την ευθεία παίρνουμε ένα σύνολο με δύο συνεκτικές συνιστώσες. Με ανάλογο επιχείρημα δείχνουμε ότι ο χώρος \mathbb{R}^n , για $n > 1$, δεν είναι ομοιομορφικός με τον \mathbb{R} .

Για να δείξουμε ότι $\mathbb{R}^m \not\cong \mathbb{R}^n$ όταν $m \neq n$ χρειαζόμαστε ισχυρότερα εργαλεία, που θα αναπτύξουμε στο τελευταίο Κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας την έννοια της ομοτοπίας.

Κεφάλαιο 6

Ταξινόμηση των επιφανειών

Μία τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης n είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff X με την ιδιότητα ότι κάθε σημείο $x \in X$ έχει μία ανοικτή περιοχή ομοιομορφική με τον ανοικτό δίσκο $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$.

Κάθε ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n είναι τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης n . Η σφαίρα διάστασης n στο χώρο \mathbb{R}^{n+1} , $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, είναι τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης n . Για κάθε $x \in S^n$, το σύνολο $\{y \in S^n : x \cdot y > 0\}$ είναι το ανοικτό ημισφαίριο με κέντρο το x , και είναι ομοιομορφικό με έναν ανοικτό n -δίσκο μέσω της ορθογώνιας προβολής $y \mapsto y - (x \cdot y)x$.

Πρόταση 6.1 *Εάν M είναι m -πολλαπλότητα και N είναι n -πολλαπλότητα, τότε $M \times N$ είναι $(m + n)$ -πολλαπλότητα.*

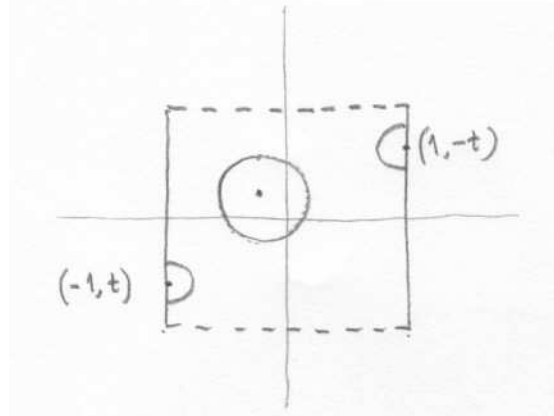
Απόδειξη. Έστω $(x, y) \in M \times N$, και V_x, W_y περιοχές των x και y στους τοπολογικούς χώρους M και N αντίστοιχα, ομοιομορφικές με τους δίσκους D^m και D^n . Τότε $V_x \times W_y$ είναι ανοικτή περιοχή του (x, y) στο τοπολογικό γινόμενο $M \times N$, και είναι ομοιομορφική με το $D^m \times D^n$. Αλλά $D^m \cong \mathbb{R}^m$, $D^n \cong \mathbb{R}^n$, άρα $D^m \times D^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n} \cong D^{m+n}$. □

Η σπείρα είναι το καρτεσιανό γινόμενο δύο κύκλων, $T^2 = S^1 \times S^1$, και είναι 2-πολλαπλότητα. Ο κύλινδρος (χωρίς σύνορο) είναι το καρτεσιανό γινόμενο ενός κύκλου με τον 1-δίσκο, $S^1 \times D^1$, και είναι 2-πολλαπλότητα. Ο κύλινδρος με σύνορο είναι το καρτεσιανό γινόμενο του κύκλου με το κλειστό διάστημα $I = [0, 1]$, $S^1 \times I$, και δεν είναι πολλαπλότητα, γιατί τα σημεία $(z, 0)$ και $(z, 1)$ δεν έχουν περιοχή ομοιομορφική με τον ανοικτό δίσκο στο επίπεδο.

Παράδειγμα 6.1 Ορίζουμε την ταινία Möbius ως το χώρο πηλίκο X/\sim , όπου $X = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq s \leq 1, -1 < t < 1\}$ και \sim είναι η σχέση ισοδυναμίας που

παράγεται από την $(-1, t) \sim (1, -t)$ για κάθε $t \in D^1$. Θα δείξουμε ότι X/\sim είναι πολλαπλότητα.

Για να δείξουμε ότι είναι χώρος Hausdorff θεωρούμε δύο σημεία, $[s, t]$ και $[s', t']$ του Q/\sim . Εάν $|s| \neq 1$, $|s'| \neq 1$, τότε υπάρχουν ξένες περιοχές των σημείων (s, t) και (s', t') στο X οι οποίες απεικονίζονται μέσω της προβολής $p : X \rightarrow X/\sim$ αμφιμονοσήμαντα σε περιοχές των $[s, t]$ και $[s', t']$.



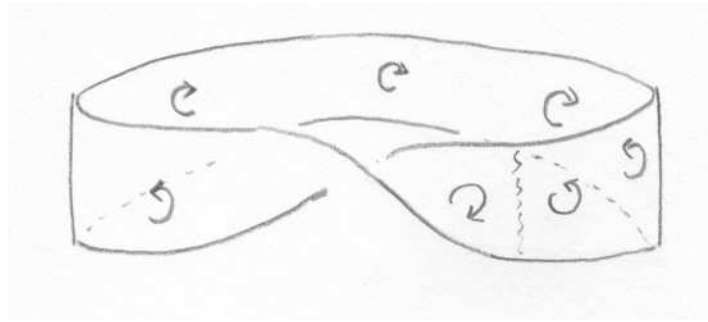
Σχήμα 6.1: Δίσκοι στην ταινία Möbius .

Εάν $|s| = 1$ και $|s'| \neq 1$, υπάρχουν θετικοί αριθμοί ε και δ τέτοιοι ώστε $D((-1, t), \varepsilon) \cap D((s', t'), \delta) = \emptyset$ και $D((1, -t), \varepsilon) \cap D((s', t'), \delta) = \emptyset$. Τότε $p(D((-1, t), \varepsilon) \cup D((1, -t), \varepsilon))$ και $p(D((s', t'), \delta))$ είναι ξένες περιοχές των $[s, t]$ και $[s', t']$. Παρόμοια δείχνουμε ότι υπάρχουν ξένες περιοχές όταν $|s| = |s'| = 1$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι κάθε σημείο $[s, t] \in X/\sim$ έχει περιοχή ομοιομορφική με το D^2 . Εάν $|s| \neq 1$, επιλέγουμε θετικό αριθμό ε τέτοιο ώστε $\varepsilon < 1 - |s|$ και $\varepsilon < 1 - |t|$. Τότε $D((s, t), \varepsilon) \subseteq X$ και απεικονίζεται αμφιμονοσήμαντα σε περιοχή του $[s, t]$ στο X/\sim . Εάν $|s| = 1$, επιλέγουμε θετικό ε τέτοιο ώστε $\varepsilon < 1 - |t|$ και έχουμε $p(D((-1, t), \varepsilon) \cup D((1, -t), \varepsilon))$ ομοιομορφικό με τον δίσκο $D((0, 0), \varepsilon)$.

Διαισθητικά, μία επιφάνεια είναι *προσανατολίσιμη* εάν μπορούμε να επιλέξουμε μία φορά περιστροφής γύρω από κάθε σημείο με τρόπο που η επιλογή να ταιριάζει σε γειτονικά σημεία. Για την ταινία Möbius είναι φανερό ότι αυτό δεν είναι δυνατόν. Ο αυστηρός ορισμός της έννοιας της προσανατολισιμότητας σε τοπολογικές πολλαπλότητες χρησιμοποιεί πιο πολύπλοκα τεχνικά εργαλεία. Για τις ανάγκες αυτού του μαθήματος θα αποφύγουμε τον γενικό ορισμό και θα πούμε ότι μία 2-πολλαπλότητα είναι **μη προσανατολίσιμη** όταν περιέχει ένα υποσύνολο ομοιομορφικό με την ταινία Möbius . Στην αντίθετη περίπτωση η 2-πολλαπλότητα είναι **προσανατολίσιμη**.

Παράδειγμα 6.2 Θα δείξουμε ότι το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2 = S^2/x \sim -x$ είναι



Σχήμα 6.2: Η ταινία Möbius δεν είναι προσανατολίσιμη.

συνεκτική, συμπαγής, μη προσανατολίσιμη 2-πολλαπλότητα.

Θεωρούμε την προβολή $p : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$. Για κάθε σημείο $x \in S^2$ το ανοικτό ημισφαίριο με κέντρο το x απεικονίζεται αμφιμονοσήμαντα σε ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}P^2$. Άρα κάθε σημείο του προβολικού επιπέδου έχει περιοχή ομοιομορφική με το ημισφαίριο και συνεπώς με το δίσκο.

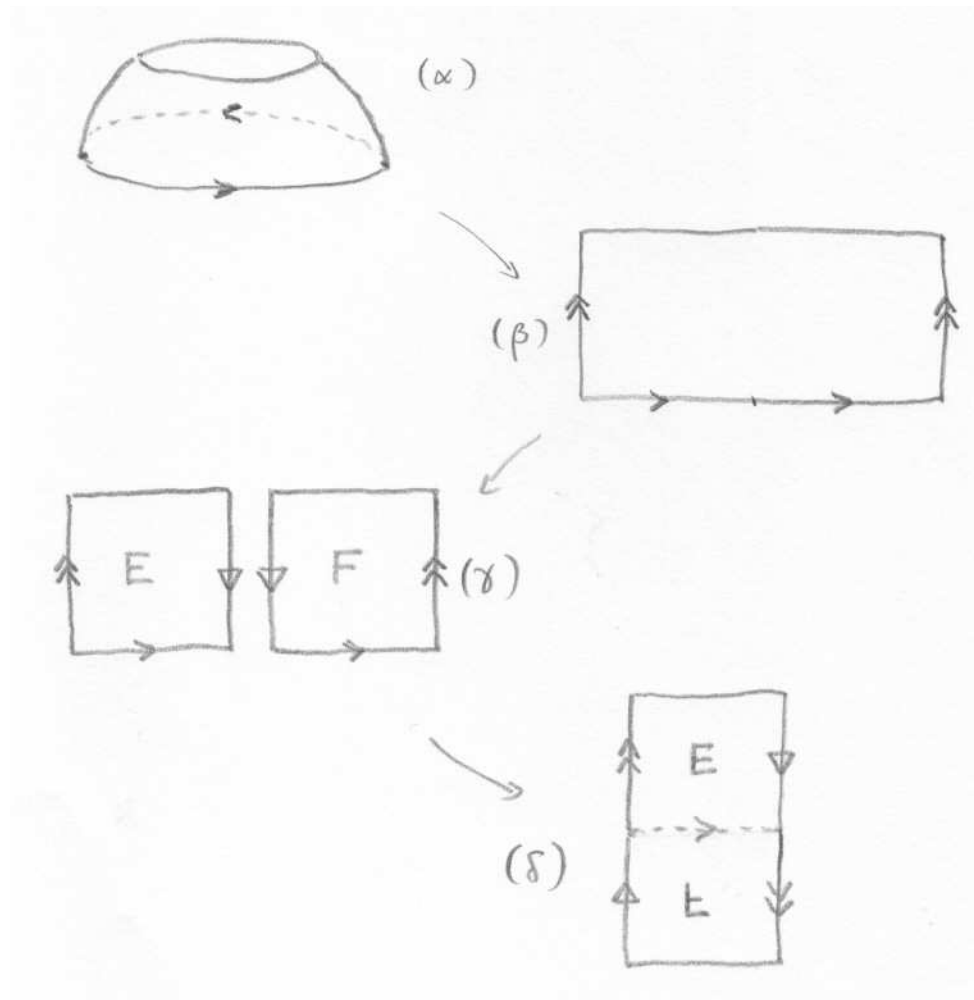
Εάν $[x], [y]$ είναι διαφορετικά σημεία στο $\mathbb{R}P^2$, τότε $x \neq \pm y$. Επιλέγουμε θετικό αριθμό ε τέτοιο ώστε $\varepsilon < \|x - y\|$ και $\varepsilon < \|x + y\|$. Τότε $p(D(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap S^2)$ και $p(D(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap S^2)$ είναι ξένες περιοχές των $[x]$ και $[y]$ στο $\mathbb{R}P^2$. Άρα $\mathbb{R}P^2$ είναι χώρος Hausdorff.

Παρατηρούμε ότι S^2 είναι συνεκτικός, συμπαγής τοπολογικός χώρος. Συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{R}P^2$ είναι επίσης συνεκτικός, και αφού είναι Hausdorff, είναι επίσης συμπαγής.

Εάν περιορίσουμε την προβολή $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ στο κλειστό άνω ημισφαίριο $H = \{(x, y, z) \in S^2 : z \geq 0\}$ έχουμε την κλειστή επεικόνιση $q : H \rightarrow \mathbb{R}P^2$, και συνεπώς $\mathbb{R}P^2$ είναι ομοιομορφικό με το πηλίκο H/\sim με τη σχέση που παράγεται από την ταύτιση των αντιποδικών σημείων στον ισημερινό, $(x, y, 0) \sim (-x, -y, 0)$.

Τώρα θέλουμε να δούμε τι γίνεται όταν αφαιρέσουμε ένα δίσκο από το προβολικό επίπεδο. Θεωρούμε το προβολικό επίπεδο ως το πηλίκο του ημισφαιρίου H και αφαιρούμε το σύνολο $C = \{(x, y, z) \in H : z > \frac{1}{2}\}$. Το σύνολο $H \setminus C$ είναι μία κυλινδρική ταινία.

Το σύνολο $\mathbb{R}P^2 \setminus q(C) \cong (H \setminus C)/\sim$ είναι μία κυλινδρική ταινία με ταυτίσεις των αντίθετων σημείων στο κάτω άκρο. Αυτός ο χώρος είναι ομοιομορφικός με το πηλίκο του παραλληλογράμμου $[-1, 1] \times [0, 1]$ με τη σχέση που παράγεται από τις ταυτίσεις $(s, 0) \sim (s + 1, 0)$ για $-1 \leq s \leq 0$ και $(-1, t) \sim (1, t)$ για $0 \leq t \leq 1$. Κόβουμε το παραλληλόγραμμο σε δύο τετράγωνα E και F , με τις ταυτίσεις όπως στο Σχήμα 6.3. Μετά από μία ανάκλαση του F ενώνουμε τα δύο τετράγωνα σύμφωνα με τις ταυτίσεις των πλευρών a . Καταλήγουμε ότι $\mathbb{R}P^2 \setminus q(C)$ είναι ομοιομορφικό με το πηλίκο του παραλληλογράμμου (δ) στο Σχήμα 6.3. Αυτό όμως είναι μία ταινία Möbius με σύνορο!



Σχήμα 6.3: Το προβολικό επίπεδο μείον ένας δίσκος.

Συμπεραίνουμε ότι το προβολικό επίπεδο είναι μη προσανατολίσιμη 2-πολλαπλότητα.

Θα ονομάζουμε **επιφάνεια** μία συνεκτική πολλαπλότητα διάστασης 2. Εάν είναι επιπλέον συμπαγής, θα τη λέμε **κλειστή επιφάνεια**. Ο όρος κλειστή επιφάνεια δεν πρέπει να συγχέεται με τα κλειστά υποσύνολα του \mathbb{R}^3 . Ένα κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^3 μπορεί να είναι επιφάνεια αλλά να μην είναι συμπαγές, όπως για παράδειγμα ο κύλινδρος $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$. Η σφαίρα S^2 , η σπείρα $S^1 \times S^1$ και το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$ είναι κλειστές επιφάνειες. Ο (ανοικτός) δίσκος D^2 , η ταινία Möbius και ο κύλινδρος $S^1 \times D^1$ είναι μη κλειστές επιφάνειες.

Στόχος μας είναι να ταξινομήσουμε όλες τις κλειστές επιφάνειες. Δηλαδή να βρούμε μία οικογένεια κλειστών επιφανειών, έτσι ώστε κάθε κλειστή επιφάνεια να είναι ομοιομορφική με μία επιφάνεια της οικογένειας, και κάθε δύο επιφάνειες της οικογένειας να μην είναι ομοιομορφικές. Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε επιφάνεια θα εννοούμε

κλειστή επιφάνεια.

Το συνεκτικό άθροισμα επιφανειών

Θα περιγράψουμε τη βασική κατασκευή, με την οποία θα κατασκευάσουμε την οικογένεια επιφανειών. Θεωρούμε μία επιφάνεια S και μία εμφύτευση του κλειστού δίσκου $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ στην S , $f : \Delta \rightarrow S$. Το σύνολο $f(\Delta)$ είναι ομοιομορφικό με τον κλειστό δίσκο Δ , ενώ το σύνολο $f(D^2)$ είναι ομοιομορφικό με τον ανοικτό δίσκο $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Θεωρούμε δύο επιφάνειες S_1 και S_2 , και εμφυτεύσεις $f_1 : \Delta \rightarrow S_1$, $f_2 : \Delta \rightarrow S_2$. Από τις επιφάνειες S_1 , S_2 αφαιρούμε τους ανοικτούς δίσκους $f_1(D^2)$ και $f_2(D^2)$, και έχουμε τους τοπολογικούς χώρους $S_1 \setminus f_1(D^2)$ και $S_2 \setminus f_2(D^2)$. (Αυτοί οι χώροι είναι επιφάνειες με σύνορο.) Στην ξένη ένωση των δύο χώρων, $X = (S_1 \setminus f_1(D^2)) \sqcup (S_2 \setminus f_2(D^2))$, ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας \sim που ταυτίζει τα αντίστοιχα σημεία στο σύνορο των δύο χώρων. Τα σημεία $x_1 \in S_1$ και $x_2 \in S_2$ ταυτίζονται εάν $x_1 = f_1(e^{2\pi it})$ και $x_2 = f_2(e^{2\pi it})$ για κάποιο $e^{2\pi it} \in S^1 = \Delta \setminus D^2$. Το **συνεκτικό άθροισμα** των επιφανειών S_1 και S_2 είναι ο τοπολογικός χώρος X/\sim και συμβολίζεται $S_1 \# S_2$.

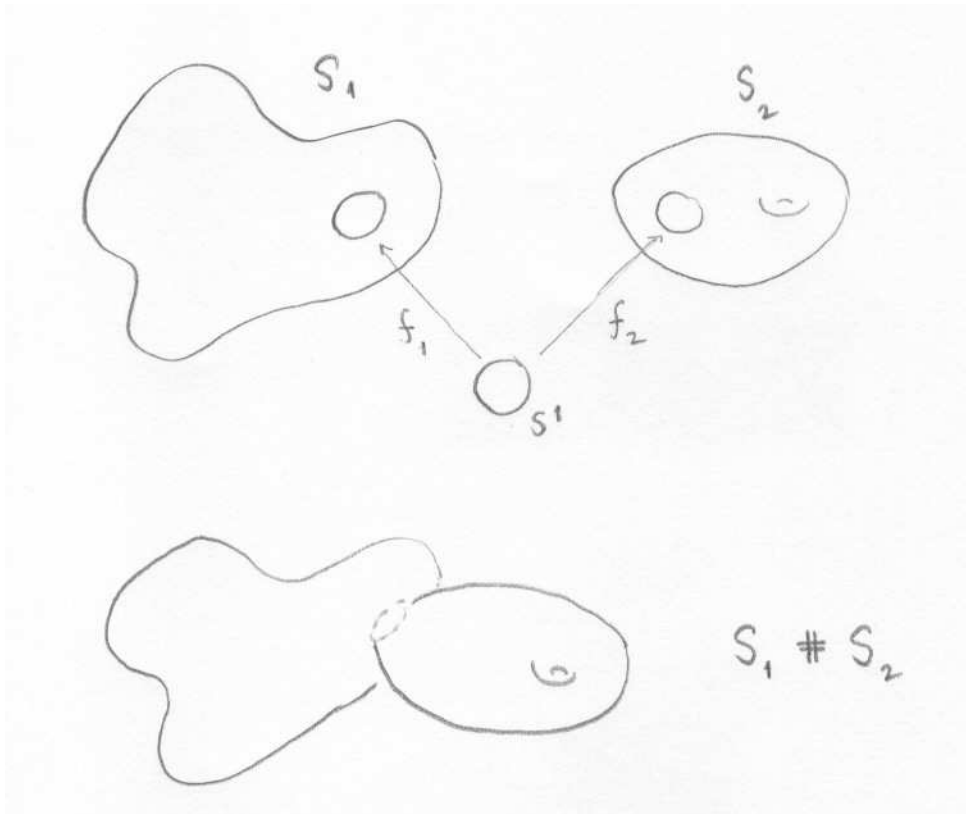
Θεώρημα 6.2 Το συνεκτικό άθροισμα των επιφανειών S_1 και S_2 είναι συνεκτική, συμπαγής πολλαπλότητα διάστασης 2, δηλαδή είναι επιφάνεια. Εάν χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές εμφυτεύσεις f'_1 και f'_2 η επιφάνεια που προκύπτει είναι ομοιομορφική με αυτήν που προκύπτει από τις f_1 και f_2 .

□

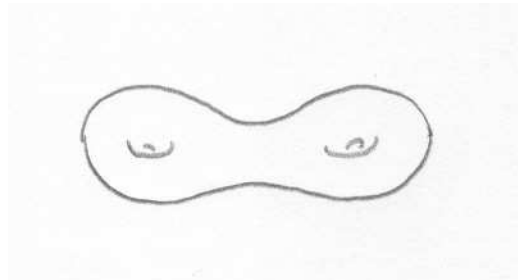
Παράδειγμα 6.3 Το συνεκτικό άθροισμα δύο σπειρών, $T^2 \# T^2$ είναι η διπλή σαμπρέλα, Σχήμα 6.5.

Η σπείρα είναι ο χώρος ηλίκο του τετραγώνου με τις ταυτίσεις των απέναντι πλευρών, όπως στο Σχήμα 6.6. Αφαιρούμε από μία σπείρα ένα δίσκο $f_1(D^2)$, και έχουμε τον χώρο ηλίκο του πενταγώνου, με ταυτίσεις στις τέσσερις πλευρές. Αφαιρούμε και από τη δεύτερη σπείρα ένα δίσκο $f_2(D^2)$ και έχουμε άλλο ένα πεντάγωνο. Ενώνουμε τα δύο πεντάγωνα, ταυτίζοντας το σημείο $f_1(e^{2\pi it})$ με το σημείο $f_2(e^{2\pi it})$, και έχουμε ένα οκτάγωνο, με ταυτίσεις των πλευρών όπως στο Σχήμα 6.6.

Για να περιγράψουμε τις ταυτίσεις των πλευρών του οκταγώνου, επιλέγουμε μία κορυφή του ως αρχή, και έναν προσανατολισμό στο οκτάγωνο. Σε κάθε ζεύγος ταυτιζομένων πλευρών επιλέγουμε μία κατεύθυνση. Συμβολίζουμε κάθε ζεύγος ταυτιζομένων πλευρών με ένα γράμμα. Διατρέχουμε το σύνορο του οκταγώνου με τον επιλεγμένο προσανατολισμό, ξεκινώντας από την επιλεγμένη κορυφή, και για κάθε πλευρά, με τη διάταξη που τις συναντούμε, καταγράφουμε το αντίστοιχο γράμμα, με



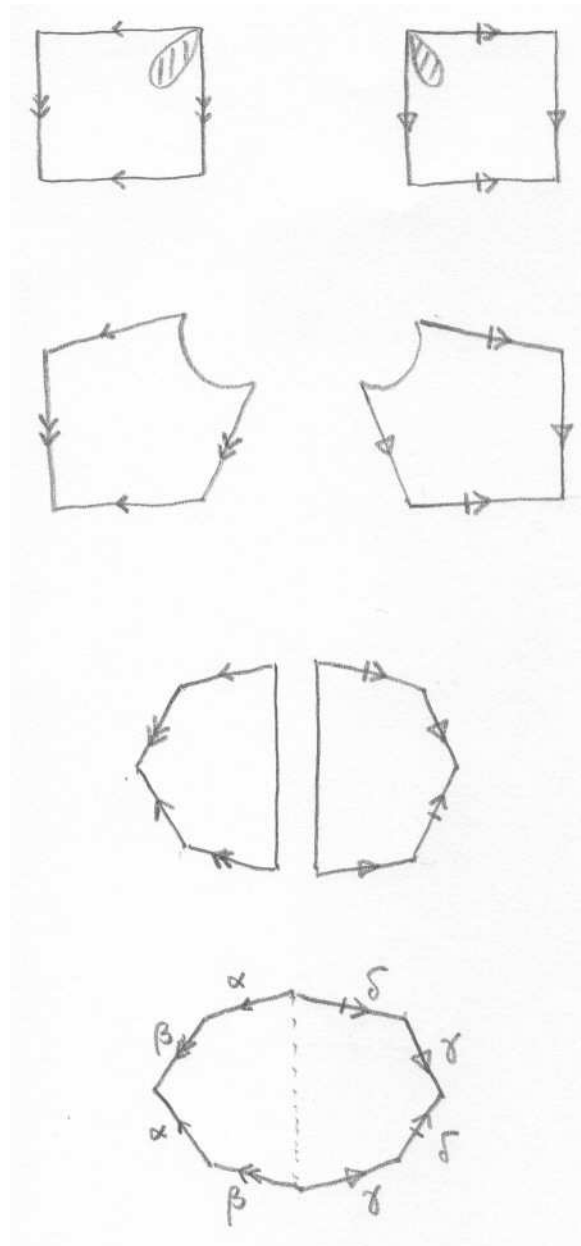
Σχήμα 6.4: Συνεκτικό άθροισμα επιφανειών.



Σχήμα 6.5: Η διπλή σαμπρέλα.

εκθέτη $+1$ (ο οποίος συνήθως παραλείπεται) εάν η κατεύθυνση της πλευράς είναι η ίδια με τον προσανατολισμό του οκταγώνου και εκθέτη -1 εάν η κατεύθυνση της πλευράς είναι αντίθετη με τον προσανατολισμό του οκταγώνου. Οι ταυτίσεις των πλευρών του οκταγώνου που δίνουν το συνεκτικό άθροισμα των δύο σπειρών στο Σχήμα 6.6 περιγράφονται από το **σύμβολο**

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}.$$

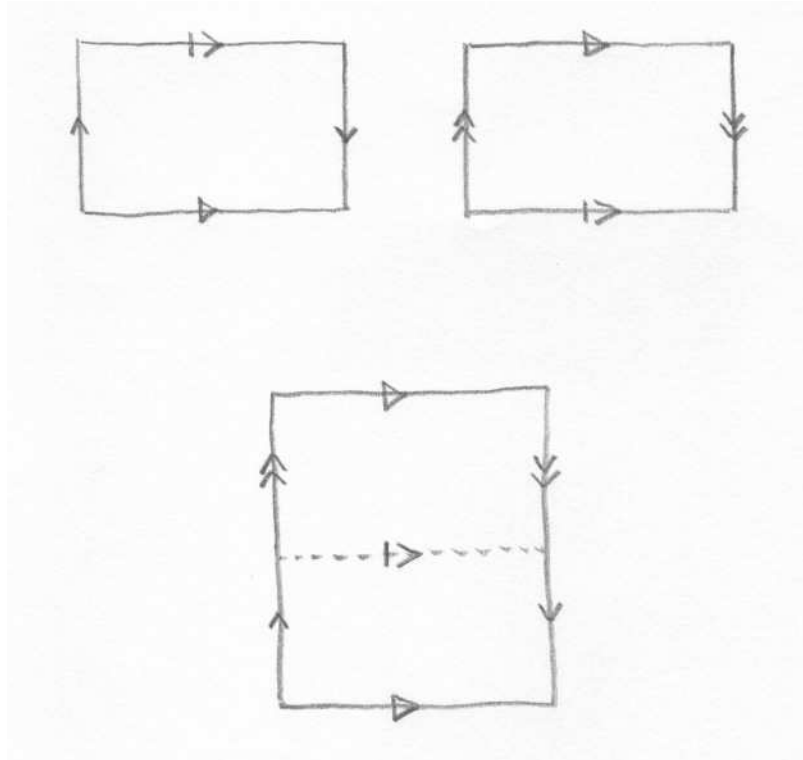


Σχήμα 6.6: Συνεκτικό άθροισμα δύο σπειρών δίδει τη διπλή σαμπρέλα.

Η επιλογή διαφορετικής κορυφής μεταθέτει κυκλικά τα γράμματα στο σύμβολο, ενώ η επιλογή διαφορετικών κατευθύνσεων αλλάζει τους εκθέτες.

Παράδειγμα 6.4 Θα περιγράψουμε το συνεκτικό άθροισμα δύο προβολικών επιπέδων, $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$. Έχουμε δει ότι $\mathbb{R}P^2 \setminus f(D^2)$ είναι μία ταινία Möbius με σύνορο. Άρα $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ είναι ο χώρος πηλίκο δύο ταινιών Möbius με σύνορο, με ταυτίσεις των αντίστοιχων σημείων του συνόρου. Στο Σχήμα 6.7, το σύνορο των δύο ταινιών

Möbius αποτελείται από τις πλευρές A και B , και C και D αντίστοιχα. Ταυτίζουμε την πλευρά B με την πλευρά C . Έχουμε ένα τετράγωνο με ταυτίσεις των πλευρών σύμφωνα με τα βέλη στο Σχήμα 6.7. Εύκολα παρατηρούμε ότι η επιφάνεια που προκύπτει είναι η επιφάνεια Klein: η ταύτιση της πλευράς A με την D δίδει έναν κύλινδρο με σύνορο δύο κύκλους, τους οποίους ταυτίζουμε με αντίθετη φορά.



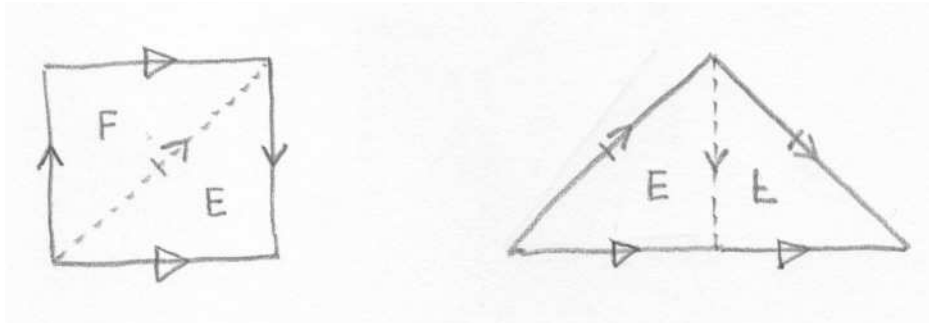
Σχήμα 6.7: Συνεκτικό άθροισμα δύο προβολικών επιπέδων, ως επιφάνεια Klein.

Για να πάρουμε μία πιο απλή μορφή για αυτή την επιφάνεια, κόβουμε το τετράγωνο κατά μήκος της διαγωνίου και κολλάμε τα δύο τρίγωνα που προκύπτουν κατά μήκος των πλευρών A και B , όπως στο Σχήμα 6.8. Κανονικοποιώντας το σχήμα, έχουμε ένα τετράγωνο με ταυτίσεις τέτοιες ώστε το σύμβολο αυτής της επιφάνειας είναι $\alpha\alpha\beta\beta$.

Άσκηση 6.1 Δείξτε ότι το συνεκτικό άθροισμα μίας σφαίρας και ενός προβολικού επιπέδου, $T^2 \# \mathbb{R}P^2$, είναι ομοιομορφικό με το πηλίκο ενός εξαγώνου με ταυτίσεις των πλευρών σύμφωνα με το σύμβολο

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\gamma.$$

Άσκηση 6.2 Δείξτε ότι το συνεκτικό άθροισμα μίας επιφάνειας Klein και ενός



Σχήμα 6.8: Συνεκτικό άθροισμα δύο προβολικών επιπέδων.

προβολικού επιπέδου, $K^2 \# \mathbb{R}P^2$, είναι ομοιομορφικό με το πηλίκο ενός εξαγώνου με ταυτίσεις των πλευρών σύμφωνα με το σύμβολο

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta\gamma\gamma.$$

Αφού $K^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$, αυτή η επιφάνεια είναι ομοιομορφική με το συνεκτικό άθροισμα τριών προβολικών επιπέδων, $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$. Δείξτε ότι το συνεκτικό άθροισμα τριών προβολικών επιπέδων είναι ομοιομορφικό με το πηλίκο ενός εξαγώνου με ταυτίσεις των πλευρών σύμφωνα με το σύμβολο $\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma$.

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι το συνεκτικό άθροισμα n σπειρών είναι ομοιομορφικό με την επιφάνεια που προκύπτει από ένα $4n$ -γωνο, με ταυτίσεις των πλευρών του σύμφωνα με το σύμβολο

$$\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \dots \alpha_n\beta_n\alpha_n^{-1}\beta_n^{-1}.$$

Υποθέτουμε ότι το συνεκτικό άθροισμα $n-1$ σπειρών δίδεται από ένα $4(n-1)$ -γωνο, με ταυτίσεις σύμφωνα με το σύμβολο $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \dots \alpha_{n-1}\beta_{n-1}\alpha_{n-1}^{-1}\beta_{n-1}^{-1}$ και προσθέτουμε ακόμη μία σπείρα, όπως στο Σχήμα 6.9. Το αποτέλεσμα είναι η επιφάνεια με σύμβολο $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \dots \alpha_n\beta_n\alpha_n^{-1}\beta_n^{-1}$.

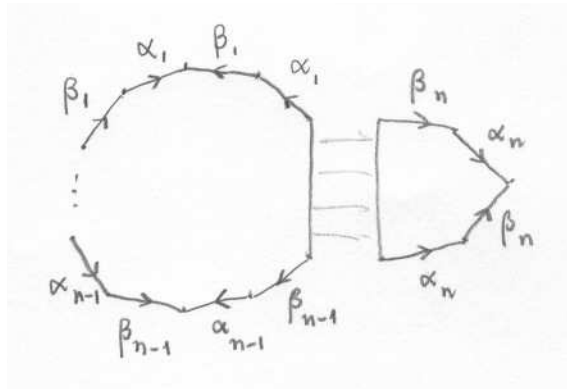
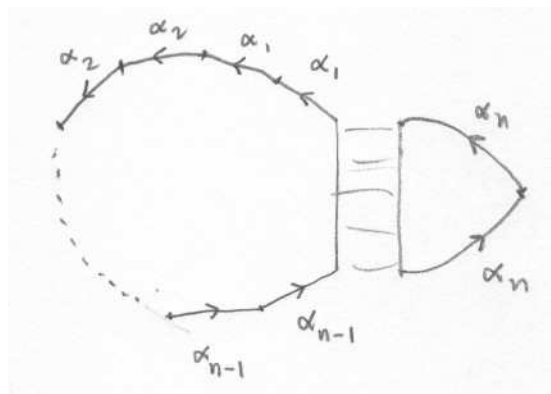
Παρόμοια δείχνουμε ότι το συνεκτικό άθροισμα n προβολικών επιπέδων είναι ομοιομορφικό με την επιφάνεια που προκύπτει από ένα $2n$ -γωνο, με ταυτίσεις των πλευρών του σύμφωνα με το σύμβολο

$$\alpha_1\alpha_1 \dots \alpha_n\alpha_n.$$

Θα δείξουμε ότι το συνεκτικό άθροισμα μίας σπείρας και ενός προβολικού επιπέδου είναι ομοιομορφικό με το προβολικό άθροισμα τριών προβολικών επιπέδων,

$$T^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2.$$

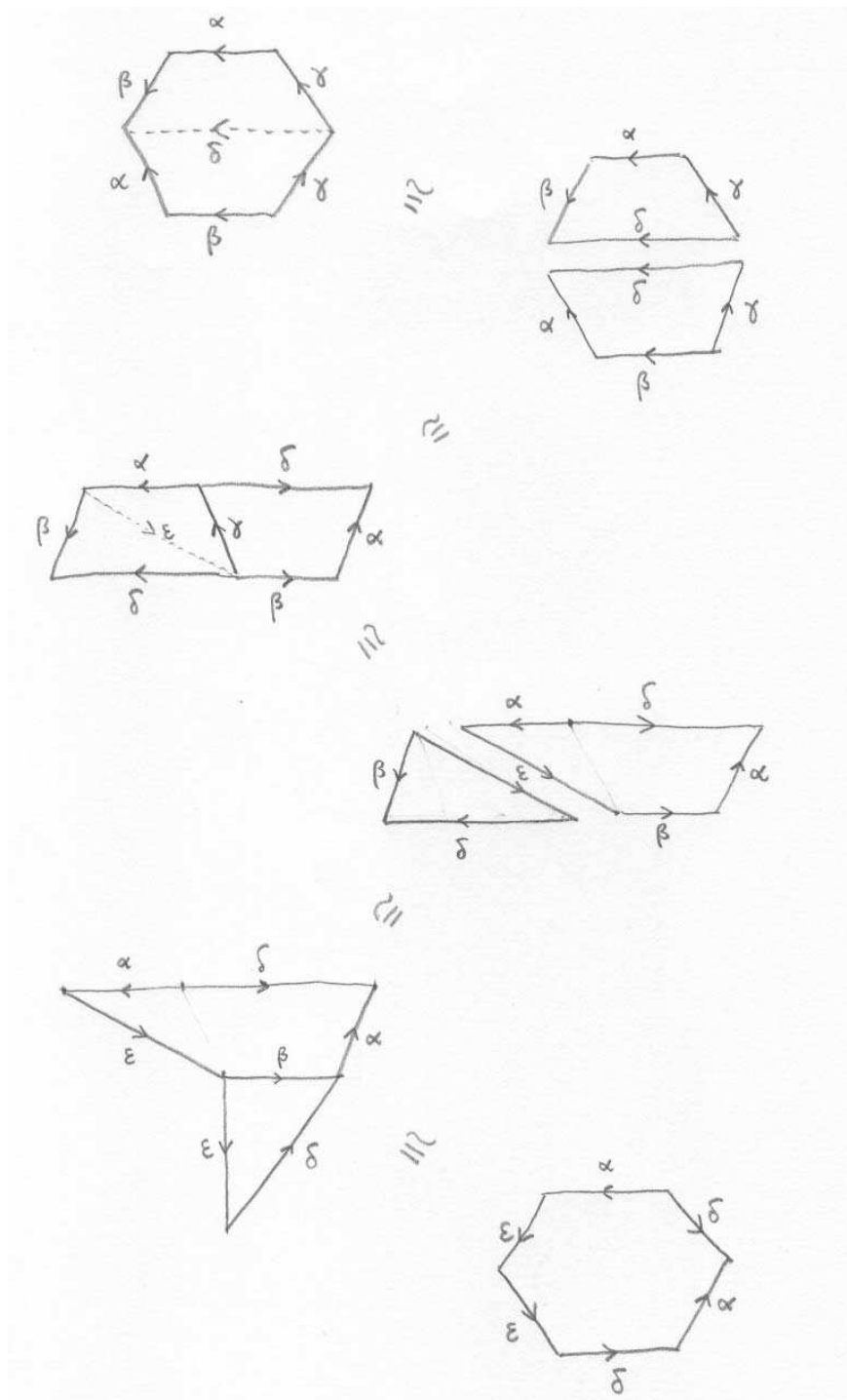
Αυτό σημαίνει ότι κάθε συνεκτικό άθροισμα σπειρών και προβολικών επιπέδων είναι ομοιομορφικό με ένα συνεκτικό άθροισμα μόνο σπειρών ή μόνο προβολικών επιπέδων.

Σχήμα 6.9: Συνεκτικό άθροισμα n σπειρών.Σχήμα 6.10: Συνεκτικό άθροισμα n προβολικών επιπέδων.

Από την Άσκηση 6.1 γνωρίζουμε ότι $T^2 \# \mathbb{R}P^2$ είναι ομοιομορφικό με ένα εξάγωνο με ταυτίσεις σύμφωνα με το σύμβολο $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\gamma$. Κόβουμε το εξάγωνο, δημιουργώντας νέες πλευρές, και κολλάμε τα κομμάτια σύμφωνα με τις ταυτίσεις των πλευρών, όπως στο Σχήμα 6.11. Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε κάθε φορά ένα νέο πολύγωνο με ταυτίσεις στις πλευρές, του οποίου το πηλίκο είναι ομοιομορφικό με αυτό του αρχικού πολυγώνου. Καταλήγουμε στο εξάγωνο με ταυτίσεις σύμφωνα με το σύμβολο $\delta\alpha\delta^{-1}\alpha\epsilon\epsilon$ το οποίο, σύμφωνα με την Άσκηση 6.2 είναι ομοιομορφικό με το συνεκτικό άθροισμα τριών προβολικών επιπέδων.

Το Θεώρημα Ταξινόμησης Κλειστών Επιφανειών

Θεώρημα 6.3 (Θεώρημα ταξινόμησης Κλειστών Επιφανειών) Κάθε κλειστή επιφάνεια είναι ομοιομορφική με μία από τις ακόλουθες.



Σχήμα 6.11: $T^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong K^2 \# \mathbb{R}P^2$.

1. Τη σφαίρα S^2 .
2. Το συνεκτικό άθροισμα g σπερών, για $g \geq 1$.

3. Το συνεκτικό άθροισμα h προβολικών επιπέδων, για $h \geq 1$.

Επι πλέον, κάθε δύο από τις παραπάνω επιφάνειες δεν είναι ομοιομορφικές.

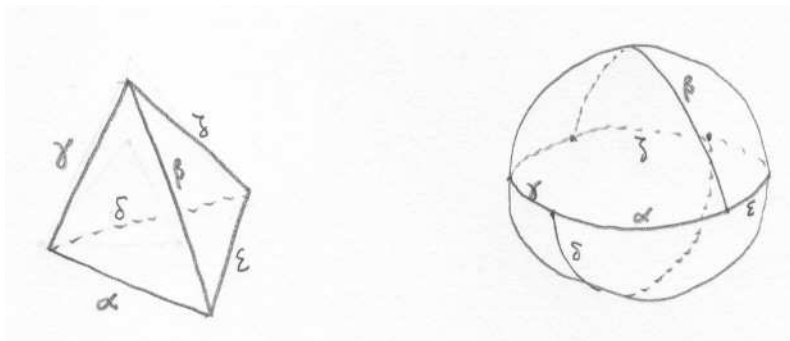
Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.3 χρησιμοποιεί τριγωνοποιήσεις επιφανειών.

Ορισμός. Μία **τριγωνοποίηση** της κλειστής επιφάνειας S είναι μία υποδιαίρεση της S σε υποσύνολα $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ τέτοια ώστε

1. $S = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i$
2. Κάθε σ_i είναι ομοιομορφικό με ένα τρίγωνο στο επίπεδο. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν ξένα μεταξύ τους τρίγωνα στο επίπεδο τ_1, \dots, τ_n και εμφυτεύσεις $f_i : \tau_i \rightarrow S$ με $f_i(\tau_i) = \sigma_i$.
3. Εάν δύο σύνολα σ_i και σ_j , $i \neq j$, τέμνονται, τότε η τομή τους είναι ακριβώς ίση
 - (α') είτε με την εικόνα μίας πλευράς ενός τριγώνου,
 - (β') είτε με την εικόνα μίας κορυφής ενός τριγώνου.

Η εικόνα μίας πλευράς ενός τριγώνου ονομάζεται **ακμή** της τριγωνοποίησης.

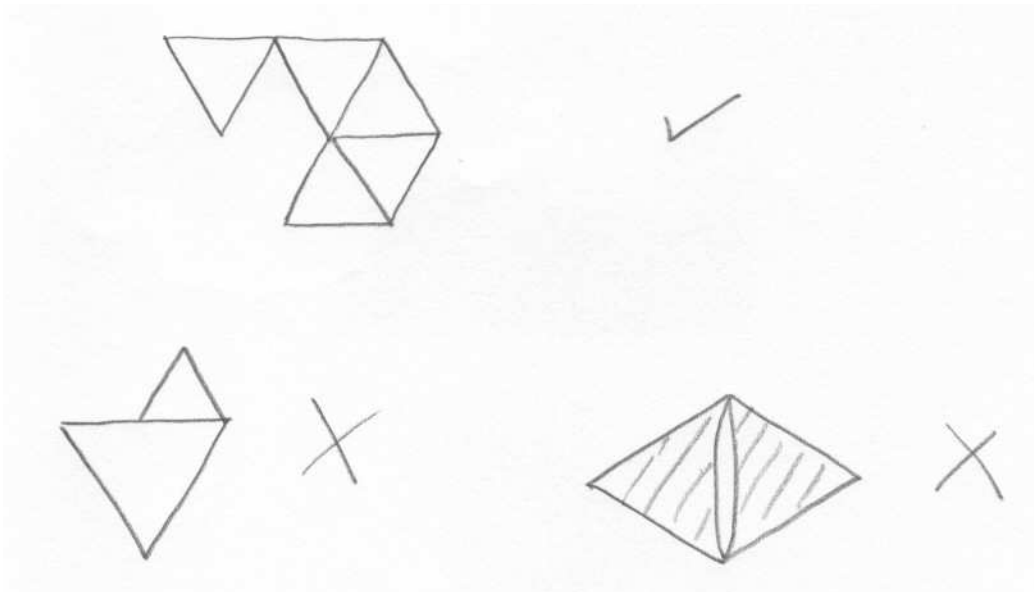
Παράδειγμα 6.5 Το τετράεδρο δίδει μία τριγωνοποίηση της σφαίρας. Το εικοσάεδρο δίδει μία άλλη τριγωνοποίηση της σφαίρας.



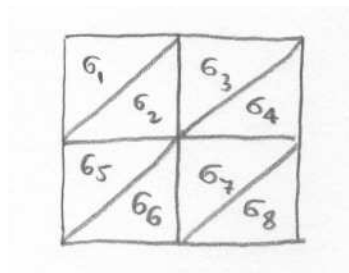
Σχήμα 6.12: Το τετράεδρο και η τριγωνοποίηση της σφαίρας.

Παράδειγμα 6.6 Στο Σχήμα 6.13 βλέπουμε παραδείγματα επιτρεπόμενων και μη επιτρεπόμενων τομών των τριγώνων μίας τριγωνοποίησης.

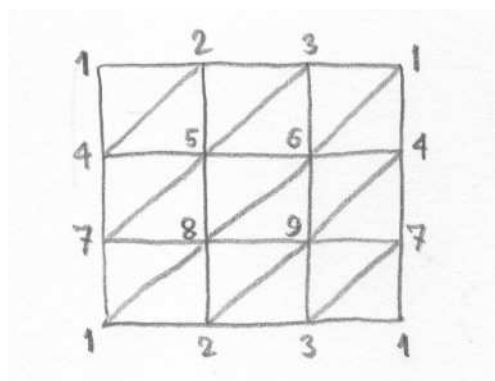
Παράδειγμα 6.7 Η διαίρεση του τετραγώνου σε 8 τρίγωνα στο Σχήμα 6.14 δεν δίδει τριγωνοποίηση της σφαίρας μετά τις ταυτίσεις των πλευρών, γιατί τα τρίγωνα σ_2



Σχήμα 6.13: Οι τομές των τριγώνων μίας τριγωνοποίησης.



Σχήμα 6.14: Αυτή η διαίρεση δεν αποτελεί τριγωνοποίηση της σπείρας.

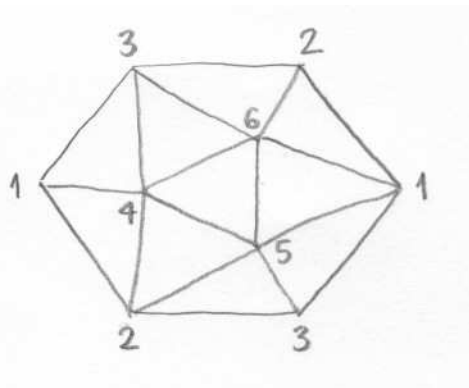


Σχήμα 6.15: Τριγωνοποίηση της σπείρας.

και σ_6 έχουν τομή ίση με δύο κορυφές. Στο Σχήμα 6.15 έχουμε τριγωνοποίηση της σπείρας με 18 τρίγωνα και 9 κορυφές.

Παράδειγμα 6.8 Για να περιγράψουμε μία τριγωνοποίηση μίας επιφάνειας, κατά προσέγγιση ομοιομορφισμού, αρκεί να απαριθμήσουμε τις κορυφές, και να δώσουμε τις τριάδες κορυφών των τριγώνων της τριγωνοποίησης. Έτσι, η τριγωνοποίηση του προβολικού επιπέδου στο Σχήμα 6.16 περιγράφεται από τις τριάδες

126 236 346 314 124 254 235 315 165 456.



Σχήμα 6.16: Τριγωνοποίηση του προβολικού επιπέδου.

Θα διατυπώσουμε χωρίς απόδειξη τρεις βασικές ιδιότητες των τριγωνοποιήσεων επιφανειών.

Λήμμα 6.4 Κάθε ακμή μίας τριγωνοποίησης ανήκει σε ακριβώς δύο τρίγωνα.

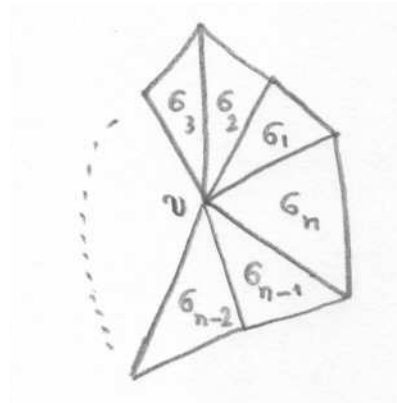
Λήμμα 6.5 Εάν v είναι μία κορυφή μίας τριγωνοποίησης, τότε τα τρίγωνα που έχουν την v ως κορυφή μπορούν να μπουν σε κυκλική διάταξη, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ έτσι ώστε το σ_i και το σ_{i+1} έχουν μία κοινή ακμή εάν $1 \leq i < r$, και το σ_r έχει κοινή ακμή με το σ_1 , δες Σχήμα 6.17.

Οι ακμές των τριγώνων $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ οι οποίες δεν έχουν την v ως μία κορυφή, αποτελούν ένα σύνολο ομοιομορφικό με ένα κύκλο, το οποίο ονομάζεται **κρίκος** στην κορυφή v .

Πρόταση 6.6 Εάν $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ είναι μία τριγωνοποίηση της κλειστής επιφάνειας S , τότε

$$S \cong \bigsqcup_{i=1}^n \tau_i / \sim$$

όπου τα σημεία $x \in \tau_i$ και $y \in \tau_j$ ταυτίζονται εάν $f_i(x) = f_j(y)$.



Σχήμα 6.17: Ο κρίκος στην κορυφή v .

Απόδειξη. Ορίζουμε $f : \sqcup \tau_i \longrightarrow S$ με $f|_{\tau_i} = f_i$. Η f είναι συνεχής, αφού ο περιορισμός της σε κάθε τ_i είναι συνεχής, και είναι επεικονική, αφού $S = \bigcup \sigma_i$. Αλλά $\sqcup \tau_i$ είναι συμπαγής χώρος, και η επιφάνεια S είναι χώρος Hausdorff. Άρα η f είναι κλειστή επεικόνιση και η S έχει την τοπολογία πηλίκο της f .

□

Θεώρημα 6.7 Κάθε κλειστή επιφάνεια S επιδέχεται μία τριγωνοποίηση.

□

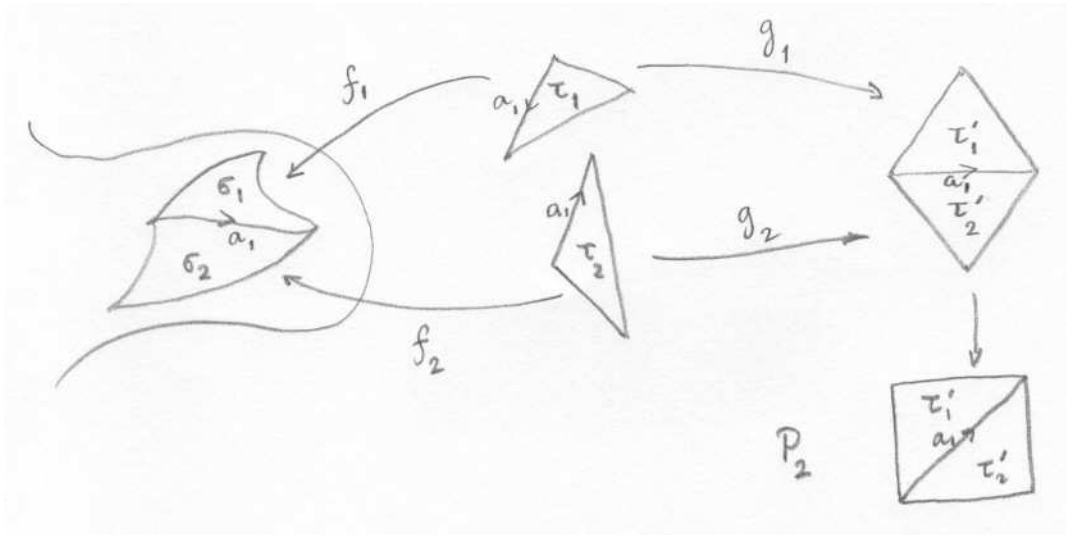
Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι μία τριγωνοποιημένη επιφάνεια είναι ομοιομορφική με μία από τις επιφάνειες του Θεωρήματος 6.3. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα, από μία τριγωνοποιημένη επιφάνεια S κατασκευάζουμε ένα πολύγωνο P με ταυτίσεις των πλευρών ανά δύο, έτσι ώστε $S \cong P/\sim$. Κατόπιν δείχνουμε ότι κάθε τέτοιο πολύγωνο μπορεί να μετατραπεί σε ένα από τα πολύγωνα που αντιστοιχούν στις επιφάνειες του Θεωρήματος 6.3 με κινήσεις που διατηρούν τον τύπο ομοιομορφισμού της επιφάνειας πηλίκο.

Βήμα 1

Θεωρούμε μία επιφάνεια S με τριγωνοποίηση $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Αυτή έχει $k = \frac{3n}{2}$ ακμές. Αριθμούμε αυτές τις ακμές a_1, \dots, a_k και επιλέγουμε μία κατεύθυνση σε κάθε ακμή. Μέσω των εμφυτεύσεων f_i μεταφέρουμε την αρίθμηση και τις κατευθύνσεις στις πλευρές των τριγώνων τ_1, \dots, τ_n . Έτσι για κάθε $l = 1, \dots, k$ υπάρχουν δύο πλευρές που ανήκουν σε διαφορετικά τρίγωνα τ_i και τ_j με την ίδια ετικέτα a_l .

Απεικονίζουμε ομοιομορφικά το τρίγωνο τ_1 σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο τ'_1 στο επίπεδο. Επιλέγουμε μία πλευρά του τ_1 , έστω με ετικέτα a_1 . Έστω τ_2 το άλλο τρίγωνο που έχει πλευρά με ετικέτα a_1 . Απεικονίζουμε το τρίγωνο τ_2 ομοιομορφικά σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο τ'_2 , έτσι ώστε οι πλευρές των τ'_1 και τ'_2 με ετικέτα a_1 να ταυτίζονται

και να ταιριάζουν οι κατευθύνσεις. Πιο συγκεκριμένα, επιλέγουμε ομοιομορφισμούς $g_i : \tau_i \rightarrow \tau'_i$ τέτοιους ώστε $(f_2|_{a_2})^{-1} \circ f_1|_{a_1} = (g_2|_{a_2})^{-1} \circ g_1|_{a_1}$.



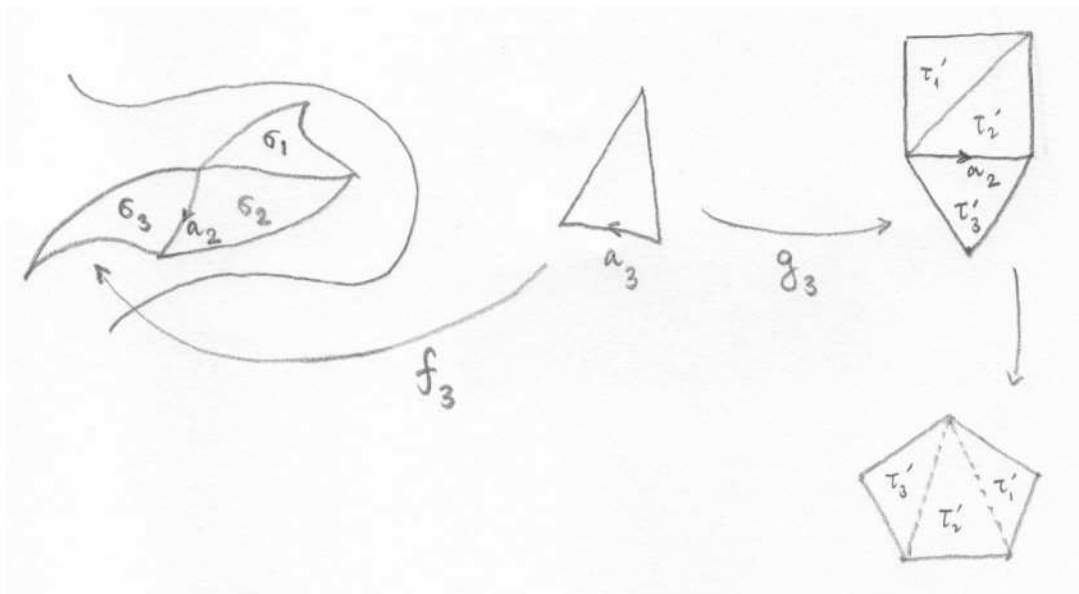
Σχήμα 6.18: Το πολύγωνο P_2 .

Απεικονίζουμε το τετράπλευρο που σχηματίζεται από το $\tau'_1 \cup \tau'_2$ ομοιομορφικά σε ένα τετράγωνο P_2 . Θεωρούμε μία πλευρά του τετραγώνου, έστω με ετικέτα a_2 . Αφού τα σ_1 και σ_2 δεν μπορεί να τέμνονται σε δύο διαφορετικές ακμές, υπάρχει ακριβώς ένα τρίγωνο διαφορετικό από τα τ_1 και τ_2 , έστω το τ_3 , το οποίο έχει μία πλευρά με ετικέτα a_2 .

Απεικονίζουμε το τ_3 ομοιομορφικά σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο τ'_3 , έτσι ώστε η πλευρά του τ_3 με ετικέτα a_2 να ταυτίζεται με την αντίστοιχη πλευρά του τετραγώνου. Απεικονίζουμε ομοιομορφικά το πεντάγωνο που σχηματίζεται σε ένα κανονικό πεντάγωνο P_3 .

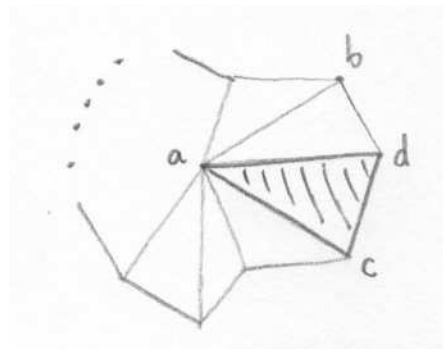
Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο. Όταν έχουμε χρησιμοποιήσει τα τρίγωνα τ_1, \dots, τ_m , για $m < n$, έχουμε κατασκευάσει ένα κανονικό $(m+2)$ -γωνο, P_m , με ετικέτες και επιλεγμένες κατευθύνσεις στις πλευρές του. Κάποιες από τις πλευρές του πολυγώνου μπορεί να έχουν την ίδια ετικέτα, πράγμα που σημαίνει ότι αντιστοιχούν στην ίδια ακμή της τριγωνοποίησης. Για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε τη διαδικασία πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία πλευρά του πολυγώνου με ετικέτα διαφορετικά από όλες τις άλλες πλευρές του πολυγώνου, έστω η a_i . Εάν ισχύει αυτό, υπάρχει ένα τρίγωνο τ_j , με $j > m$, με μία πλευρά με ετικέτα a_i , και ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία κατασκευάζουμε ένα $(m+3)$ -γωνο, P_{m+1} .

Υποθέτουμε ότι όλες οι πλευρές του P_m εμφανίζονται σε ζεύγη με την ίδια ετικέτα, για να οδηγηθούμε σε αντίφαση. Θεωρούμε τα υποσύνολα $K = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_m$ και

Σχήμα 6.19: Το πολύγωνο P_3 .

$L = \sigma_{m+1} \cup \dots \cup \sigma_n$ της επιφάνειας S . Επιλέγουμε δύο κορυφές της τριγωνοποίησης, $u \in K$ και $w \in L$.

Εάν $w \notin K$, συνδέουμε την u με την w με μία πολυγωνική καμπύλη που αποτελείται από ακμές της τριγωνοποίησης. Σε αυτή την καμπύλη υπάρχει μία τελευταία κορυφή a που ανήκει στο K . Έστω b η επόμενη κορυφή, η οποία δεν ανήκει στο K . Αφού η κορυφή a είναι κορυφή ενός τριγώνου στο K , στον κρίκο $C(a)$ υπάρχει μία κορυφή c που ανήκει στο K . Η κορυφή b επίσης ανήκει στον κρίκο $C(a)$.

Σχήμα 6.20: Η ακμή ac περιέχεται σε 3 τρίγωνα!

Εάν $w \in K \cap L$, στον κρίκο $C(w)$ υπάρχει μία κορυφή c που ανήκει στο K και μία κορυφή b που δεν ανήκει στο K .

Σε κάθε περίπτωση, αφού ο κρίκος μίας κορυφής είναι ομοιομορφικός με έναν κύκλο,

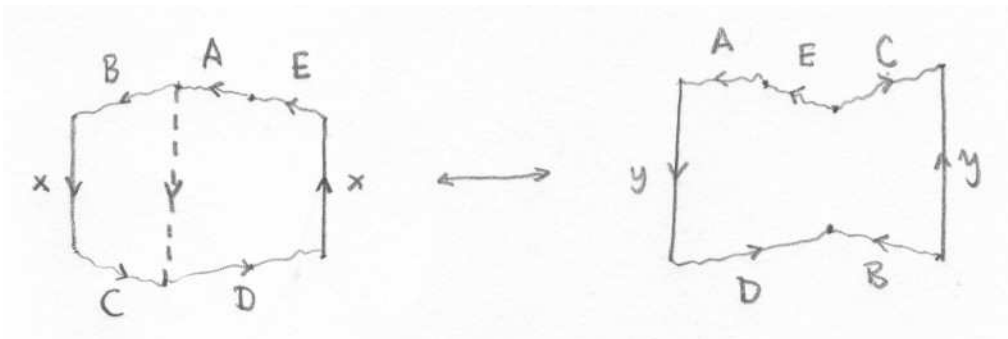
υπάρχει μία πολυγωνική καμπύλη στον κρίκο $C(a)$ ή $C(w)$ η οποία συνδέει την κορυφή c με την κορυφή b . Σε αυτήν την καμπύλη υπάρχει μία τελευταία κορυφή d που ανήκει στο K και η επόμενη κορυφή e δεν ανήκει στο K . Αφού η κορυφή e δεν ανήκει στο K , το τρίγωνο ade βρίσκεται στο L . Η ακμή ad βρίσκεται στο K , και από την υπόθεση υπάρχουν δύο διαφορετικά τρίγωνα στο K των οποίων η ad είναι κοινή ακμή. Αλλά τότε η ακμή ad είναι ακμή τριών διαφορετικών τριγώνων. Άτοπο.

Συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να συνεχίσουμε τη διαδικασία μέχρι να εξαντλήσουμε όλα τα τρίγωνα της τριγωνοποίησης, και να καταλήξουμε σε ένα $(n+2)$ -γωνο, P_n , του οποίου οι πλευρές χωρίζονται σε ζεύγη με την ίδια ετικέτα, και εμφυτεύσεις $g_i : \tau_i \rightarrow P_n$. Αυτό ολοκληρώνει το πρώτο βήμα της απόδειξης.

Βήμα 2

Θα ορίσουμε τρεις τύπους μετατροπών ενός πολυγώνου, με διαδικασία κοψίματος και κολλήματος, οι οποίες δεν αλλάζουν τον τύπο ομοιομορφισμού της επιφάνειας πηλίκο. Σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιούμε μικρά γράμματα x, y για να συμβολίσουμε μεμονομένες πλευρές του πολυγώνου, και κεφαλαία γράμματα A, B, C, \dots για να συμβολίσουμε ένα σύνολο διαδοχικών πλευρών του πολυγώνου, που μπορεί να είναι και κενό.

Τύπος 1



Σχήμα 6.21: Μετατροπή τύπου 1.

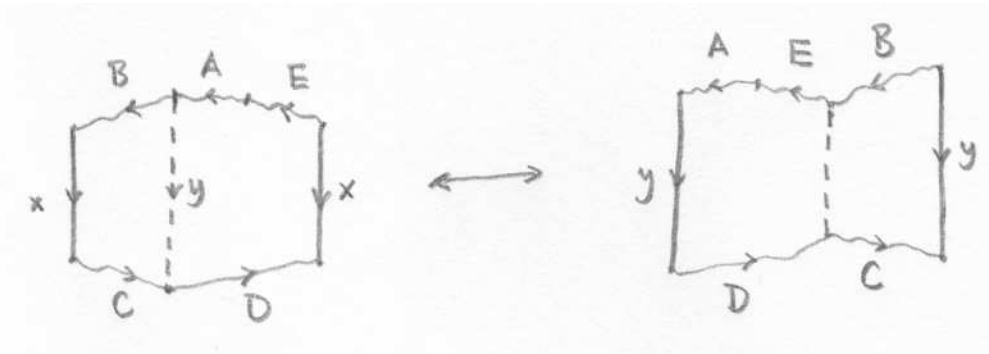
$$ABxCDxE \leftarrow \text{-----} \rightarrow AyDB^{-1}yC^{-1}E$$

Τύπος 2

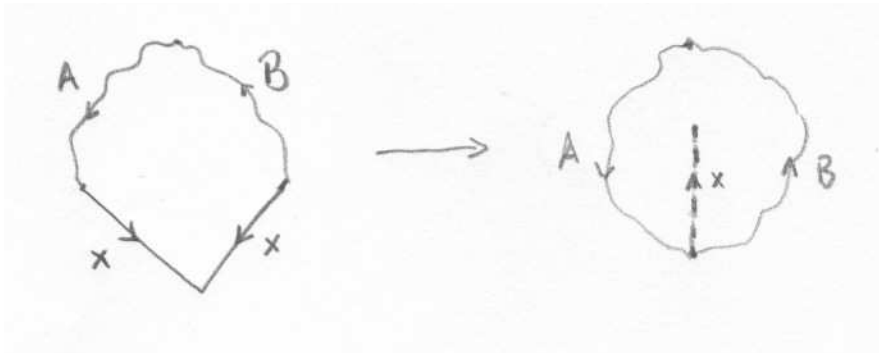
$$ABxCDx^{-1}E \leftarrow \text{-----} \rightarrow AyDCy^{-1}BE$$

Τύπος 3

Εφ' όσον το AB περιέχει τουλάχιστον 4 πλευρές, ορίζουμε την τροποποίηση



Σχήμα 6.22: Μετατροπή τύπου 2.



Σχήμα 6.23: Μετατροπή τύπου 3.

$$Axx^{-1}B \longleftrightarrow AB$$

Θεώρημα 6.8 Κάθε πολύγωνο με τουλάχιστον τέσσερις πλευρές, και με ταυτίσεις των πλευρών ανά δύο, μπορούμε να το φέρουμε, χρησιμοποιώντας μετατροπές των τύπων 1, 2 και 3 σε μία από τις ακόλουθες μορφές:

1. M_0 με σύμβολο $xx^{-1}yy^{-1}$ ή $xyy^{-1}x^{-1}$.
2. M_g με σύμβολο $x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}x_2y_2x_2^{-1}y_2^{-1} \dots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}$ για $g \geq 1$.
3. N_1 με σύμβολο xyy^{-1} .
4. N_h με σύμβολο $x_1x_1x_2x_2 \dots x_hx_h$ για $h \geq 2$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα πολύγωνο με τουλάχιστον τέσσερις πλευρές. Κάθε πλευρά έχει μία ετικέτα, και για κάθε πλευρά υπάρχει άλλη μία με την ίδια ετικέτα.

Ονομάζουμε *ομόρροπα ζεύγη* τα ζεύγη πλευρών με την ίδια ετικέτα που εμφανίζονται στο σύμβολο του πολυγώνου με τον ίδιο εκθέτη, και *αντίρροπα ζεύγη* αυτά που εμφανίζονται με διαφορετικό εκθέτη. Λέμε ότι δύο αντίρροπα ζεύγη είναι *διαπλεκόμενα* εάν εμφανίζονται στο σύμβολο με τη διάταξη $\dots x \dots y \dots x^{-1} \dots y^{-1} \dots$, και ότι είναι *μη διαπλεκόμενα* εάν εμφανίζονται στη διάταξη $\dots x \dots x^{-1} \dots y \dots y^{-1} \dots$ ή $\dots x \dots y \dots y^{-1} \dots x^{-1} \dots$. Η απόδειξη του Θεωρήματος γίνεται σε τέσσερα βήματα. Βήμα α' .

Στο πρώτο βήμα μαζεύουμε όλα τα ομόρροπα ζεύγη στην αρχή, δηλαδή αντικαθιστούμε το πολύγωνο με ένα πολύγωνο με σύμβολο AB , όπου A είναι της μορφής $x_1 x_1 x_2 x_2 \dots x_r x_r$ και B δεν περιέχει ομόρροπα ζεύγη. Επαγωγικά, εάν $A_k = x_1 x_1 \dots x_k x_k$ και έχουμε ένα πολύγωνο με σύμβολο $A_k D x E x F$, εφαρμόζουμε τις μετατροπές τύπου 1:

$$\begin{aligned} A_k D x E x F &\rightarrow A_k y D^{-1} y E^{-1} F \\ &\rightarrow A_k z z D E^{-1} F = A_{k+1} D E^{-1} F, \end{aligned}$$

όπως στο Σχήμα 6.24. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να συγκεντρωθούν όλα τα ομόρροπα ζεύγη στο αρχικό τμήμα του συμβόλου.

Βήμα β' .

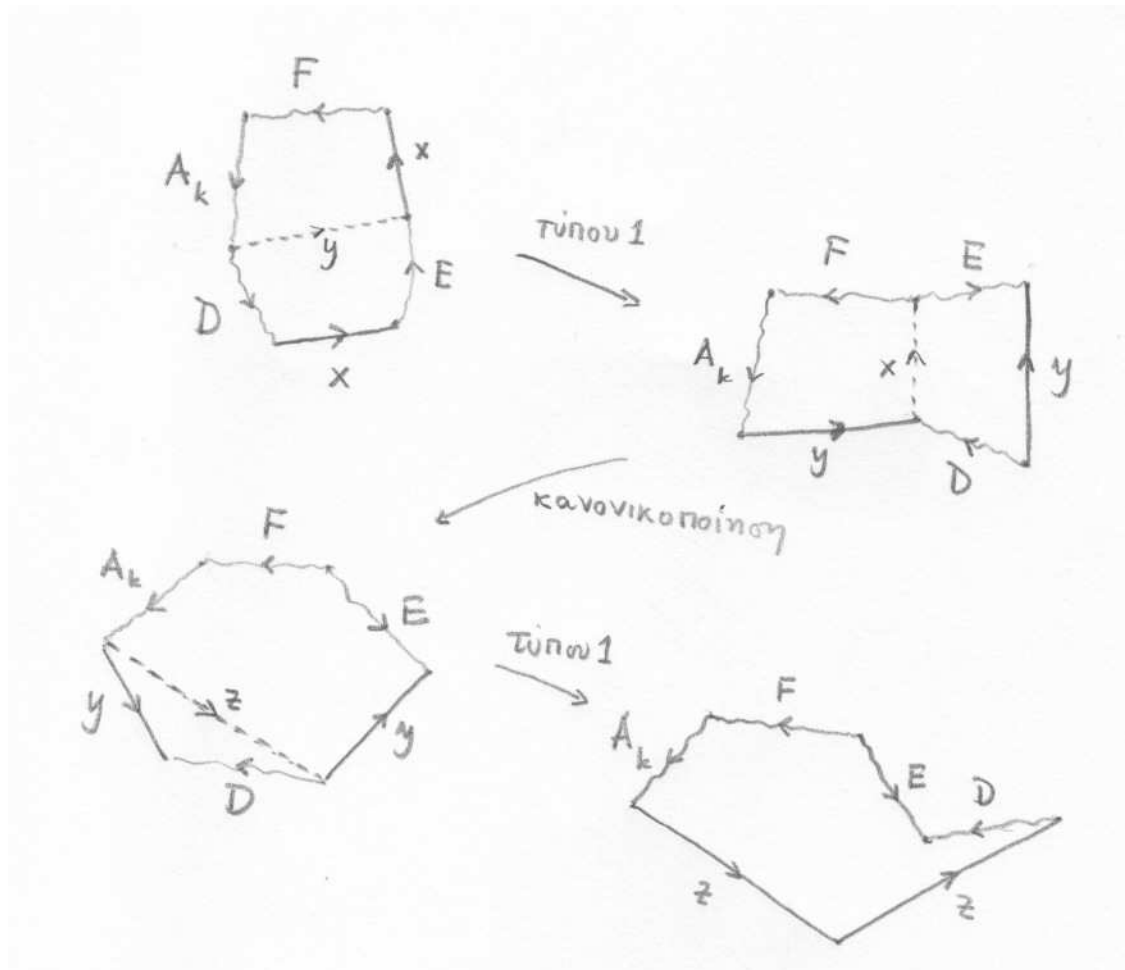
Στο δεύτερο βήμα συγκεντρώνουμε όλα τα διαπλεκόμενα αντίρροπα ζεύγη αμέσως μετά τα ομόρροπα ζεύγη, δηλαδή αντικαθιστούμε το πολύγωνο AB με ένα πολύγωνο με σύμβολο ACD , όπου C είναι της μορφής $y_1 z_1 y_1^{-1} z_1^{-1} \dots y_s z_s y_s^{-1} z_s^{-1}$ και στο D δεν εμφανίζονται διαπλεκόμενα ζεύγη. Επαγωγικά, εάν $C_k = y_1 z_1 y_1^{-1} z_1^{-1} \dots y_k z_k y_k^{-1} z_k^{-1}$ και D περιέχει ένα διαπλεκόμενο ζεύγος, $D = FaGbHa^{-1}Ib^{-1}J$, εφαρμόζουμε τέσσερις τροποποιήσεις τύπου 2:

$$\begin{aligned} AC_k F a G b H a^{-1} I b^{-1} J &\rightarrow AC_k c G b H c^{-1} F I b^{-1} J \\ &\rightarrow AC_k c G d F I H c^{-1} d^{-1} J \\ &\rightarrow AC_k e F I H G d e^{-1} d^{-1} J \\ &\rightarrow AC_k e f e^{-1} f^{-1} F I H G J = AC_{k+1} F I H G J. \end{aligned}$$

Άσκηση 6.3 Σχεδιάστε τις μετατροπές του βήματος β' .

Βήμα γ'

Στο τρίτο βήμα, εάν το κομμάτι A του συμβόλου δεν είναι κενό, δηλαδή εάν υπάρχουν ομόρροπα ζεύγη στο σύμβολο, αντικαθιστούμε κάθε ζεύγος διαπλεκόμενων αντίρροπων ζευγών από δύο ομόρροπα ζεύγη, και φέρνουμε το σύμβολο του πολυγώνου ACD στη μορφή $A'D$, όπου A' αποτελείται από ομόρροπα ζεύγη και D' από μη



Σχήμα 6.24: Βήμα α': Μαζεύουμε τα ομόρροπα ζεύγη στην αρχή.

διαπλεκόμενα αντίρροπα ζεύγη. Εφαρμόζουμε τρεις τροποποιήσεις του τύπου 3, στην αντίθετη κατεύθυνση:

$$\begin{aligned}
 A'' x x a b a^{-1} b^{-1} G &\leftarrow A'' y b^{-1} a^{-1} y a^{-1} b^{-1} G \\
 &\leftarrow A'' y a y^{-1} a c c G \\
 &\leftarrow A'' y y d d c c G.
 \end{aligned}$$

Άσκηση 6.4 Σχεδιάστε τις μετατροπές του βήματος γ'.

Βήμα δ'

Μετά το δεύτερο ή το τρίτο βήμα έχουμε ένα πολύγωνο με σύμβολο AD ή CD , και το D αποτελείται από μη διαπλεκόμενα αντίρροπα ζεύγη. Έστω $\dots x \dots x^{-1} \dots$ το ζεύγος με τον ελάχιστο αριθμό γραμμάτων μεταξύ του x και του x^{-1} . Εάν υπάρχει κάποιο y μεταξύ του x και του x^{-1} , τότε το y^{-1} πρέπει επίσης να βρίσκεται μεταξύ

του x και του x^{-1} , γιατί διαφορετικά τα ζεύγη $x x^{-1}$ και $y y^{-1}$ θα ήταν διαπλεκόμενα. Αλλά τότε το ζεύγος $x x^{-1}$ δεν είναι ελάχιστο ως προς τον αριθμό γραμμάτων μεταξύ του x και του x^{-1} . Συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει κανένα γράμμα μεταξύ του x και του x^{-1} . Έτσι έχουμε ένα ζεύγος $x x^{-1}$ το οποίο μπορούμε να διαγράψουμε με μία μετατροπή τύπου 3 εφ' όσον το υπόλοιπο σύμβολο έχει τουλάχιστον 4 γράμματα.

Εάν το A ή το D έχουν τουλάχιστον τέσσερα γράμματα, καταλήγουμε με ένα πολύγωνο με σύμβολο M_g για $g \geq 1$ ή N_h για $h \geq 2$. Οι περιπτώσεις όπου το A και το C είναι κενά, δίδουν τα σύμβολα του τύπου M_0 , που παριστάνουν την σφαίρα. Τέλος η περίπτωση όπου το A έχει μόνο δύο γράμματα δίδει το σύμβολο N_1 , που παριστάνει το προβολικό επίπεδο. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 6.8.

□

Έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό του Θεωρήματος Ταξινόμησης ότι κάθε κλειστή επιφάνεια είναι ομοιομορφική με μία από τις επιφάνειες της ταξινόμησης. Απομένει να δείξουμε ότι όλες οι επιφάνειες της ταξινόμησης είναι πράγματι διαφορετικές, δηλαδή ότι δεν υπάρχουν δύο που να είναι ομοιομορφικές. Για να το αποδείξουμε αυτό θα χρειαστούμε τα εργαλεία της θεωρίας ομοτοπίας που θα αναπτύξουμε στο επόμενο Κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 7

Ομοτοπία

Για πολλά προβλήματα της τοπολογίας οι έννοιες της ισότητας απεικονίσεων και του ομοιομορφισμού τοπολογικών χώρων είναι πολύ αυστηρές. Σε πολλές περιπτώσεις, απεικονίσεις που δεν είναι ίσες έχουν εν τούτοις παρόμοιες ιδιότητες. Για παράδειγμα θα εξετάσουμε τις απεικονίσεις του κύκλου, $S^1 \rightarrow S^1$ που δίδονται, για $0 \leq s < 1$ και $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0, 1$, από τις εκφράσεις

$$\begin{aligned}f_1(e^{2\pi is}) &= e^{2\pi is} \\f_2(e^{2\pi is}) &= e^{2\pi is^n} \\f_3(e^{2\pi is}) &= e^{2\pi ins}.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Οι δύο πρώτες, αν και δεν είναι ίσες, ‘τυλίγουν’ τον κύκλο μία φορά γύρω από τον εαυτό του. Η τρίτη κάνει κάτι ουσιαστικά διαφορετικό, αφού τυλίγει τον κύκλο n φορές γύρω από τον εαυτό του.

Ορισμός. Δύο συνεχείς απεικονίσεις $f : X \rightarrow Y$ και $g : X \rightarrow Y$ ονομάζονται **ομοτοπικές** εάν υπάρχει μία οικογένεια απεικονίσεων, $f_t : X \rightarrow Y$, $0 \leq t \leq 1$, οι οποίες παραμορφώνουν την $f = f_0$ μέχρι να συμπέσει με τη $g = f_1$. Πιο συγκεκριμένα, μία **ομοτοπία** από την $f : X \rightarrow Y$ στην $g : X \rightarrow Y$ είναι μία συνεχής απεικόνιση $H : X \times I \rightarrow Y$, όπου $I = [0, 1]$, τέτοια ώστε $H(x, 0) = f(x)$ και $H(x, 1) = g(x)$. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $H : f \sim g$ ή $f \sim g$, και $f_t(x) = H(x, t)$.

Παράδειγμα 7.1 Οι απεικονίσεις f_1 και f_2 στο 7.1 είναι ομοτοπικές. Η απεικόνιση $H(e^{2\pi is}, t) = e^{2\pi i((1-t)s+ts^n)}$ είναι μία ομοτοπία από την f_1 στην f_2 . Θα δούμε αργότερα ότι η f_3 δεν είναι ομοτοπική με την f_1 .

Παράδειγμα 7.2 Η εμφύτευση $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z$, είναι ομοτοπική προς τη σταθερή απεικόνιση $z \mapsto 1$. Πράγματι η απεικόνιση $H : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{C}$, $H(z, t) = z(1-t) + t$ είναι μία ομοτοπία από την f στη σταθερή απεικόνιση $z \mapsto 1$.

Η απεικόνιση f_1 του 7.1 διαφέρει από την f μόνο ως προς το πεδίο τιμών. Η f έχει πεδίο τιμών όλο το \mathbb{C} , ενώ η f_1 μόνο τον κύκλο. Είναι προφανές ότι ο κύκλος μπορεί να συρρικνωθεί σε ένα σημείο μέσα στο επίπεδο, και συνεπώς ότι η f είναι ομοτοπική προς μία σταθερή συνάρτηση. Όταν όμως το πεδίο τιμών είναι μόνο ο κύκλος, βλέπουμε διαισθητικά ότι δεν μπορούμε να συρρικνώσουμε την f_1 με συνεχή τρόπο σε μία σταθερή συνάρτηση. Αργότερα θα αποδείξουμε ότι η f_1 δεν είναι ομοτοπική με τη σταθερή συνάρτηση $e^{2\pi is} \rightarrow 1$.

Παράδειγμα 7.3 Η απεικόνιση $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ είναι ομοτοπική προς την ταυτοτική απεικόνιση. Πράγματι $H(z, t) = \frac{z}{|z|}(1-t) + zt$ είναι η ζητούμενη ομοτοπία, αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus \{0\} \times I$ και $H(z, 0) = \frac{z}{|z|}$, $H(z, 1) = z$.

Η ομοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των συνεχών απεικονίσεων από το X στο Y . Είναι προφανές ότι είναι ανακλαστική και συμμετρική σχέση. Για να αποδείξουμε ότι είναι μεταβατική θεωρούμε συνεχείς απεικονίσεις $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$, $h : X \rightarrow Y$ και ομοτοπίες $H : f \sim g$ και $G : g \sim h$. Ορίζουμε την απεικόνιση $F : X \times I \rightarrow Y$,

$$F(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{για } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) & \text{για } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

η οποία είναι καλά ορισμένη και συνεχής αφού για $t = \frac{1}{2}$, $H(x, 2t) = g(x) = G(x, 2t-1)$. Για $t = 0$ έχουμε $F(x, 0) = H(x, 0) = f(x)$ και για $t = 1$, $F(x, 1) = G(x, 1) = g(x)$. Συμπεραίνουμε ότι η F είναι ομοτοπία $f \sim h$.

Την κλάση ομοτοπίας μίας συνεχούς απεικόνισης $f : X \rightarrow Y$ τη συμβολίζουμε $[f]$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της ομοτοπίας για να ορίσουμε μία σχέση ισοδυναμίας πιο ασθενή από τον ομοιομορφισμό. Μία συνεχής απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ ονομάζεται **ομοτοπική ισοδυναμία** εάν υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $g : Y \rightarrow X$ τέτοια ώστε οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ να είναι ομοτοπικές προς τις αντίστοιχες ταυτοτικές απεικονίσεις, δηλαδή να ισχύουν οι σχέσεις $g \circ f \sim \text{id}_X$ και $f \circ g \sim \text{id}_Y$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η g είναι **ομοτοπική αντίστροφη** της f . Εάν υπάρχει ομοτοπική ισοδυναμία $f : X \rightarrow Y$ λέμε ότι οι τοπολογικοί χώροι X και Y είναι **ομοτοπικά ισοδύναμοι**, και το συμβολίζουμε $X \simeq Y$.

Συγκρίνοντας τον ορισμό της ομοτοπικής ισοδυναμίας με αυτόν του ομοιομορφισμού, βλέπουμε ότι η μόνη διαφορά είναι ότι η ομοτοπία παίρνει τη θέση της ισότητας μεταξύ των $g \circ f$ και id_X , $f \circ g$ και id_Y . Όμως μία ομοτοπική ισοδυναμία δεν είναι υποχρεωτικά αντιστρέψιμη ως απεικόνιση, όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.4 Ο δίσκος D^2 είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με ένα σημείο. Θεωρούμε τη σταθερή απεικόνιση $f : D^2 \rightarrow \{0\}$ και την ένθεση $g : \{0\} \rightarrow D^2$. Προφανώς

$f \circ g = \text{id}_{\{0\}}$. Η απεικόνιση $g \circ f : D^2 \rightarrow D^2$ είναι η $g \circ f(z) = 0$, η οποία είναι ομοτοπική προς την ταυτοτική μέσω της ομοτοπίας $H(z, t) = tz$.

Πρόταση 7.1 Η ομοτοπική ισοδυναμία είναι σχέση ισοδυναμίας στην τάξη των τοπολογικών χώρων.

Απόδειξη. Η ανακλαστική και η συμμετρική ιδιότητα είναι προφανείς. Θα δείξουμε ότι η σχέση είναι μεταβατική. Θεωρούμε τοπολογικούς χώρους X, Y, Z και υποθέτουμε ότι $f_1 : X \rightarrow Y$ και $f_2 : Y \rightarrow Z$ είναι ομοτοπικές ισοδυναμίες. Τότε υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $g_1 : Y \rightarrow X$ και $g_2 : Z \rightarrow Y$ και ομοτοπίες $H_1 : g_1 \circ f_1 \sim \text{id}_X$, $G_1 : f_1 \circ g_1 \sim \text{id}_Y$, $H_2 : g_2 \circ f_2 \sim \text{id}_Y$, $G_2 : f_2 \circ g_2 \sim \text{id}_Z$. Θα δείξουμε ότι $f_2 \circ f_1$ είναι ομοτοπική ισοδυναμία, με ομοτοπική αντίστροφη $g_1 \circ g_2$.

Πρέπει να δείξουμε ότι $f_2 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_2 \sim \text{id}_Z$ και ότι $g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1 \sim \text{id}_X$. Ορίζουμε την απεικόνιση $F : Z \times I \rightarrow Z$,

$$F(z, t) = \begin{cases} f_2 \circ G_1(g_2(z), 2t) & \text{για } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G_2(z, 2t - 1) & \text{για } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

και ελέγχουμε ότι είναι καλά ορισμένη συνεχής απεικόνιση, δηλαδή ότι οι δύο ορισμοί συμφωνούν για $t = \frac{1}{2}$, και ότι είναι ομοτοπία από την $f_2 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_2$ στην id_Z .

Ανάλογα ορίζουμε την ομοτοπία $K : g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1 \sim \text{id}_X$

$$K(x, t) = \begin{cases} g_1 \circ H_2(f_1(x), 2t) & \text{για } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_1(x, 2t - 1) & \text{για } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

□

Άσκηση 7.1 Δείξτε ότι οι ακόλουθοι χώροι είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι. Σε κάθε περίπτωση βρείτε απεικονίσεις μεταξύ των δύο χώρων και δείξτε ότι είναι ομοτοπικές αντίστροφες.

1. $\mathbb{R}^n \simeq \{0\}$
2. $\mathbb{C} \setminus \{0\} \simeq S^1$
3. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$
4. $X \times \mathbb{R}^n \simeq X$ για κάθε τοπολογικό χώρο X

Ομοτοπία δρόμων

Ορισμός. Δύο δρόμοι στον τοπολογικό χώρο X , $\sigma : I \longrightarrow X$ και $\tau : I \longrightarrow X$, είναι **ομοτοπικοί σχετικά προς τα πέρατα** εάν υπάρχει ομοτοπία από την απεικόνιση σ στην απεικόνιση τ η οποία αφήνει σταθερά τα πέρατα των δρόμων, δηλαδή εάν υπάρχει μία συνεχής απεικόνιση $H : I \times I \longrightarrow X$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \sigma(s) \\ H(s, 1) &= \tau(s) \\ H(0, t) &= \sigma(0) = \tau(0) \\ H(1, t) &= \sigma(1) = \tau(1) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.5 Είναι προφανές ότι δύο δρόμοι μπορεί να είναι ομοτοπικοί μόνον όταν έχουν τα ίδια πέρατα. Για δρόμους στον χώρο \mathbb{R}^n αυτή η αναγκαία συνθήκη είναι και ικανή. Θεωρούμε δρόμους $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ και $\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, με $\sigma(0) = \tau(0)$ και $\sigma(1) = \tau(1)$. Τότε μία ομοτοπία των δύο δρόμων σχετικά προς τα πέρατα είναι η απεικόνιση

$$H(s, t) = (1 - t)\sigma(s) + t\tau(s).$$

Λήμμα 7.2 Η ομοτοπία δρόμων σχετικά προς τα πέρατα είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των δρόμων σε ένα τοπολογικό χώρο X .

□

Άσκηση 7.2 Δείξτε ότι η ομοτοπία δρόμων σχετικά προς τα πέρατα έχει τη μεταβατική ιδιότητα.

Όταν αναφερόμαστε σε ομοτοπίες μεταξύ δρόμων, θα εννοούμε ομοτοπίες σχετικά προς τα πέρατα. Συμβολίζουμε $\Pi(X)$ το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας δρόμων (σχετικά προς τα πέρατα) στον τοπολογικό χώρο X .

Εάν σ και τ είναι δρόμοι στο X και το τέλος του σ συμπίπτει με την αρχή του τ , δηλαδή $\sigma(1) = \tau(0)$, ορίζουμε το δρόμο $\sigma \cdot \tau(s) : I \longrightarrow X$,

$$\sigma \cdot \tau(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{για } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2s - 1) & \text{για } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Δηλαδή $\sigma \cdot \tau$ είναι ο δρόμος που διατρέχει τον σ και στη συνέχεια τον τ , με διπλάσια ταχύτητα.

Η προηγούμενη πράξη είναι συμβατή με τη σχέση της ομοτοπίας δρόμων, και ορίζει ένα γινόμενο μεταξύ δύο κλάσεων ομοτοπίας δρόμων στο $\Pi(X)$ όταν το τέλος του πρώτου δρόμου συμπίπτει με την αρχή του δεύτερου.

Ορισμός. Εάν $[\sigma]$ και $[\tau]$ είναι κλάσεις ομοτοπίας δρόμων στο X και $\sigma(1) = \tau(0)$, ορίζουμε το γινόμενο

$$[\sigma][\tau] = [\sigma \cdot \tau].$$

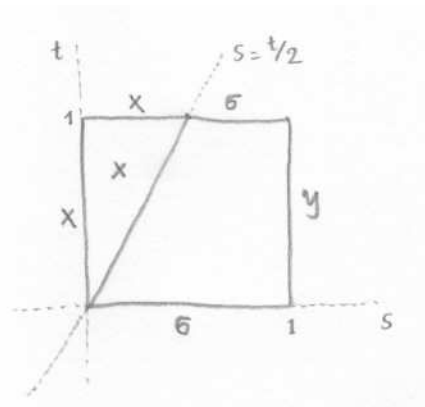
Εύκολα ελέγχουμε ότι το γινόμενο είναι καλά ορισμένο, δηλαδή ότι εάν $\sigma \sim \sigma'$ και $\tau \sim \tau'$ τότε $\sigma \cdot \tau \sim \sigma' \cdot \tau'$.

Άσκηση 7.3 Εάν $H : \sigma \sim \sigma'$ και $G : \tau \sim \tau'$ είναι ομοτοπίες δρόμων και $\sigma(1) = \tau(0)$, βρείτε ομοτοπία $F : \sigma \cdot \tau \sim \sigma' \cdot \tau'$.

Εάν $x \in X$, συμβολίζουμε $[x]$ την κλάση ομοτοπίας του σταθερού δρόμου $s \mapsto x$. Εάν $\sigma(0) = x$ και $\sigma(1) = y$ τότε $[\sigma] = [x][\sigma] = [\sigma][y]$. Δηλαδή οι κλάσεις ομοτοπίας των σταθερών δρόμων είναι μονόπλευρα ουδέτερα στοιχεία του γινομένου κλάσεων ομοτοπίας δρόμων με αρχή ή τέλος στα συγκεκριμένα σημεία. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$H(s, t) = \begin{cases} x & \text{για } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}t \\ \sigma\left(\frac{s-t/2}{1-t/2}\right) & \text{για } \frac{1}{2}t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

δίδει μία καλά ορισμένη ομοτοπία $H : \sigma \sim x \cdot \sigma$, η οποία παριστάνεται γραφικά στο Σχήμα 7.1.



Σχήμα 7.1: Η ομοτοπία $H : \sigma \sim x \cdot \sigma$.

Άσκηση 7.4 Εάν σ είναι δρόμος στον τοπολογικό χώρο X , βρείτε ομοτοπία $G : \sigma \sim \sigma \cdot \sigma(1)$.

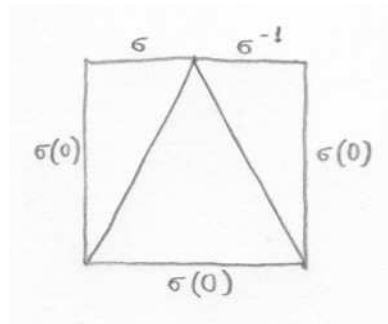
Για κάθε δρόμο σ στον τοπολογικό χώρο X ορίζουμε τον αντίθετο δρόμο σ^{-1} ,

$$\sigma^{-1}(s) = \sigma(1 - s),$$

ο οποίος έχει την ιδιότητα ότι $\sigma \cdot \sigma^{-1} \sim \sigma(0)$ και $\sigma^{-1} \cdot \sigma \sim \sigma(1)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$H(s, t) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{για } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}t \\ \sigma(t) & \text{για } \frac{1}{2}t \leq s \leq 1 - \frac{1}{2}t \\ \sigma^{-1}(2s - 1) & \text{για } 1 - \frac{1}{2}t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

δίδει μία καλά ορισμένη ομοτοπία $H : \sigma(0) \sim \sigma \cdot \sigma^{-1}$, η οποία παριστάνεται γραφικά στο Σχήμα 7.2.



Σχήμα 7.2: Η ομοτοπία $H : \sigma(0) \sim \sigma \cdot \sigma^{-1}$.

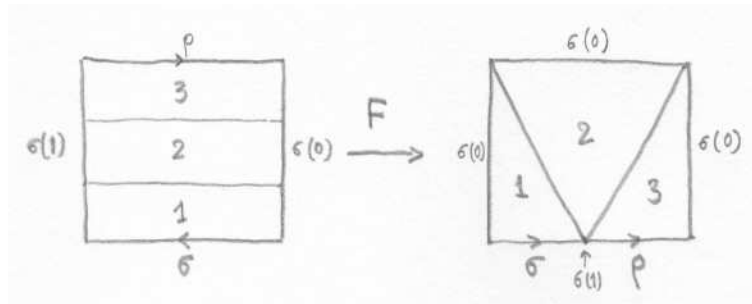
Άσκηση 7.5 Εάν σ είναι δρόμος στον τοπολογικό χώρο X , βρείτε ομοτοπία $G : \sigma(1) \sim \sigma^{-1} \cdot \sigma$.

Πρόταση 7.3 Το αντίστροφο της κλάσης $[\sigma]$ είναι μοναδικό, δηλαδή εάν $[\sigma \cdot \rho] = [\sigma(0)]$ τότε $\rho \sim \sigma^{-1}$.

Απόδειξη. Θέλουμε να κατασκευάσουμε μία ομοτοπία $G : I \times I \rightarrow X$ τέτοια ώστε $G(s, 0) = \sigma(1 - s)$ και $G(s, 1) = \rho(s)$.

Υποθέτουμε ότι $H : I \times I \rightarrow X$ είναι ομοτοπία τέτοια ώστε $H(s, 0) = \sigma \cdot \rho(s)$ και $H(s, 1) = \sigma(0)$. Θα κατασκευάσουμε την G συνθέτοντας την H από τα δεξιά με μία απεικόνιση $F : I \times I \rightarrow I \times I$ τέτοια ώστε, για $0 \leq s \leq 1$, $F(s, 0) = (\frac{1}{2} - \frac{s}{2}, 0)$ και $F(s, 1) = (\frac{1}{2} + \frac{s}{2}, 0)$, για $0 \leq t \leq 1$, $F(0, t) = (\frac{1}{2}, 0)$ και $F(1, t)$ απεικονίζεται στις άλλες τρεις πλευρές του τετραγώνου, όπως στο Σχήμα 7.3. Μία τέτοια απεικόνιση είναι η

$$F(s, t) = \begin{cases} (1 - s)(\frac{1}{2}, 0) + s(0, 3t) & \text{για } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (1 - s)(\frac{1}{2}, 0) + s(3t - 1, 1) & \text{για } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (1 - s)(\frac{1}{2}, 0) + s(1, 3 - 3t) & \text{για } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



Σχήμα 7.3: Η απεικόνιση $F : I \times I \longrightarrow I \times I$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι η ζητούμενη ομοτοπία είναι $G = H \circ F : \sigma^{-1} \sim \rho$.

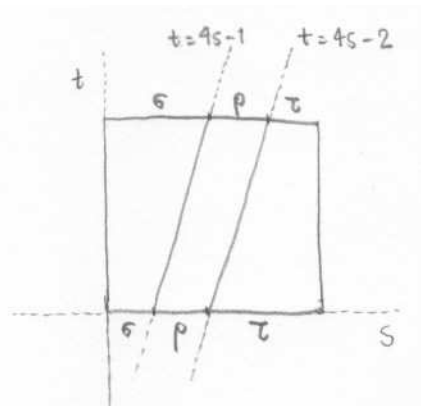
□

Το γινόμενο κλάσεων ομοτοπίας δρόμων έχει την προσεταιριστική ιδιότητα,

$$([\sigma] [\rho]) [\tau] = [\sigma] ([\rho] [\tau]).$$

Οι δύο δρόμοι, $(\sigma \cdot \rho) \cdot \tau$ και $\sigma \cdot (\rho \cdot \tau)$, ακολουθούν την ίδια ‘διαδρομή’, αλλά με διαφορετική ταχύτητα σε κάθε τμήμα. Μία ομοτοπία μεταξύ τους, που παριστάνεται γραφικά στο Σχήμα 7.4, είναι η

$$H(s, t) = \begin{cases} \sigma\left(\frac{4s}{1+t}\right) & \text{για } 0 \leq s \leq \frac{1+t}{4} \\ \rho(4s - 1 - t) & \text{για } \frac{1+t}{4} \leq s \leq \frac{2+t}{4} \\ \tau\left(\frac{4s-2-t}{2-t}\right) & \text{για } \frac{2+t}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$



Σχήμα 7.4: Η ομοτοπία $H : (\sigma \cdot \rho) \cdot \tau \sim \sigma \cdot (\rho \cdot \tau)$.

Θεμελιώδης Ομάδα

Ένας δρόμος $\sigma : I \rightarrow X$ τέτοιος ώστε $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$ ονομάζεται **κλειστός δρόμος με βάση** x_0 . Συμβολίζουμε $\pi(X, x_0)$ το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας κλειστών δρόμων στο X με βάση x_0 .

Θεώρημα 7.4 Το σύνολο $\pi(X, x_0)$ με την πράξη του πολλαπλασιασμού κλάσεων ομοτοπίας δρόμων, είναι μία ομάδα, και ονομάζεται **θεμελιώδης ομάδα** του X με βάση x_0 .

Απόδειξη. Το γινόμενο είναι καλά ορισμένο, αφού όλοι οι δρόμοι έχουν τα ίδια πέρατα. Δείξαμε ότι είναι προσεταιριστικό. Αφού ο δρόμος σ είναι κλειστός, σ^{-1} είναι αμφίπλευρο αντίστροφο,

$$[\sigma \cdot \sigma^{-1}] = [\sigma(0)] = [\sigma(1)] = [\sigma^{-1} \cdot \sigma].$$

Το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας είναι η κλάση ομοτοπίας του σταθερού δρόμου $[x_0]$.

□

Είναι προφανές ότι η θεμελιώδης ομάδα $\pi(X, x_0)$ καθορίζεται από την κατά δρόμους συνιστώσα του X που περιέχει το σημείο x_0 . Γι' αυτό στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι όλοι οι χώροι στους οποίους αναφερόμαστε είναι συνεκτικοί κατά δρόμους.

Πρόταση 7.5 Θεωρούμε (συνεκτικό κατά δρόμους) τοπολογικό χώρο X , δύο σημεία, x_0 και x_1 στον X και δρόμο $\alpha : I \rightarrow X$ από το x_0 στο x_1 . Τότε η απεικόνιση

$$\alpha_{\#} : \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(X, x_1) : [\sigma] \mapsto [\alpha^{-1}] [\sigma] [\alpha]$$

είναι ισομορφισμός από τη θεμελιώδη ομάδα του X με βάση x_0 στη θεμελιώδη ομάδα του X με βάση x_1 .

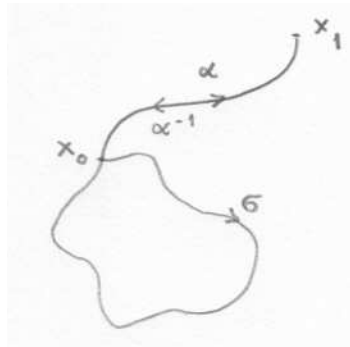
Απόδειξη. Η απεικόνιση $\alpha_{\#}$ είναι καλά ορισμένη, αφού εάν $\rho \sim \sigma$ τότε $\alpha^{-1} \cdot \rho \cdot \alpha \sim \alpha^{-1} \cdot \sigma \cdot \alpha$, και είναι ομομορφισμός αφού

$$\begin{aligned} \alpha_{\#}([\sigma]) \alpha_{\#}([\rho]) &= [\alpha^{-1}] [\sigma] [\alpha] [\alpha^{-1}] [\rho] [\alpha] \\ &= [\alpha^{-1}] [\sigma] [\rho] [\alpha] \\ &= [\alpha^{-1}] [\sigma \cdot \rho] [\alpha] \\ &= \alpha_{\#}([\sigma] [\rho]). \end{aligned}$$

Ο ομομορφισμός $\alpha_{\#}$ έχει αντίστροφο $(\alpha^{-1})_{\#}$.

□

Άσκηση 7.6 Δείξτε ότι $(\alpha^{-1})_{\#}$ είναι ο αντίστροφος ομομορφισμός του $\alpha_{\#}$.

Σχήμα 7.5: Ο δρόμος $\alpha_{\#}(\sigma)$.

Πρόταση 7.6 Εάν $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής απεικόνιση, και $f(x_0) = y_0$, τότε η απεικόνιση

$$f_* : \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, y_0) : [\sigma] \mapsto [f \circ \sigma]$$

είναι ομομορφισμός από τη θεμελιώδη ομάδα του X με βάση x_0 στη θεμελιώδη ομάδα του Y με βάση y_0 , και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

1. $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi(X, x_0)}$
2. Εάν $g : Y \rightarrow Z$ είναι συνεχής απεικόνιση, τότε $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$
3. Εάν f είναι ομομορφισμός τοπολογικών χώρων, τότε f_* είναι ισομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη.

□

Πρόταση 7.7 Εάν f και g είναι ομοτοπικές συνεχείς απεικονίσεις $X \rightarrow Y$ και $H : f \sim g$ είναι ομοτοπία τέτοια ώστε $H(x_0, t) = y_0$ για κάθε $t \in I$, τότε $f_* = g_*$.

Γενικότερα, εάν $H : f \sim g$ και $H(x_0, t) = \alpha(t)$, τότε $g_* = \alpha_{\#} \circ f_*$.

Λήμμα 7.8 Θεωρούμε συνεχή απεικόνιση $F : I \times I \rightarrow X$ και ορίζουμε τους δρόμους $\alpha(t) = F(0, t)$, $\beta(t) = F(1, t)$, $\gamma(s) = F(s, 0)$, $\delta(s) = F(s, 1)$. Τότε υπάρχει ομοτοπία σχετική προς τα πέρατα μεταξύ των δρόμων $\alpha^{-1} \cdot \gamma \cdot \beta$ και δ .

Απόδειξη. Θέτουμε $x_0 = F(0, 1)$ και $x_1 = F(1, 1)$. Ορίζουμε τις συνεχείς απεικονίσεις

$$E(s, t) = \begin{cases} x_0 & \text{για } 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ \alpha(1 + t - s) & \text{για } 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

και

$$G(s, t) = \begin{cases} \beta(t + s) & \text{για } 0 \leq t \leq 1 - s \leq 1 \\ x_1 & \text{για } 0 \leq 1 - s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

και ελέγχουμε ότι η ζητούμενη ομοτοπία δίδεται από

$$H(s, t) = \begin{cases} E(3s, t) & \text{για } 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \\ F(3s - 1, t) & \text{για } \frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3} \\ G(3s - 2, t) & \text{για } \frac{2}{3} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

□

Κεφάλαιο 8

Οι θεμελιώδεις ομάδες των επιφανειών

Δείχνουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα του συνεκτικού αθροίσματος n κύκλων είναι η ελεύθερη ομάδα σε n γράμματα.

Δείχνουμε ότι η θεμελιώδης ομάδα της επιφάνειας που προκύπτει από ταυτίσεις των πλευρών ενός πολυγώνου, σύμφωνα με το σύμβολο σ , είναι ισομορφική με την ελεύθερη ομάδα στα γράμματα του σ πηλίκο με την κανονική υποομάδα που παράγεται από το σ .

Οι ομάδες που αντιστοιχούν σε διαφορετικές επιφάνειες της ταξινόμησης, είναι διαφορετικές. Μπορούμε να δείξουμε ότι έχουν διαφορετικές αβελιανοποιήσεις.