Μάνος Λυδάκης 21 Μαΐου 2014

Μέρος Α: Γενική Τοπολογία

Διάλεξη 1: Στο μέρος Α του μαθήματος, κατά κανόνα, θεωρούμε δεδομένο ένα σταθερό σύνολο X. Κατά κανόνα, κεφαλαία γράμματα συμβολίζουν υποσύνολα του X και μικρά γράμματα συμβολίζουν σημεία του X. Είπαμε πότε ορισμένα υποσύνολα του X θα τα λέμε βασικά ανοιχτά (θα πρέπει να είναι δεδομένη μιά «καλή» συνθήκη που τα καθορίζει). Εσωτερικά σημεία ενός υποσυνόλου του X. Ανοιχτά υποσύνολα του X. Οι τρεις θεμελιώδεις ιδιότητες των ανοιχτών υποσυνόλων. Παραδείγματα με $X = \mathbb{R}$ και $X = \mathbb{R}^2$.

Διάλεξη 2: Άπειρες ενώσεις και τομές,τοπολογικοί χώροι, πότε δυο διαφορετικές οικογένειες βασικών ανοιχτών καθορίζουν ακριβώς τα ίδια ανοιχτά, τα ανοιχτά είναι ακριβώς οι ενώσεις βασικών ανοιχτών.

Διάλεξη 3: Κοντινά σημεία, κλειστή θήκη. Σχέση μεταξύ εσωτερικών σημείων, κοντινών σημείων, και συμπληρωματικού υποσυνόλου. Κλειστά σύνολα.

Διάλεξη 4: Το σύνορο του A. Μετρικές, νόρμες, οι ℓ_p-νόρμες στον $\mathbb{R}^n$, η διακριτή μετρική στο X και πως την βλέπουμε «γεωμετρικά» αν το X έχει «λίγα» σημεία. Τι είναι μετρικός χώρος (ΜΧ) και πως κάθε ΜΧ γίνεται (τοπολογικός) χώρος παίρνοντας ως βασικά ανοιχτά τους ανοιχτούς δίσκους. Μετρικοποιήσιμοι χώροι, και πως δυο διαφορετικοί ΜΧ μπορεί να καθορίζουν τον ίδιο (μετρικοποιήσιμο) χώρο. Η φραγμένη μετρική. Διακριτοί χώροι και γιατί είναι μετρικοποιήσιμοι.

Διάλεξη 5: Γιατί ο $X = \mathbb{Z}$ είναι διακριτός, ειδικότερα ότι μπορούμε να δούμε αυτόν τον διακριτό χώρο «τοπολογικά» παρόλο που έχει «λίγο περισσότερα από λίγα» σημεία. Τετριμμένοι χώροι και γιατί δεν είναι μετρικοποιήσιμοι. Συνεχείς συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους, συνεχείς συναρτήσεις σε τοπολογικούς χώρους. Υπόχωροι.

Διάλεξη 6: Παραδείγματα υποχώρων. Πως επηρεάζει ο περιορισμός του πεδίου ορισμού και η επέκταση του πεδίου τιμών τη συνέχεια συναρτήσεων. Το Λήμμα της Επικόλλησης. Υπόχωροι μετρικών χώρων. Ομοιομορφισμοί, τι σημαίνει οι χώροι X και Y να είναι ομοιομορφικοί ($X \cong Y$), παραδείγματα του πόσο γενική είναι, εκ πρώτης όψεως, αυτή η σχέση. Παραδείγματα ενδιαφερόντων «τοπολογικών ιδιοτήτων».

Διάλεξη 7: Το ότι υπάρχει η f^{-1} δεν σημαίνει ότι είναι συνεχής (ακόμη και αν η f είναι συνεχής). Πως βλέπουμε «γεωμετρικά» το σύνολο $X \times Y$. Ο χώρος $X \times Y$. Ο $\mathbb{R}^n$ είναι χώρος γινόμενο. Οι συνιστώσες συναρτήσεις μιας $f : Z \to X \times Y$ και οι σχέση τους με την συνέχεια της f. Χώροι Hausdorff.

Διάλεξη 8: Πότε λέμε ότι τα υποσύνολα W_i του X καλύπτουν το υποσύνολο V του X, πότε ότι το V είναι συμπαγές, πότε ότι ο X είναι συμπαγής. Συμπαγές $\Rightarrow$ Κλειστό σε χώρους Hausdorff. Κλειστό $\Rightarrow$ Συμπαγές σε συμπαγείς χώρους. (f Συνεχής και V Συμπαγές) $\Rightarrow f(V)$ Συμπαγές. Κλειστές συναρτήσεις και οι σχέση τους με τις παραπάνω τρεις συνεπαγωγές. Πότε ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου λέγεται φραγμένο. Συμπαγές $\Rightarrow$ Φραγμένο σε μετρικοποιήσιμους χώρους. Το Θεώρημα του Tychonoff για πεπερασμένο πλήθος παραγόντων. Το Θεώρημα των Heine-Borel. Το (γενικευμένο) Θεώρημα της Μέγιστης Τιμής.

Διάλεξη 9: Συμπάγεια και συγκλίνουσες υπακολουθίες σε μετρικοποιήσιμους χώρους. Αριθμός του Lebesgue. Διαχωρισμένα σημεία, διαχώριση χώρου, συνεκτικοί χώροι, η σχέση με τα «clopen» (δηλαδη: ανοιχτά και συγχρόνως κλειστά) υποσύνολα. Διαχωρισμένα $f(a)$ και $f(b)$ στο πεδίο τιμών $\Rightarrow$ διαχωρισμένα a και b στο πεδίο ορισμού (εννοείται: αν η f είναι συνεχής). Διαχωρισμένα στο χώρο $\Rightarrow$ διαχωρισμένα σε κάθε υπόχωρο. Εικόνα συνεκτικού είναι συνεκτικό (εννοείται: εικόνα μέσω κάποιας συνεχούς f). Συνεκτικότητα και (τεμνόμενες) ενώσεις. Συνεκτικότητα και γινόμενα.

Διάλεξη 10: Τα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι ακριβώς τα συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Το (γενικευμένο) Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής. Πότε ο X λέγεται Κατά Δρόμους Συνεκτικός (ΚΔΣ). Κυρτό $\Rightarrow$ ΚΔΣ, ειδικότερα ο $\mathbb{R}^n$ είναι ΚΔΣ ($n = 1, 2, \ldots$). Ο $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ είναι ΚΔΣ ($n = 2, 3, \ldots$). ΚΔΣ $\Rightarrow$ συνεκτικός, εν συντομία το γιατί δεν ισχύει το αντίστροφο («χτένα του τοπολόγου»). Συνεκτικότητα των $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, \ldots$) και $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ($n = 2, 3, \ldots$). Ο $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ δεν είναι ΚΔΣ. Το «ΚΔΣ $\Rightarrow$ συνεκτικός» ισχύει και αντιστρόφως για ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

Διάλεξη 11: Τοπικά σταθερές συναρτήσεις σε συνεκτικούς χώρους είναι σταθερές. Τοπικά ΚΔΣ χώροι και γιατί το «ΚΔΣ $\Rightarrow$ συνεκτικός» ισχύει και αντιστρόφως για τέτοιους χώρους. Διαισθητική εισαγωγή στούς χώρους-πηλίκο. Τι σημαίνει η φράση «η $q : X \to Y$ είναι απεικόνιση-πηλίκου» και πώς αυτό είναι «κατά κάποιο τρόπο το αντίστροφο του η q είναι συνεχής». Ανοιχτές και κλειστές συναρτήσεις και η σχέση με αντιστρέψιμες συναρτήσεις.

Διάλεξη 12: Παραδείγματα ανοιχτών και κλειστών συναρτήσεων. Οι ανοιχτές συνεχείς συναρτήσεις είναι απεικονίσεις-πηλίκου. Οι κλειστές συνεχείς συναρτήσεις είναι απεικονίσεις-πηλίκου. Η Θεμελιώδης Ιδιότητα του

Χώρου-Πηλίκου. Το Σύνολο-Πηλίκου και ο Χώρος-Πηλίκου ως προς μια σχέση ισοδυναμίας. Παραδείγματα.

Διάλεξη 13: Η Ξένη Ένωση $\coprod X_i$ των χώρων X_i, η ένθεση $\phi_j : X_j \to \coprod X_i$, η Θεμελιώδης Ιδιότητα της Ξένης Ένωσης.

Μέρος Β: Επιφάνειες

Διάλεξη 13 (συνέχεια): Τοπολογικές πολλαπλότητες διάστασης n (πιο σύντομα: n-πολλαπλότητες), τοπικές συντεταγμένες, χάρτες, τοπικές παραμετρήσεις, η στερεογραφική προβολή. Το «τοπικά Ευκλείδειος» είναι πράγματι μια τοπική ιδιότητα, δηλαδή ισχύει σε αυθαίρετα μικρές περιοχές. Καμπύλες, Επιφάνειες, η Κατάταξη των Καμπυλών.

Διάλεξη 14: Γινόμενα πολλαπλοτήτων. Ο Προβολικός Χώρος $\mathbb{R}P^n$, και γιατί είναι συμπαγής συνεκτική n-πολλαπλότητα. Η Προβολική Ευθεία $\mathbb{R}P^1$.

Διάλεξη 15: Το Προβολικό Επίπεδο $\mathbb{R}P^2$. Παραδείγματα χώρων πηλίκου που σχηματίζονται «ράβοντας στο σύνορο», ειδικότερα ότι το προβολικό επίπεδο είναι αυτό που θα πάρω αν «ράψω» μια ταινία του Möbius και ένα δίσκο κατά μήκος του κύκλου που είναι το κοινό τους σύνορο.

Διάλεξη 16: Τι σημαίνει ότι η επιφάνεια M''' είναι το συνεκτικό άθροισμα των επιφανειών M' και M'' (με σύμβολα: $M''' \cong M' \sharp M''$). Η επιφάνεια

$$M_g = \underbrace{M_1 \sharp M_1 \sharp \cdots \sharp M_1}_{g} \quad (M_1 = S^1 \times S^1)$$

γένους g και η επιφάνεια

$$N_h = \underbrace{N_1 \sharp N_1 \sharp \cdots \sharp N_1}_{h} \quad (N_1 = \mathbb{R}P^2),$$

διατύπωση του Θεωρήματος Κατάταξης των Συμπαγών Συνεκτικών Επιφανειών (ΘΚΣΣΕ). «Σύμβολα» και οι επιφάνειες που καθορίζουν. Σύμβολα και συνεκτικά αθροίσματα, το παράδειγμα του M_2 (δηλαδή ότι η M_2 καθορίζεται από το σύμβολο $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}$).

Διάλεξη 17: Το παράδειγμα του N_2 (δηλαδή ότι η N_2 καθορίζεται από το σύμβολο $\alpha\alpha\beta\beta$), $N_2 \cong K^2$ (όπου με K^2 συμβολίζουμε τη φιάλη του Klein), $M_1 \sharp N_1 \cong N_3$, $M_g \sharp N_h \cong N_{2g+h}$, τοπολογικά τρίγωνα, τριγωνιοποιήσεις.

Διάλεξη 18: Τριγωνιοποιήσεις επιφανειών. Παραδείγματα κατασκευής, δεδομένης τριγωνιοποίησης της επιφάνειας M με n τρίγωνα, ενός συμβόλου ξ πάνω σε ένα $(n+2)$-γωνο έτσι ώστε $S(\xi) \cong M$.

Διάλεξη 19: Περισσότερες λεπτομέρειες για το γιατί η κατασκευή $S(\xi) \cong M$ της προηγούμενης διάλεξης είναι πάντα δυνατή.

Διάλεξη 20: Ονομάσαμε δυο σύμβολα «ισοδύναμα» στην περίπτωση που καθορίζουν τοπολογικά ισόμορφες επιφάνειες. Είδαμε παραδείγματα ισοδυνάμων συμβόλων. Αρχίσαμε την απόδειξη της ύπαρξης στο ΘΚΣΣΕ.

Διάλεξη 21: Ολοκλήρωση της απόδειξης της ύπαρξης στο ΘΚΣΣΕ.