Σημειώσεις μαθήματος Μ1212

# Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Χρήστος Κουρουνιώτης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

2014

# Κεφάλαιο 1

# Διανυσματικοί Χώροι

Στο εισαγωγικό μάθημα Γραμμικής Άλγεβρας ξεκινήσαμε μελετώντας συστήματα εξισώσεων πρώτου βαθμού, και σιγά-σιγά, χρησιμοποιώντας ως βασικό εργαλείο την απαλοιφή Gauss, χτίσαμε ένα αρκετά πολύπλοκο οικοδόμημα:

- διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$ και πράξεις με διανύσματα
- πίνακες και πράξεις με πίνακες
- παραγοντοποίηση και αντιστροφή πινάκων
- γραμμικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$
- γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία
- διάσταση γραμμικού υπόχωρου
- τάξη πίνακα
- θεμελιώδεις υπόχωροι ενός πίνακα, και βάσεις τους
- γραμμικές απεικονίσεις
- ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα
- ορθογωνιότητα

Όμως όλα αυτά είναι απόλυτα συγκεκριμένα: αναφέρονται σε $n$-άδες πραγματικών αριθμών. Ποιές είναι οι θεμελιώδεις ιδιότητες, που είναι απαραίτητες για να αναπτύξουμε τη θεωρία, και ποιές είναι απλώς ιδιαιτερότητες των $n$-άδων πραγματικών αριθμών, που δεν επηρεάζουν ουσιαστικά το οικοδόμημα;

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τη βασική διαδικασία της απαλοιφής Gauss, χρειάζεται να μπορούμε να προσθέτουμε διανύσματα και να τα πολλαπλασιάζουμε ή να τα διαιρούμε με αριθμούς. Υπάρχουν άλλα μαθηματικά αντικείμενα με τα οποία μπορούμε να κάνουμε αυτές τις πράξεις; Εύκολα βρίσκουμε κάποια παραδείγματα:

- πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές: εάν $p(x)$ και $q(x)$ είναι πολυώνυμα, και $c$ είναι πραγματικός αριθμός, τότε $p(x)+q(x)$ και $cp(x)$ είναι επίσης πολυώνυμα.

- ακολουθίες πραγματικών αριθμών: εάν $a_n$ και $b_n$ είναι ακολουθίες, $a_n + b_n$ και $ca_n$ είναι επίσης ακολουθία.
- συναρτήσεις από ένα σύνολο $X$ στους πραγματικούς αριθμούς: εάν $f : X \to \mathbb{R}$ και $g : X \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις, τότε $f + g$, που ορίζεται ως $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, και $cf$, που ορίζεται ως $(cf)(x) = cf(x)$, είναι επίσης συναρτήσεις από το $X$ στο $\mathbb{R}$.

Θα μπορούσαμε, αντί για τους πραγματικούς αριθμούς, να χρησιμοποιήσουμε τους ακέραιους ή τους μιγαδικούς; Με τους ακέραιους δεν θα μπορούσαμε να κάνουμε διαίρεση, που είναι απαραίτητη στην απαλοιφή Gauss. Ποιές ιδιότητες των πραγματικών χρειαζόμαστε; Αν σκεφτούμε λίγο, βλέπουμε οτι για την απαλοιφή Gauss χρησιμοποιούμε όλες τις συνηθισμένες ιδιότητες των τεσσάρων πράξεων της αριθμητικής, αλλά δεν χρησιμοποιούμε τη διάταξη των πραγματικών αριθμών. Χρησιοποιούμε τις ιδιότητες ενός *αλγεβρικού σώματος*.

## Αλγεβρικά σώματα

Ένα **αλγεβρικό σώμα** είναι ένα σύνολο $\mathbb{K}$ στο οποίο ορίζονται δύο διμελείς πράξεις, τις οποίες ονομάζουμε **πρόσθεση** και **πολλαπλασιασμό**,

$$(a, b) \mapsto a + b \quad \text{και} \quad (a, b) \mapsto ab$$

και οι οποίες ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα.

ΑΣ1. Η προσεταιριστική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό: για κάθε $a, b, c \in \mathbb{K}$, ισχύουν

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad , \quad (ab)c = a(bc)$$

ΑΣ2. Η αντιμεταθετική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό: για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$, ισχύουν

$$a + b = b + a \quad , \quad ab = ba$$

ΑΣ3. Η επιμεριστική ιδιότητα της πρόσθεσης ως προς τον πολλαπλασιασμό: για κάθε $a, b, c \in \mathbb{K}$, ισχύει

$$a(b + c) = ab + ac$$

ΑΣ4. Υπάρχουν στοιχεία $0 \in \mathbb{K}$ και $1 \in \mathbb{K}$, τέτοια ώστε για κάθε $a \in \mathbb{K}$,

$$a + 0 = a \quad \text{και} \quad a1 = a$$

ΑΣ5. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $b \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $a + b = 0$. Το μοναδικό στοιχείο $b$ με αυτή την ιδιότητα συμβολίζεται $-a$ και ονομάζεται *αντίθετο* του $a$.

ΑΣ6. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, υπάρχει μοναδικό $b \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $ab = 1$. Το μοναδικό στοιχείο $b$ με αυτή την ιδιότητα συμβολίζεται $a^{-1}$ και ονομάζεται *αντίστροφο* του $a$.

**Παράδειγμα 1.1** Οι ρητοί αριθμοί, $\mathbb{Q}$, οι πραγματικοί αριθμοί, $\mathbb{R}$, και οι μιγαδικοί αριθμοί, $\mathbb{C}$, με τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αποτελούν αλγεβρικά σώματα. Οι ακέραιοι αριθμοί δεν αποτελούν σώμα, καθώς δεν ικανοποιείται το αξίωμα (ΑΣ6).

**Παράδειγμα 1.2** Το σύνολο $\mathbb{Z}_3$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 3 με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό modulo 3 (δες Θεμέλια των Μαθηματικών, Κεφάλαιο 2), αποτελεί ένα σώμα. Γενικότερα, για κάθε πρώτο αριθμό $p$, το σύνολο $\mathbb{Z}_p$ των κλάσεων υπολοίπων modulo $p$ αποτελεί ένα σώμα.

**Άσκηση 1.1** Αποδείξτε οτι το σύνολο $\mathbb{Z}_6$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 6, δεν είναι αλγεβρικό σώμα.
Υπόδειξη: Εξετάστε εάν το στοιχείο $3_6$ έχει αντίστροφο.

**Παράδειγμα 1.3** Το σύνολο των ρητών αριθμών επεκτεταμένο με την τετραγωνική ρίζα του 2, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a,\, b \in \mathbb{Q}\}$, αποτελεί ένα σώμα.

**Άσκηση 1.2** Επαληθεύσατε οτι οι πράξεις της πρόθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι καλά ορισμένες στο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, δηλαδή οτι το άθροισμα και το γινόμενο δύο στοιχείων του $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ είναι επίσης στοιχείο του $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Βρείτε το αντίστροφο του $a + b\sqrt{2}$ όταν $b \neq 0$.

Θα δούμε πώς χρησιμοποιώντας τα αξιώματα μπορούμε να αποδείξουμε άλλες ιδιότητες ενός σώματος.

**Λήμμα 1.1** *Σε ένα σώμα $\mathbb{K}$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $0a = a0 = 0$.*
2. *Εάν $a,\, b \in \mathbb{K}$ και $ab = 0$, τότε είτε $a = 0$ είτε $b = 0$.*
3. *Για κάθε $a,\, b \in \mathbb{K}$ ισχύει $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.*

**Απόδειξη.** 1. Αφού $0 = 0 + 0$, έχουμε $0a = (0 + 0)a$, και από την επιμεριστική ιδιότητα $0a = 0a + 0a$. Προσθέτουμε και στις δύο πλευρές το αντίθετο του $0a$, και έχουμε

$$\begin{aligned} 0a + (-0a) &= (0a + 0a) + (-0a) \\ 0 &= 0a + (0a + (-0a)) \\ 0 &= 0a + 0 \\ 0 &= 0a\,. \end{aligned}$$

Από την αντιμεταθετική ιδιότητα έχουμε επίσης $0 = a0$.
2. Έστω $ab = 0$ και $a \neq 0$. Τότε, από τα αξιώματα (ΑΣ6) και (ΑΣ1), έχουμε $a^{-1}(ab) = (aa^{-1})b = 1b = b$. Αλλά αφού $ab = 0$, από το (1) έχουμε $a^{-1}(ab) = a0 = 0$. Άρα $b = 0$.
3. Από το αξίωμα (ΑΣ3) έχουμε $ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a0 = 0$. Άρα $a(-b)$ είναι το αντίθετο του $ab$, το $-(ab)$, και παρόμοια για το $(-a)b$.

□

# Αξιώματα Διανυσματικού Χώρου

Θεωρούμε ένα αλγεβρικό σώμα $\mathbb{K}$. Ένα σύνολο $V$, με δύο πράξεις

$$\alpha : V \times V \to V \qquad \alpha(v, w) = v \dotplus w$$

και

$$\mu : \mathbb{K} \times V \to V \qquad \mu(a, v) = a \cdot v$$

ονομάζεται **διανυσματικός χώρος πάνω από το** $\mathbb{K}$ εάν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα.

ΔΧ1. Για κάθε $v, w \in V$, $\quad v \dotplus w = w \dotplus v$.

ΔΧ2. Για κάθε $v, w, u \in V$, $\quad (v \dotplus w) \dotplus u = v \dotplus (w \dotplus u)$.

ΔΧ3. Υπάρχει στοιχείο $\bar{0} \in V$ τέτοιο ώστε, για κάθε $v \in V$, $\quad v \dotplus \bar{0} = v$.

ΔΧ4. Για κάθε $v \in V$ υπάρχει $w \in V$ τέτοιο ώστε $u \dotplus w = \bar{0}$.

ΔΧ5. Για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$ και $v \in V$, $\quad a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$.

ΔΧ6. Για κάθε $v \in V$ ισχύει $1 \cdot v = v$.

ΔΧ7. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$ και $v, w \in V$, $\quad a \cdot (v \dotplus w) = a \cdot v \dotplus a \cdot w$.

ΔΧ8. Για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$ και $v, \in V$, $\quad (a + b) \cdot v = a \cdot v \dotplus b \cdot v$.

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου ονομάζονται **διανύσματα**.

**Παράδειγμα 1.4** Τα σύνολα $\mathbb{R}^n$ για $n = 1, 2, 3, \ldots$, με τις συνηθισμένες πράξεις, είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Τα σύνολα $\mathbb{C}^n$ για $n = 1, 2, 3, \ldots$, με τις συνηθισμένες πράξεις, είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.

**Παράδειγμα 1.5** Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συμβολίζεται $C^0(\mathbb{R})$. Σε αυτό ορίζουμε την πρόσθεση δύο συναρτήσεων κατά σημείο, $(f \dotplus g)(x) = f(x) + g(x)$, και τον πολλαπλασιασμό μίας συνάρτησης με έναν αριθμό επίσης κατά σημείο $(c \cdot f)(x) = cf(x)$. Είναι γνωστό οτι εάν $f$ και $g$ είναι συνεχείς, τότε $f \dotplus g$ και $c \cdot f$ είναι επίσης συνεχείς. Το σύνολο $C^0(\mathbb{R})$ με αυτές τις πράξεις είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.

**Παράδειγμα 1.6** Θεωρούμε το σύνολο των γεωμετρικών διανυσμάτων στο επίπεδο με σημείο εφαρμογής στο $O$ (δες τις σημειώσεις του μαθήματος Επίπεδο και Χώρος, Κεφάλαιο 1). Σε αυτό το σύνολο, το οποίο συμβολίζουμε $T_O E^2$, ορίζεται το άθροισμα γεωμετρικών διανυσμάτων, $\vec{v} + \vec{w}$, και το γινόμενο ενός γεωμετρικού διανύσματος με έναν αριθμό, $c\vec{v}$. Με αυτές τις πράξεις $T_O E^2$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$, και ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος του $E^2$ στο σημείο $O$.

**Παράδειγμα 1.7** Ας δούμε κάποια παραδείγματα συνόλων που δεν είναι διανυσματικοί χώροι.

1. Το ημιεπίπεδο $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Το άθροισμα δύο στοιχείων του $\mathcal{H}$ ορίζεται κανονικά. Όμως δεν υπάρχει το αντίθετο ενός στοιχείου: το $(-x, -y)$ δεν ανήκει στο $\mathcal{H}$.

2. Το σύνολο των σημείων στο επίπεδο με ακέραιες συντεταγμένες, $\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Εδώ ορίζεται η πρόσθεση και ικανοποιούνται τα αξιώματα ΔΧ1, …, ΔΧ4. Όμως δεν ορίζεται ο πολλαπλασιασμός με μή ακέραιο αριθμό: $\frac{1}{2} \cdot (3, 5) \notin \mathbb{Z}^2$.

# Πρώτα αποτελέσματα από τα αξιώματα.

Το μηδενικό διάνυσμα ενός χώρου είναι μοναδικό, όπως βλέπουμε εάν υποθέσουμε οτι $\tilde{0}$ είναι ένα στοιχείο με την ιδιότητα (ΔΧ3). Τότε $\tilde{0} = \bar{0} \dot{+} \tilde{0} = \bar{0}$.

**Λήμμα 1.2** *Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο $V$ πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, με πράξεις $\dot{+}$ και $\cdot$.*

1. *Το γινόμενο ενός αριθμού $a \in \mathbb{K}$, και ενός διανύσματος $v \in V$, είναι το μηδενικό διάνυσμα εάν και μόνον εάν $a = 0$ ή $v = 0$.*

   *Πιο αναλυτικά, για κάθε $v \in V$, $0 \cdot v = \bar{0}$, και για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $a \cdot \bar{0} = \bar{0}$, και αντίστροφα, για κάθε $a \in \mathbb{K}$ και για κάθε $v \in V$, εάν $a \cdot v = \bar{0}$, τότε $a = 0$ ή $v = \bar{0}$.*

2. *Το αντίθετο ενός διανύσματος $v \in V$ είναι μοναδικό, και ίσο με $(-1) \cdot v$.*

**Απόδειξη.** Για το 1, θεωρούμε ένα διάνυσμα $v \in V$, και τον αριθμό μηδέν, $0 \in \mathbb{K}$. Θα δείξουμε οτι $0 \cdot v = \bar{0}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \cdot v &= (0 + 0) \cdot v \\ &= 0 \cdot v \dot{+} 0 \cdot v \end{aligned}$$

Έστω $w$ ένα αντίθετο του διανύσματος $0 \cdot v$, δηλαδή $0 \cdot v \dot{+} w = \bar{0}$. Τότε

$$\begin{aligned} \bar{0} &= 0 \cdot v \dot{+} w \\ &= (0 \cdot v \dot{+} 0 \cdot v) \dot{+} w \\ &= 0 \cdot v \dot{+} (0 \cdot v \dot{+} w) \\ &= 0 \cdot v \dot{+} \bar{0} \\ &= 0 \cdot v \end{aligned}$$

Θεωρούμε έναν αριθμό $a \in \mathbb{K}$, και το μηδενικό διάνυσμα $\bar{0} \in V$. Θα δείξουμε οτι $a \cdot \bar{0} = \bar{0}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} a \cdot \bar{0} &= a \cdot (\bar{0} \dot{+} \bar{0}) \\ &= a \cdot \bar{0} \dot{+} a \cdot \bar{0} \end{aligned}$$

Έστω $u$ ένα αντίθετο του διανύσματος $a\cdot\bar{0}$, δηλαδή $a\cdot\bar{0}+u=\bar{0}$. Τότε

$$\begin{aligned}\bar{0} &= a\cdot\bar{0}\dot{+}u\\ &= (a\cdot\bar{0}\dot{+}a\cdot\bar{0})\dot{+}u\\ &= a\cdot\bar{0}\dot{+}(a\cdot\bar{0}\dot{+}u)\\ &= a\cdot\bar{0}\dot{+}\bar{0}\\ &= a\cdot\bar{0}\end{aligned}$$

Αντίστροφα, εάν $a\neq 0$ και $a\cdot v=\bar{0}$, τότε

$$v=1\cdot v=(a^{-1}a)\cdot v=a^{-1}\cdot(a\cdot v)=a^{-1}\cdot\bar{0}=\bar{0}\,.$$

Για το 2, υποθέτουμε οτι $w$ και $w'$ είναι αντίθετα του $v\in V$, και θα δείξουμε οτι $w=w'$. Έχουμε οτι $v\dot{+}w=\bar{0}=v\dot{+}w'$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}w &= w\dot{+}\bar{0}\\ &= w\dot{+}(v\dot{+}w')\\ &= (w\dot{+}v)\dot{+}w'\\ &= (v\dot{+}w)\dot{+}w'\\ &= \bar{0}\dot{+}w'\\ &= w'\dot{+}\bar{0}\\ &= w'\end{aligned}$$

Τώρα δείχνουμε οτι το γινόμενο $(-1)\cdot v$ είναι αντίθετο του $v$:

$$\begin{aligned}v\dot{+}((-1)\cdot v) &= (1\cdot v)\dot{+}((-1)\cdot v)\\ &= (1+(-1))\cdot v\\ &= 0\cdot v\\ &= \bar{0}\end{aligned}$$

Το μοναδικό αντίθετο του $v$ συμβολίζουμε $-v$.

□

# Γενικά παραδείγματα διανυσματικών χώρων πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$.

**Παράδειγμα 1.8 Διατεταγμένες $n-$άδες στοιχείων του σώματος $\mathbb{K}$, ή ενός διανυσματικού χώρου $V$ πάνω από το $\mathbb{K}$.**

Θεωρούμε το σύνολο των διατεταγμένων $n$-άδων στοιχείων του $\mathbb{K}$,

$$\mathbb{K}^n=\{(x_1,\ldots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{K},\, i=1,\ldots,n\}.$$

Οι πράξεις ορίζονται κατά συνιστώσα, δηλαδή εάν $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{K}^n$ και $a\in\mathbb{K}$,

$$x\dot{+}y=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$

και

$$a \cdot x = (ax_1, \ldots, ax_n)$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι το $\bar{0} = (0, \ldots, 0)$. Η ισχύς των αξιωμάτων του διανυσματικού χώρου αποδεικνύεται εύκολα με χρήση των αντίστοιχων αξιωμάτων ενός σώματος. Τα στοιχεία του $\mathbb{K}^n$ θα τα λέμε *αριθμητικά διανύσματα*.

Παρόμοια, εάν $V$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$,

$$V^n = \{(v_1, \ldots, v_n) \mid v_i \in V, i = 1, \ldots n\}$$

είναι επίσης διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Οι πράξεις ορίζονται κατά συνιστώσα, χρησιμοποιώντας τις πράξεις του $V$: εάν $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in V^n$ και $a \in \mathbb{K}$, τότε

$$v \dot{+} u = (v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n)$$

και

$$a \cdot v = (av_1, \ldots, av_n)$$

**Παράδειγμα 1.9 Ακολουθίες με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$ ή σε ένα διανυσματικό χώρο $V$ πάνω από το $\mathbb{K}$.**

Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathbb{K}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{K}, i \in \mathbb{N}\}.$$

Οι πράξεις ορίζονται *κατά συνιστώσα*: εάν $(x) = (x_1, x_2, \ldots)$ και $(y) = (y_1, y_2, \ldots)$, και $a \in \mathbb{K}$, τότε

$$(x) \dot{+} (y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$$

και

$$a(x) = (ax_1, ax_2, \ldots).$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι η ακολουθία $\bar{0} = (0, 0, \ldots)$.

Παρόμοια, εάν $V$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$,

$$V^\infty = \{(v_1, v_2, \ldots) \mid v_i \in V, i \in \mathbb{N}\},$$

με πράξεις κατά συνιστώσα, είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$.

**Παράδειγμα 1.10 Απεικονίσεις από ένα σύνολο $A$ στο σώμα $\mathbb{K}$, ή σε ένα διανυσματικό χώρο $V$ πάνω από το $\mathbb{K}$.**

Το σύνολο όλων των απεικονίσεων από το $A$ στο $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathbb{K}^A$. Εάν $f, g \in \mathbb{K}^A$ και $a \in \mathbb{K}$, ορίζουμε τις απεικονίσεις $f \dot{+} g$ και $a \cdot f$ οι οποίες, για κάθε $x \in A$, ικανοποιούν

$$\begin{aligned} (f \dot{+} g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (a \cdot f)(x) &= af(x) \end{aligned}$$

Με αυτές τις πράξεις, τις οποίες ονομάζουμε *πρόσθεση* και *πολλαπλασιασμό κατά σημείο*, το σύνολο $\mathbb{K}^A$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Μηδενικό διάνυσμα είναι η σταθερή απεικόνιση $\bar{0} : A \to \mathbb{K}$, για την οποία $\bar{0}(x) = 0$ για κάθε $x \in A$. Ανάλογα ορίζεται η δομή διανυσματικού χώρου στο σύνολο $V^A$ όλων των απεικονίσεων από το σύνολο $A$ στο διανυσματικό χώρο $V$.

**Παράδειγμα 1.11 Πολυώνυμα με συντελεστές στο $\mathbb{K}$, με μία ή περισσότερες μεταβλητές.**

Ένα πολυώνυμο μίας μεταβλητής $x$ με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ είναι ένα τυπικό άθροισμα

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n, \qquad a_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n \text{ και } a_n \neq 0\,.$$

Το σύνολο όλων των πολυωνύμων μίας μεταβλητής $x$ με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathbb{K}[x]$. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το συμβολισμό $\mathbb{K}[x]_n$ για τα πολυώνυμα μίας μεταβλητής $x$ βαθμού ίσου ή μικρότερου από $n$. Όταν δεν χρειάζεται να διακρίνουμε το σώμα των συντελεστών, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $\mathbb{P}$ ή $\mathbb{P}_n$.

Η πρόσθεση πολυωνύμων και ο πολλαπλασιασμός με αριθμό ορίζονται όπως συνήθως. Όταν μελετάμε το σύνολο των πολυωνύμων ως διανυσματικό χώρο, δεν μας απασχολεί ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων. Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{K}[x]$ είναι το πολυώνυμο $\bar{0}$, στο οποίο όλοι οι συντελεστές είναι 0.

Ανάλογα ορίζονται χώροι πολυωνύμων με περισσότερες μεταβλητές. Για παράδειγμα ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών, $x$ και $y$, είναι ένα τυπικό άθροισμα

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} a_{ij}x^iy^j\,.$$

**Παράδειγμα 1.12 Τυπικές δυναμοσειρές, με μία ή περισσότερες μεταβλητές και συντελεστές στο $\mathbb{K}$.**

Μία δυναμοσειρά μίας μεταβλητής $t$, με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ είναι ένα τυπικό άθροισμα

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_it^i\,, \qquad a_i \in \mathbb{K}\,, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Το σύνολο όλων των δυναμοσειρών μίας μεταβλητής $t$ με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathbb{K}(t)$.

Η πρόσθεση δυναμοσειρών και ο πολλαπλασιασμός με αριθμό $c \in \mathbb{K}$, ορίζονται ως εξής

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_it^i\right) \dot{+} \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_jt^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)t^k$$

$$c \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_it^i\right) = \sum_{j=0}^{\infty} (ca_j)t^j.$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι η δυναμοσειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} 0t^i.$$

**Παράδειγμα 1.13 Τυπικά αθροίσματα στοιχείων ενός συνόλου $X$ με συντελεστές στο $\mathbb{K}$, ή σε ένα διανυσματικό χώρο $V$ πάνω από το $\mathbb{K}$.**
Θεωρούμε ένα σύνολο $X$ και τα τυπικά αθροίσματα

$$\sum_{x\in X} a_x x\,, \qquad a_x \in \mathbb{K}$$

Η πρόσθεση ορίζεται μέσω της πρόσθεσης των συντελεστών ομοίων όρων :

$$\sum_{x\in X} a_x x \dotplus \sum_{x\in X} b_x x = \sum_{x\in X}(a_x + b_x)x,$$

ενώ ο πολλαπλασιασμός με τον αριθμό $c \in \mathbb{K}$, μέσω του πολλαπλασιασμού των συντελεστών:

$$c \cdot \sum_{x\in X} a_x x = \sum_{x\in X}(ca_x)x.$$

Το μηδενικό διάνυσμα είναι το τυπικό άθροισμα με όλους τους συντελεστές ίσους με 0,

$$\bar{0} = \sum_{x\in X} 0x.$$

**Παράδειγμα 1.14** Το σύνολο όλων των γεωμετρικών διανυσμάτων στο επίπεδο, με σημείο εφαρμογής σε οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου, δεν αποτελεί διανυσματικό χώρο το ίδιο, αφού η πρόσθεση δύο γεωμετρικών διανυσμάτων ορίζεται μόνον όταν αυτά έχουν το ίδιο σημείο εφαρμογής. Στο Επίπεδο και Χώρος έχουμε δεί οτι έαν σε αυτό το σύνολο ορίσουμε τη σχέση ισοδυναμίας που προκύπτει από την παράλληλη μεταφορά, τότε οι κλάσεις ισοδυναμίας αποτελούν τα 'ελεύθερα διανύσματα' πάνω στα οποία ορίζεται η δομή ενός διανυσματικού χώρου.

Θεωρούμε τώρα απεικονίσεις οι οποίες απεικονίζουν κάθε σημείο $X$ του επιπέδου $E^2$ σε ένα γεωμετρικό διάνυσμα $\overrightarrow{XA} \in T_X E^2$, δηλαδή απεικονίσεις της μορφής $f : E^2 \longrightarrow \bigcup_{X\in E^2} T_X E^2$ για τις οποίες ισχύει $f(X) \in T_X E^2$. Αυτές τις συναρτήσεις μπορούμε να τις προσθέσουμε μεταξύ τους (και να τις πολλαπλασιάσουμε με αριθμό) κατά σημείο:

$$(f \dotplus g)(X) = f(X) + g(X) = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$$

όπου το τελευταίο άθροισμα ορίζεται στο διανυσματικό χώρο $T_X E^2$. Τέτοιες απεικονίσεις ονομάζονται **διανυσματικά πεδία** στο $E^2$ και αποτελούν σημαντικά αντικείμενα τόσο στα Μαθηματικά όσο και στη Φυσική. Το σύνολο των διανυσματικών πεδίων στο $E^2$ αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς.

# Γραμμικοί υπόχωροι

**Ορισμός.** Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο $V$ πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και ένα μη κενό υποσύνολο $X$ του $V$. Το $X$ λέγεται **γραμμικός υπόχωρος** του $V$ (ή **διανυσματικός υπόχωρος** του $V$) εάν

1. Το $X$ είναι κλειστό ως πρός την πρόθεση διανυσμάτων,
$$v,\, w \in X \Rightarrow v + w \in X\,.$$
2. Το $X$ είναι κλειστό ως πρός τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό,
$$v \in X,\, a \in \mathbb{K} \Rightarrow av \in X\,.$$

**Λήμμα 1.3** *Εάν $X$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $V$, τότε το $X$, με τους περιορισμούς των πράξεων του $V$,*
$$\begin{aligned} \alpha|_{X\times X} &: X \times X \to X \\ \mu|_{\mathbb{K}\times X} &: \mathbb{K} \times X \to X \end{aligned}$$
*είναι διανυσματικός χώρος.*

**Απόδειξη.** Ελέγχουμε οτι, εάν το υποσύνολο $X$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του $V$, τότε ικανοποιούνται τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου. Τα αξιώματα ΔΧ1, ΔΧ2, ΔΧ5, ΔΧ7 και ΔΧ8 ισχύουν για στοιχεία του $X$, αφού ισχύουν για όλα τα στοιχεία του $V$. Για να δείξουμε οτι το $\bar{0}$ ανήκει στο $X$, (ΔΧ3), παρατηρούμε οτι για οποιοδήποτε $v \in X$, $0 \cdot v = \bar{0}$, άρα $\bar{0} \in X$. Για να δείξουμε οτι το αντίθετο ενός στοιχείου του $X$ ανήκει στο $X$, παρατηρούμε οτι αυτό είναι ίσο με $(-1) \cdot v$.

□

**Παράδειγμα 1.15** Στο $\mathbb{R}^2$, ταυτισμένο με το καρτεσιανό επίπεδο, γραμμικοί υπόχωροι είναι το σύνολο $\{(0,\, 0)\}$ (ο μηδενικός υπόχωρος), όλες οι ευθείες που περιέχουν το $(0,\, 0)$, δηλαδή υποσύνολα της μορφής
$$X = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\right\}\,,$$
και ολόκληρο το επίπεδο $\mathbb{R}^2$.

**Παράδειγμα 1.16** Σε ένα διανυσματικό χώρο $V$, για κάθε $v \in V$ το σύνολο $\{a\,v \mid a \in \mathbb{K}\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος.

**Παράδειγμα 1.17** Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^\infty$ των ακολουθιών στους πραγματικούς αριθμούς, το υποσύνολο των ακολουθιών που είναι τελικά ίσες με μηδέν είναι γραμμικός υπόχωρος, (η ακολουθία $(x_1,\, x_2, \ldots)$ είναι τελικά ίση με μηδέν εάν υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n > M \Rightarrow x_n = 0$).

Εάν $X$ και $Y$ είναι δύο γραμμικοί υπόχωροι του διανυσματικού χώρου $V$, είναι τα σύνολα $X \cup Y$ και $X \cap Y$ γραμμικοί υπόχωροι; Ας εξετάσουμε κάποια παραδείγματα.

Εάν $V$ είναι ο χώρος $\mathbb{R}^3$, και $X$, $Y$ είναι δύο διαφορετικές ευθείες που περιέχουν το 0, είναι η ένωση $X \cup Y$ γραμμικός υπόχωρος;

Εάν $X$ αποτελείται από το διάνυσμα $(1,\, 1,\, 2)$ και όλα τα πολλαπλάσιά του, $X = \{a(1,\, 1,\, 2) \mid a \in \mathbb{R}\}$, και $Y$ αποτελείται από όλα τα πολλαπλάσια του $(1,\, 1,\, 0)$, $Y = \{a(1,\, 1,\, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$, τότε $(1,\, 1,\, 2) + (1,\, 1,\, 0) = (2,\, 2,\, 2)$. Αλλά το διάνυσμα $(2,\, 2,\, 2)$

δεν ανήκει ούτε στο $X$, ούτε στο $Y$. Συμπεραίνουμε ότι $X \cup Y$ δεν είναι υποχρεωτικά γραμμικός υπόχωρος.

Εάν τώρα $U$ και $W$ είναι δύο διαφορετικά επίπεδα στο $\mathbb{R}^3$, τα οποία περιέχουν το 0, είναι η τομή $U \cap W$ γραμμικός υπόχωρος;

Υποθέτουμε οτι

$$U = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\right\}\,,$$

και

$$W = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y = 0\right\}\,.$$

Τότε η τομή των δύο επιπέδων $U \cap W = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\, 2x + 3y = 0\}$ είναι μία ευθεία. Εύκολα βλέπουμε οτι αποτελείται από τα σημεία για τα οποία $x = 0$ και $y = 0$, δηλαδή αποτελείται από τα πολλαπλάσια του διανύσματος $(0,\, 0,\, 1)$, και είναι υπόχωρος του $V$.

**Λήμμα 1.4** *Εάν $X$, $Y$ είναι γραμμικοί υπόχωροι του $V$, τότε $X \cap Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος.*

**Απόδειξη.** Εάν $v,\, w \in X \cap Y$, τότε $v,\, w \in X$ και αφού $X$ είναι γραμμικός υπόχωρος, $v + w \in X$, και για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $av \in X$. Παρόμοια, $v,\, w \in Y$ και συνεπώς $v + w \in Y$ και $av \in Y$ για κάθε $a \in \mathbb{K}$. Συμπεραίνουμε οτι $v + w \in X \cap Y$, και $av \in X \cap Y$ για κάθε $a \in \mathbb{K}$, δηλαδή οτι $X \cap Y$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με αριθμό, και συνεπώς είναι γραμμικός υπόχωρος του $V$.

□

# Γραμμικοί Συνδυασμοί

Εάν $v_1, \ldots, v_k$ είναι διανύσματα του $V$, ένας **γραμμικός συνδυασμός** των $v_1, \ldots, v_k$ είναι ένα άθροισμα της μορφής $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k$, όπου οι συντελεστές $a_1,\, a_2, \ldots,\, a_k$ ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$ πάνω από το οποίο ορίζεται ο $V$.

**Παράδειγμα 1.18** Κάθε διάνυσμα $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$, εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $e_1 = (1,\, 0,\, 0)$, $e_2 = (0,\, 1,\, 0)$ και $e_3 = (0,\, 0,\, 1)$:

$$(x,\, y,\, z) = x(1,\, 0,\, 0) + y(0,\, 1,\, 0) + z(0,\, 0,\, 1)\,.$$

**Παράδειγμα 1.19** Κάθε πολυώνυμο βαθμού $n$ στο $\mathbb{K}[x]$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $n + 1$ μονωνύμων $p_0(x) = x^0$, $p_1(x) = x^1$, $\ldots$, $p_n(x) = x^n$,

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n.$$

**Παράδειγμα 1.20** Εάν $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ είναι δύο μη συγγραμμικά γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο $E^2$, κάθε διάνυσμα με αρχή στο $O$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$: υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a$ και $b$ τέτοιοι ώστε

$$\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}\,.$$

Γενικότερα, εάν $S$ είναι οποιοδήποτε υποσύνολο (πεπερασμένο ή άπειρο) ενός διανυσματικού χώρου $V$, ένας **γραμμικός συνδυασμός** στοιχείων του $S$ είναι ένα *πεπερασμένο* άθροισμα: $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$, όπου, για $i = 1, \ldots, k$, $v_i \in S$ και $a_i \in \mathbb{K}$.

## Χώρος που παράγεται από σύνολο διανυσμάτων.

Εάν $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου $V$, θέλουμε να εξετάσουμε το *μικρότερο* γραμμικό υποχώρο του $V$ που περιέχει τα στοιχεία του $S$.

Είναι προφανές οτι ο ίδιος ο χώρος $V$ περιέχει τα στοιχεία του $S$. Γενικεύοντας το Λήμμα 1.4, μπορούμε να δείξουμε ότι η τομή κάθε μη κενής συλλογής γραμμικών υπόχωρων του $V$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $V$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{T}$ όλων των γραμμικών υπόχωρων του $V$ οι οποίοι περιέχουν τα στοιχεία του $S$. Αυτό το σύνολο περιέχει το ίδιο το $V$, και συνεπώς δεν είναι κενό. Η τομή του $\mathcal{T}$, $X = \bigcap_{Z\in\mathcal{T}} Z$, περιέχει τα στοιχεία του $S$, είναι γραμμικός υπόχωρος του $V$, και είναι υπόχωρος κάθε γραμμικού υπόχωρου του $V$ που περιέχει τα στοιχεία του $S$. Με αυτή την έννοια $X$ είναι ο μικρότερος γραμμικός υπόχωρος του $V$ ο οποίος περιέχει τα στοιχεία του $S$.

Θα δείξουμε οτι ο γραμμικός υπόχωρος $X$ είναι ίσος με το σύνολο $Y$ όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του $S$. Πρώτα παρατηρούμε οτι αφού $X$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου και περιέχει τα στοιχεία του $S$, περιέχει επίσης κάθε γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του $S$, δηλαδή $Y \subseteq X$.

Κατόπιν δείχνουμε οτι $Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος. Εάν $x = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$ και $y = b_1v_1 + \cdots + b_kv_k$, για $a_i$, $b_i \in \mathbb{K}$, τότε $x + y$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $S$,

$$x + y = (a_1 + b_1)v_1 + \cdots + (a_k + b_k)v_k\,,$$

και εάν $c \in \mathbb{K}$, $cx$ επίσης εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $S$,

$$cx = ca_1v_1 + \cdots + ca_kv_k\,.$$

Άρα $Y$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του $V$, και συνεπώς είναι υπόχωρος του $V$.

Εφόσον $Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $V$, και περιέχει τα στοιχεία του $S$, ο $X$ είναι υποσύνολο του $Y$, $X \subseteq Y$. Συμπεραίνουμε οτι $X = Y$, δηλαδή οτι ο μικρότερος γραμμικός υπόχωρος του $V$ που περιέχει τα στοιχεία του $S$ είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του $S$.

Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_k$, το συμβολίζουμε $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$. Λέμε οτι ο γραμμικός υπόχωρος $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ **παράγεται** από τα $v_1, \ldots, v_k$.

Γενικότερα, εάν $S$ είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του $V$, το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του $S$ είναι ο μικρότερος γραμμικός υπόχωρος του $V$ ο οποίος περιέχει το $S$, και συμβολίζεται $\langle S\rangle$. Λέμε οτι ο γραμμικός υπόχωρος $\langle S\rangle$ **παράγεται** από το $S$, και το $S$ ονομάζεται **παράγον σύνολο** του $\langle S\rangle$. Εάν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$ το οποίο παράγει το διανυσματικό χώρο $V$, λέμε οτι ο $V$ είναι **πεπερασμένα παραγόμενος**.

**Παράδειγμα 1.21** Ο γραμμικός υπόχωρος $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$ είναι ο υπόχωρος που παράγεται από το διάνυσμα $(1, -2)$. Πράγματι, κάθε στοιχείο του $U$ είναι πολλαπλάσιο του $(1, -2)$.

**Παράδειγμα 1.22** Το επίπεδο $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$, $a \neq 0$, παράγεται από τα διανύσματα $(b, -a, 0)$ και $(c, 0, -a)$:

$$E = \langle (b, -a, 0), (c, 0, -a) \rangle$$

Πράγματι, όπως ελέγχουμε εύκολα, εάν αντικαταστήσουμε το διάνυσμα $(b, -a, 0)$ ή το διάνυσμα $(c, 0, -a)$ για το $(x, y, z)$ στην εξίσωση $ax + by + cz = 0$, βλέπουμε οτι αυτή ικανοποιείται. Συμπεραίνουμε οτι $\langle (b, -a, 0), (c, 0, -a) \rangle \subseteq E$.

Αντίστροφα, κάθε λύση της εξίσωσης $ax + by + cz = 0$, μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$s(b, -a, 0) + t(c, 0, -a)$$

για κατάλληλα $s, t \in \mathbb{R}$. Συνεπώς $E \subseteq \langle (b, -a, 0), (c, 0, -a) \rangle$.

**Παράδειγμα 1.23** Ο μηδενικός υπόχωρος $\{0\}$ παράγεται από το κενό σύνολο, $\langle \varnothing \rangle = \{0\}$. Πράγματι, ο μηδενικός υπόχωρος είναι η τομή όλων των υποχώρων που περιέχουν τα στοιχεία του κενού συνόλου, δηλαδή όλων των υποχώρων του $V$.

Θεωρούμε τους υπόχωρους $X$ και $Y$ του $V$ που παράγονται από τα στοιχεία $x_1, x_2$ και $y_1, y_2$ αντίστοιχα, $X = \langle x_1, x_2 \rangle$, $Y = \langle y_1, y_2 \rangle$. Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τα στοιχεία του γραμμικού υπόχωρου $X \cap Y$;

Εάν $u \in X \cap Y$, τότε $u \in X$ και μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $x_1, x_2$: υπάρχουν αριθμοί $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, τέτοιοι ώστε $u = a_1x_1 + a_2x_2$. Επίσης $-u \in Y$, και εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $y_1, y_2$, με συντελεστές $b_1, b_2 \in \mathbb{K}$: $-u = b_1y_1 + b_2y_2$. Συμπεραίνουμε οτι η τομή $X \cap Y$ αποτελείται από τα διανύσματα της μορφής $b_1y_1 + b_2y_2$, όπου τα $b_1, b_2$ αποτελούν μέρος μιας λύσης $(a_1, a_2, b_1, b_2)$ της διανυσματικής εξίσωσης

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b_1y_1 + b_2y_2 = 0 \qquad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{K}$$

**Παράδειγμα 1.24** Θεωρούμε τους υπόχωρους $X$ και $Y$ του $\mathbb{R}^3$, $X = \langle x_1, x_2 \rangle$, $Y = \langle y_1, y_2 \rangle$, όπου $x_1 = (1, 1, 0)$, $x_2 = (-1, 0, 1)$, $y_1 = (1, -1, 1)$ και $y_2 = (1, 0, 3)$. Για να βρούμε τον υπόχωρο $X \cap Y$, προσδιορίζουμε τα $b_1, b_2$ τα οποία αποτελούν μέρος μίας λύσης του συστήματος

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0\,,$$

το οποίο γράφουμε σε μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0$$

και εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0$$

δηλαδή $b_1 = -\frac{4}{3}b_2$, και ο υπόχωρος $X \cap Y$ αποτελείται από διανύσματα της μορφής $b(-\frac{4}{3}y_1 + y_2)$ για $b \in \mathbb{R}$. Με άλλα λόγια, παράγεται από το διάνυσμα $-4(1,\, -1,\, 1) + 3(1,\, 0,\, 3) = (-1,\, 4,\, 5)$,

$$X \cap Y = \langle(-1,\, 4,\, 5)\rangle \ .$$

## Αθροίσματα γραμμικών υπόχωρων

Είδαμε ότι, εάν $X$, $Y$ είναι γραμμικοί υπόχωροι του $V$, $X \cap Y$ είναι επίσης γραμμικός υπόχωρος, αλλά $X \cup Y$ δεν είναι, εν γένει, γραμμικός υπόχωρος. Θα ορίσουμε ένα υποσύνολο του $V$, που είναι γραμμικός υπόχωρος, και θα δείξουμε οτι είναι ο *μικρότερος* γραμμικός υπόχωρος που περιέχει το $X \cup Y$.

**Ορισμός.** Εάν $V$ είναι διανυσματικός χώρος, και $X$, $Y$ είναι γραμμικοί υπόχωροι του $V$, το σύνολο των διανυσμάτων που γράφονται ως άθροισμα ενός διανύσματος του $X$ και ενός διανύσματος του $Y$,

$$X + Y = \{v \in V \mid \text{υπάρχουν } x \in X \text{ και } y \in Y \text{ τέτοια ώστε } v = x + y\}$$

είναι γραμμικός υπόχωρος του $V$, και ονομάζεται **άθροισμα** των $X$ και $Y$.

**Λήμμα 1.5** *Το άθροισμα των γραμμικών υπόχωρων $X+Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $V$, και παράγεται από την ένωση $X \cup Y$,*

$$X + Y = \langle X \cup Y\rangle.$$

**Απόδειξη.** Για κάθε $x \in X$, $y \in Y$ ισχύει $x + y \in \langle X \cup Y\rangle$. Συμπεραίνουμε οτι $X + Y \subseteq \langle X \cup Y\rangle$.

Για την αντίθετη κατεύθυνση, είναι προφανές οτι $X \subseteq X + Y$, $Y \subseteq X + Y$, και συνεπώς $X \cup Y \subseteq X + Y$. Εύκολα ελέγχουμε οτι το σύνολο $X + Y$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου $V$, και συνεπώς είναι γραμμικός υπόχωρος. Άρα

$$\langle X \cup Y\rangle \subseteq X + Y$$

□

**Παράδειγμα 1.25** Θεωρούμε του υποχώρους του $\mathbb{K}^3$,

$$X = \{(x,\, 0,\, 0) \mid x \in \mathbb{K}\}$$

και
$$Y = \{(0,\, y,\, 0) \mid y \in \mathbb{K}\}\,.$$
Τότε
$$X + Y = \{(x,\, y,\, 0) \mid x,\, y \in \mathbb{K}\}\,.$$
Θεωρούμε ένα τρίτο υπόχωρο του $\mathbb{K}^3$, $Z = \{(z,\, z,\, 0) \mid z \in \mathbb{K}\}$. Είναι τα αθροίσματα $X+Y$, $X+Z$ διαφορετικά ή ίσα; Εύκολα ελέγχουμε οτι κάθε στοιχείο του $X+Y$ ανήκει στο $X+Z$,

$$\begin{aligned}(x,\, y,\, 0) &= ((x-y)+y,\, y,\, 0)\\ &= (x-y,\, 0,\, 0) + (y,\, y,\, 0) \in X+Z\,.\end{aligned}$$

Εξ ίσου εύκολα ελέγχουμε οτι, αντίστροφα, $X+Z \subseteq X+Y$. Συμπεραίνουμε οτι τα δύο αθροίσματα είναι ίσα.

Όταν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, η γεωμετρική ερμηνεία του συμπεράσματος είναι οτι το επίπεδο που ορίζουν οι ευθείες $\{(x,\, 0,\, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ και $\{(y,\, y,\, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$, είναι το ίδιο με το επίπεδο που περιέχει τους $x$ και $y$ άξονες.

**Παράδειγμα 1.26** Στο σύνολο $C^0(\mathbb{R})$ όλων των συνεχών συναρτήσεων στους πραγματικούς αριθμούς, ονομάζουμε μία συνάρτηση **άρτια** εάν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και **περιττή** εάν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ελέγξτε οτι τα σύνολα $C^0_+$ των άρτιων συναρτήσεων και $C^0_-$των περιττών συναρτήσεων είναι γραμμικοί υπόχωροι του $C^0(\mathbb{R})$.

Θα δείξουμε οτι $C^0(\mathbb{R}) = C^0_+ + C^0_-$. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f \in C^0$, και ορίζουμε

$$\begin{aligned}f^+(x) &= \frac{1}{2}\,(f(x)+f(-x))\\ f^-(x) &= \frac{1}{2}\,(f(x)-f(-x))\end{aligned}$$

Ελέγχουμε οτι η $f^+$ είναι άρτια, η $f^-$ περιττή, και οτι $f = f^+ + f^-$.

**Παράδειγμα 1.27** Θεωρούμε τους υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$, $Y = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ και $Z = \{(u,\, v,\, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u+v+w = 0\}$. Το άθροισμα $Y+Z$ είναι όλος ο χώρος $\mathbb{R}^3$. Για οποιοδήποτε διάνυσμα $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(a,\, b,\, c) &= (a,\, (b+c)-c,\, c)\\ &= (a,\, b+c,\, 0) + (0,\, -c,\, c)\end{aligned}$$

με $(a,\, b+c,\, 0) \in Y$, $(0,\, -c,\, c) \in Z$, και επίσης

$$\begin{aligned}(a,\, b,\, c) &= ((a+c)-c,\, b,\, c)\\ &= (a+c,\, b,\, 0) + (-c,\, 0,\, c)\end{aligned}$$

με $(a+c,\, b,\, 0)) \in Y$, $(-c,\, 0\, c) \in Z$. Παρατηρούμε οτι κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ γράφεται με περισσότερους από ένα διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα στοιχείων των $Y$ και $Z$.

Υποθέτουμε οτι έχουμε γραμμικούς υπόχωρους $Y$ και $Z$ του διανυσματικού χώρου $V$, και οτι στο άθροισμα $X = Y + Z$, το στοιχείο $x \in X$ γράφεται ως $x = y_1 + z_1$ και ως $x = y_2 + z_2$, με $y_1,\, y_2 \in Y$, $z_1,\, z_2 \in Z$. Τότε

$$\begin{aligned} 0 = x - x &= (y_1 + z_1) - (y_2 + z_2) \\ &= (y_1 - y_2) + (z_1 - z_2)\,. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε οτι

$$y_1 - y_2 = z_2 - z_1\,.$$

Αλλά το $y_1 - y_2$ ανήκει στο $Y$ ενώ το $z_2 - z_1$ ανήκει στο $Z$, και εφ' όσον είναι ίσα, ανήκουν στην τομή $Y \cap Z$. Βλέπουμε οτι εάν υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι να εκφραστεί το $x$ ως άθροισμα στοιχείων των $Y$ και $Z$, τότε $Y \cap Z \neq \{0\}$.

Συμπεραίνουμε οτι εάν $Y \cap Z = \{0\}$, τότε κάθε στοιχείο του $Y + Z$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα στοιχείων του $Y$ και του $Z$.

**Ορισμός.** Θεωρούμε διανυσματικό χώρο $V$ και γραμμικούς υπόχωρους $Y$, $Z$. Εάν $Y \cap Z = \{0\}$, τότε το άθροισμα $Y + Z$ ονομάζεται (**εσωτερικό**) **ευθύ άθροισμα**, και συμβολίζεται $Y \oplus Z$.

**Παράδειγμα 1.28** Εάν μία συνάρτηση $f \in C^0(\mathbb{R})$ είναι άρτια και περιττή, τότε $f(x) = f(-x) = -f(x)$. Συμπεραίνουμε οτι η $f$ είναι η σταθερή μηδενική συνάρτηση, και οτι $C^0_+(\mathbb{R}) \cap C^0_-(\mathbb{R}) = \{0\}$. Συνεπώς κάθε συνάρτηση γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης, και το σύνολο $C^0(\mathbb{R})$ είναι το ευθύ άθροισμα των $C^0_+(\mathbb{R})$ και $C^0_-(\mathbb{R})$,

$$C^0(\mathbb{R}) = C^0_+(\mathbb{R}) \oplus C^0_-(\mathbb{R})\,.$$

**Άσκηση 1.3** Επαληθεύσατε τα αξιώματα ενός σώματος για το σύνολο $\mathbb{Z}_3$ των κλάσεων υπολοίπων modulo 3.

**Άσκηση 1.4** Σε ποιά από τα ακόλουθα σύνολα μπορείτε να ορίσετε με «φυσιολογικό» τρόπο τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό (για παράδειγμα, κατά σημείο σε ένα χώρο συναρτήσεων), ώστε να είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{R}$; Σε κάθε περίπτωση να ορίσετε τις πράξεις, να βρείτε το μηδενικό διάνυσμα και να ελέγξετε εάν το σύνολο είναι κλειστό ως προς τις πράξεις.

α′. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, $\mathbb{C}$.

β′. Το σύνολο των ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

γ′. Το σύνολο όλων των φθινουσών ακολουθιών

δ′. Το σύνολο όλων των ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0.

ε′. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από τους φυσικούς αριθμούς στους πραγματικούς αριθμούς.

ϛ′. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το σύνολο $A$ στο $\mathbb{R}$, για οποιοδήποτε $A$.

ζ′. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο σύνολο $A$, για οποιοδήποτε $A$.

η′. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{Z}$.

ϑ′. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $A$ στο $\mathbb{R}^n$, για οποιοδήποτε $A$.

**Άσκηση 1.5** Οταν η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ορίζονται κατά σημείο, ποιά από τα ακόλουθα σύνολα συναρτήσεων αποτελούν διανυσματικούς χώρους πάνω από το $\mathbb{R}$; Σε κάθε περίπτωση να ελέγξετε εάν το σύνολο είναι κλειστό ως προς τις κατά σημείο πράξεις.

α′. Συνεχείς συναρτήσεις από το $[0, 1]$ στο $\mathbb{R}$.

β′. Συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν $f(1) = 0$.

γ′. Συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν $g(0) = 1$.

δ′. Συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $[-1, 1]$.

**Άσκηση 1.6** Σε ποιά από τα ακόλουθα σύνολα μπορείτε να ορίσετε με «φυσιολογικό» τρόπο τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με μιγαδικό αριθμό, ώστε να είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{C}$; Σε κάθε περίπτωση να ορίσετε τις πράξεις, να βρείτε το μηδενικό διάνυσμα και να ελέγξετε εάν το σύνολο είναι κλειστό ως προς τις πράξεις.

α′. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}$.

β′. Το σύνολο $\mathbb{C}^n$.

γ′. Το σύνολο ακολουθιών με μιγαδικούς όρους.

δ′. Το σύνολο των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$.

ε′. Το σύνολο των συναρτήσεων από το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{R}$.

**Άσκηση 1.7** Σε ποιά από τα ακόλουθα σύνολα μπορείτε να ορίσετε με «φυσιολογικό» τρόπο τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με ρητό αριθμό, ώστε να είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{Q}$; Σε κάθε περίπτωση να ορίσετε τις πράξεις, να βρείτε το μηδενικό διάνυσμα και να ελέξγετε εάν το σύνολο είναι κλειστό ως προς τις πράξεις.

α′. Το σύνολο των ακολουθιών στο $\mathbb{Q}$.

β′. Το σύνολο των ακολουθιών στο $\mathbb{Q}$ που συγκλίνουν στο $\sqrt{2}$.

γ′. Το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

δ′. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

**Άσκηση 1.8** Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^2$ με τις πράξεις $(x,\, y)\dot{+}(x',\, y') = (x{+}x',\, y{+}y')$ και $\lambda \cdot (x,\, y) = (\lambda x,\, 0)$, για $\lambda \in \mathbb{R}$. Εξετάστε εάν αυτές οι πράξεις ορίζουν στο $\mathbb{R}^2$ δομή διανυσματικού χώρου πάνω από το $\mathbb{R}$.

**Άσκηση 1.9** Θεωρούμε διανυσματικό χώρο $U$ πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και υποσύνολο $X \subseteq U$. Δείξτε οτι $X$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $U$ εάν και μόνον εάν, για κάθε $x,\, y \in X$ και $a,\, b \in \mathbb{K}$, ισχύει

$$ax + by \in X\,.$$

**Άσκηση 1.10** Δείξτε οτι το σύνολο $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x = 3y\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.
Είναι το σύνολο $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x + y - 1 = 0\}$ γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$;
Είναι το σύνολο $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\, y = 3x\}$ γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$;

**Άσκηση 1.11** Δίδονται τα διανύσματα $u = (1,\, 1,\, 0)$, $v = (1,\, 2,\, 1)$, $x = (-2,\, -3,\, -2)$ και $y = (0,\, 1,\, -3)$ του $\mathbb{R}^3$, και οι γραμμικοί υπόχωροι $U = \langle u,\, v\rangle$ και $V = \langle x,\, y\rangle$. Προσδιορίστε το γραμμικό υπόχωρο $U \cap V$.

**Άσκηση 1.12** Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^3$, θεωρούμε τους υπόχωρους

$$U = \{(u,\, w,\, z) \in \mathbb{C}^3 \,:\, 3u + 2w = 0\} \quad \text{και} \quad V = \{(u,\, w,\, z) \in \mathbb{C}^3 \,:\, \mathrm{i}w + z = 0\}\,.$$

Προσδιορίστε το γραμμικό υπόχωρο $U \cap V$.

**Άσκηση 1.13** Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}[x]$ όλων των πολυωνύμων $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, $a_n \neq 0$, όπου $n$ είναι ο βαθμός του $p(x)$, θεωρούμε το υποσύνολο $\mathbf{Q}_k$ των πολυωνύμων βαθμού ίσου με $k$, και το υποσύνολο $\mathbb{P}_k$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με $k$. Εξετάστε εάν κάθε ένα από αυτά τα σύνολα αποτελεί γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{K}[x]$.

**Άσκηση 1.14** Θεωρούμε το σύνολο $Q$ των πολυωνύμων $p \in \mathbb{R}[x]$ με την ιδιότητα: η παράγωγος $p'$ διαιρεί το $p$. Είναι το $Q$ διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$;
Ίδιο ερώτημα για το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές $a_k = 0$ για $k \leq 3$.

**Άσκηση 1.15** Επαληθεύσατε οτι το σώμα $\mathbb{K}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Δείξτε οτι οι μόνοι υπόχωροι του $\mathbb{K}$ είναι οι $\{0\}$ και $\mathbb{K}$.

**Άσκηση 1.16** Θεωρήστε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο των συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με πράξεις κατά σημείο.
Είναι το υποσύνολο των συνεχών συναρτήσεων γραμμικός υπόχωρος;
Είναι το υποσύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν, για κάθε $x$, $|f(x)| \leq 1$ γραμμικός υπόχωρος;

**Άσκηση 1.17** Γράψτε την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ως άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης.

**Άσκηση 1.18** Δείξτε οτι εάν $X$ και $Y$ είναι γραμμικοί υπόχωροι του $V$, τότε $X \cup Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος εάν και μόνον εάν $X \subseteq Y$ ή $Y \subseteq X$.

**Άσκηση 1.19** Θεωρούμε υποχώρους $X$, $Y$, $Z$ του διανυσματικού χώρου $V$. Δείξτε οτι εάν $X \subseteq Z$ και $Y \subseteq Z$, τότε $X + Y \subseteq Z$.

**Άσκηση 1.20** Έστω $V$ διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$. Δείξτε οτι μπορούμε να ορίσουμε στο σύνολο $V$ τη δομή διανυσματικού χώρου πάνω από το $\mathbb{R}$. Αυτός ο χώρος συμβολίζεται $V_{\mathbb{R}}$. Εάν $V = \mathbb{C}^2$, ορίστε το διανυσματικό χώρο $V_{\mathbb{R}}$. Δείξτε οτι το σύνολο $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z = \bar{z}, w = -\bar{w}\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $V_{\mathbb{R}}$, αλλά δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $V$.

# Κεφάλαιο 2

# Γραμμική ανεξαρτησία, βάσεις, διάσταση

## Γραμμική εξάρτηση

Στο χώρο $T_O E^2$ των γεωμετρικών διανυσμάτων στο επίπεδο με σημείο εφαρμογής στο $O$, θεωρούμε δύο μη συγγραμμικά διανύσματα, $\vec{u}$ και $\vec{v}$. Εάν $\vec{w}$ είναι οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα του $T_O E^2$, γνωρίζουμε οτι μπορούμε να εκφράσουμε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}$ και $\vec{v}$,

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}\,. \tag{2.1}$$

Συμπεραίνουμε οτι ο χώρος $T_O E^2$ παράγεται από τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$,

$$T_O E^2 = \langle \vec{u},\, \vec{v} \rangle\,.$$

Ποιο σύνολο παράγουν τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$; Ένα διάνυσμα $\vec{z} \in \langle \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w} \rangle$, εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$\vec{z} = c\vec{u} + d\vec{v} + f\vec{w}, \quad \text{για } c,\, d,\, f \in \mathbb{R}$$

αλλά, αντικαθιστώντας το $\vec{w}$ από την 2.1, έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{z} &= c\vec{u} + d\vec{v} + f(a\vec{u} + b\vec{v}) \\ &= (c + fa)\vec{u} + (d + fb)\vec{v}, \end{aligned}$$

δηλαδή $\vec{z} \in \langle \vec{u},\, \vec{v} \rangle$. Συνεπώς ο χώρος που παράγεται από τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι ο ίδιος με αυτόν που παράγεται από τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$. Το $\vec{w}$ δεν προσφέρει κάτι περισσότερο. Με αυτή την έννοια είναι *περιττό*.

Θεωρούμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων,

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 5y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

το οποίο μπορούμε να λύσουμε, και να βρούμε το σύνολο των λύσεων

$$U = \{(t,\, -t,\, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Εάν τώρα θεωρήσουμε μόνο τις δύο πρώτες εξισώσεις, θα δούμε οτι και αυτό το σύστημα έχει ως σύνολο λύσεων το $U$. Η τρίτη εξίσωση είναι η διαφορά της δεύτερης από την πρώτη, και έτσι δεν βάζει κάποιον επί πλέον περιορισμό στο σύνολο λύσεων. Με αυτή την έννοια, η τρίτη εξίσωση είναι *περιττή*.

Αυτή η έννοια του *περιττού*, διανυσμάτων τα οποία δεν προσφέρουν περισσότερες δυνατότητες παραγωγής, ή εξισώσεων οι οποίες δεν θέτουν περισσότερους περιορισμούς, αποτελεί μία βασική έννοια της Γραμμικής Άλγεβρας, την οποία ονομάζουμε *γραμμική εξάρτηση*. Μια συλλογή διανυσμάτων είναι *γραμμικά εξαρτημένη* όταν περιέχει *περιττά* διανύσματα. Ένα σύστημα εξισώσεων είναι γραμμικά εξαρτημένο όταν περιέχει *περιττές* εξισώσεις.

**Ορισμός.** Η *πεπερασμένη* συλλογή διανυσμάτων $v_1,\, v_2, \ldots,\, v_n$, $n \geq 2$, είναι **γραμμικά εξαρτημένη** εάν κάποιο από τα $v_i$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Δηλαδή υπάρχει κάποιο $j$, $1 \leq j \leq n$, και αριθμοί $a_i \in \mathbb{K}$ για κάθε $i$, με $1 \leq i \leq n$, $i \neq j$, τέτοιοι ώστε

$$v_j = a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \cdots + a_n v_n\,.$$

**Παράδειγμα 2.1** Στο $\mathbb{K}^2$, τα διανύσματα $(1,\, 0)$, $(0,\, 1)$ και $(a,\, b)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού

$$(a,\, b) = a\,(1,\, 0) + b\,(0,\, 1)\,.$$

**Παράδειγμα 2.2** Τα πολυώνυμα $p(x) = 1 - x$, $q(x) = x(1-x)$ και $r(x) = 1 - x^2$, είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού

$$r(x) = p(x) + q(x)\,.$$

**Παράδειγμα 2.3** Θεωρούμε τα διανύσματα $x_1 = (2,\, 0,\, 1)$, $x_2 = (0,\, 2,\, -1)$ και $x_3 = (0,\, -4,\, 2)$ στο $\mathbb{R}^3$. Είναι προφανές οτι δεν υπάρχουν αριθμοί $a_2$ και $a_3$ τέτοιοι ώστε

$$(2,\, 0,\, 1) = a_2(0,\, 2,\, -1) + a_3(0,\, -4,\, 2),$$

γιατί $a_2 0 + a_3 0 = 0 \neq 2$. Όμως

$$(0,\, 2,\, -1) = 0 \cdot (2,\, 0,\, 1) - \frac{1}{2}(0,\, -4,\, 2)$$

και συνεπώς η συλλογή $x_1,\, x_2,\, x_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένη.

Η έννοια της γραμμικής εξάρτησης εμπλέκει με ουσιαστικό τρόπο το σώμα πάνω από το οποίο ορίζεται ο διανυσματικός χώρος $V$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 2.4** Θεωρούμε το $\mathbb{C}^2$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από το σώμα $\mathbb{C}$. Τα διανύσματα $(1, \mathrm{i})$ και $(\mathrm{i}, -1)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού $(\mathrm{i}, -1) = \mathrm{i}\,(1, \mathrm{i})$. Εάν θεωρήσουμε το $\mathbb{C}^2$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από το $\mathbb{R}$, τα διανύσματα $(1, \mathrm{i})$ και $(\mathrm{i}, -1)$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα: δεν υπάρχουν *πραγματικοί* αριθμοί $a$, $b$ τέτοιοι ώστε $(1, \mathrm{i}) = a(\mathrm{i}, -1)$ ή $(\mathrm{i}, -1) = b(1, \mathrm{i})$.

Στα προηγούμενα παραδείγματα ήταν εύκολο να βρούμε κάποιο διάνυσμα της συλλογής το οποίο μπορούσαμε να εκφράσουμε ως γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων. Εάν όμως είχαμε μία μεγαλύτερη συλλογή δεν θα ήταν πρακτικό να εξετάσουμε κάθε διάνυσμα, μέχρι να βρούμε κάποιο το οποίο να μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Γι' αυτό το λόγο είναι χρήσιμο να έχουμε ένα χαρακτηρισμό της γραμμικής εξάρτησης που δεν διακρίνει κάποιο από τα στοιχεία. Παρατηρούμε οτι εάν

$$v_j = a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \cdots + a_n v_n$$

τότε

$$a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1} - v_j + a_{j+1} v_{j+1} + \cdots + a_n v_n = 0\,.$$

Δηλαδή, εάν η συλλογή $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένη, τότε το μηδενικό διάνυσμα μπορεί να εκφράστει ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$, με τουλάχιστον ένα συντελεστή διαφορετικό από 0 (στην παραπάνω περίπτωση αυτόν του $v_j$, ο οποίος είναι $-1$). Θα δείξουμε οτι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή εάν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$ ο οποίος να είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, ενώ τουλάχιστον ένας συντελεστής είναι διαφορετικός από το 0, τότε κάποιο από τα $v_i$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

**Λήμμα 2.1** *Η συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots v_n$, $n \geq 2$, είναι γραμμικά εξαρτημένη εάν και μόνον εάν το μηδενικό διάνυσμα μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$, με τουλάχιστον ένα συντελεστή διαφορετικό από το 0.*

**Απόδειξη.** Έχουμε ήδη δείξει τη μία κατεύθυνση. Αντίστροφα, εάν υπάρχει ένας γραμμικός συνδυασμός

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

και $a_j \neq 0$, τότε

$$v_j = \frac{-a_1}{a_j} v_1 + \cdots + \frac{-a_{j-1}}{a_j} + \frac{-a_{j+1}}{a_j} v_{j+1} + \cdots + \frac{-a_n}{a_j} v_n\,.$$

□

Στο ακόλουθο αποτέλεσμα διατυπώνουμε με πιο συγκεκριμένο τρόπο την έννοια υπο την οποία ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο περιέχει περιττά στοιχεία.

**Λήμμα 2.2 (Λήμμα Γραμμικής Εξάρτησης)** *Θεωρούμε τη γραμμικά εξαρτημένη συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$. Εάν υπάρχει μία σχέση*

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$$

*στην οποία ο συντελεστής του $v_j$ δεν είναι ίσος με 0, τότε ο υπόχωρος που παράγεται από το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι ίσος με τον υπόχωρο που παράγεται από το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_j\}$.*

**Απόδειξη.** Από την απόδειξη του Λήμματος 2.1 γνωρίζουμε οτι μπορούμε να εκφράσουμε το $v_j$ ως γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων διανυσμάτων, έστω

$$v_j = \sum_{i \neq j} b_i v_i \,.$$

Εάν $w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $v_j$, και να πάρουμε

$$w = \sum_{i \neq j} (a_i + a_j b_i) v_i \,,$$

που σημαίνει οτι το $w$ βρίσκεται στον υπόχωρο που παράγεται από το

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_j\} \,.$$

□

Επεκτείνουμε τον ορισμό της γραμμικής εξάρτησης σε αυθαίρετες συλλογές διανυσμάτων με τον ακόλουθο τρόπο. Η *κενή* συλλογή διανυσμάτων, δηλαδή η συλλογή που δεν περιέχει κανένα διάνυσμα, δεν είναι γραμμικά εξαρτημένη. Η συλλογή που περιέχει μόνον ένα διάνυσμα είναι γραμμικά εξαρτημένη μόνον εάν αυτό είναι το μηδενικό διάνυσμα. Μια *άπειρη* συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένη εάν περιέχει κάποια πεπερασμένη συλλογή διανυσμάτων η οποία είναι γραμμικά εξαρτημένη.

## Γραμμική ανεξαρτησία

Μία συλλογή διανυσμάτων είναι **γραμμικά ανεξάρτητη** εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένη. Για μία πεπερασμένη συλλογή $v_1, \ldots, v_n$, $n \geq 2$, αυτό σημαίνει οτι κανένα στοιχείο της συλλογής δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

**Παράδειγμα 2.5** Δύο μη συγγραμμικά γεωμετρικά διανύσματα του επιπέδου, $\vec{u}$, $\vec{v} \in T_O E^2$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εφ' όσον τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ δεν είναι συγγραμμικά, το ένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

**Παράδειγμα 2.6** Στο $\mathbb{K}^2$, τα διανύσματα $(1, 0)$, $(0, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Δεν υπάρχει στοιχείο $a$ του $\mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $(1, 0) = a(0, 1)$ ή $(0, 1) = a(1, 0)$, γιατί σε ένα σώμα $a0 = 0$.

**Παράδειγμα 2.7** Τα πολυώνυμα $p(x) = 1 - x$, $q(x) = x(1 - x)$ και $s(x) = x^3 - 1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εάν οι αριθμοί $a$, $b$, $c$ ικανοποιούν τη σχέση

$$a\,(1 - x) + b\,x(1 - x) + c\,(x^3 - 1) = 0$$

τότε

$$c\,x^3 - b\,x^2 + (b-a)\,x + (a-c)$$

είναι το μηδενικό πολυώνυμο, και συνεπώς $c = 0$, $b = 0$, $b - a = 0$, και άρα $a = 0$. Συμπεραίνουμε οτι ο μόνος τρόπος να εκφραστεί το μηδενικό πολυώνυμο ως γραμμικός συνδυασμός των $p(x)$, $q(x)$ και $s(x)$, είναι ο τετριμμένος,

$$0\,p(x) + 0\,q(x) + 0\,s(x) = 0\,.$$

Άρα τα πολυώνυμα $p(x)$, $q(x)$, $s(x)$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Σύμφωνα με την επέκταση της έννοιας της γραμμικής εξάρτησης σε αυθαίρετες συλλογές, η κενή συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητη, ενώ η συλλογή με ένα διάνυσμα είναι γραμμικά ανεξάρτητη εκτός εάν αυτό είναι το μηδενικό διάνυσμα. Μία άπειρη συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητη εάν κάθε πεπερασμένη συλλογή διανυσμάτων που περιέχεται σε αυτήν είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

Ο *συμμετρικός* χαρακτηρισμός της γραμμικής εξάρτησης στο Λήμμα 2.1 επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε και τη γραμμική ανεξαρτησία με *συμμετρικό* τρόπο.

**Λήμμα 2.3** *Η συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$, $n \geq 1$, είναι γραμμικά ανεξάρτητη εάν και μόνον εάν ο μοναδικός τρόπος να εκφραστεί το μηδενικό διάνυσμα ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$ είναι ο τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός, με όλους τους συντελεστές ίσους με 0.*

**Απόδειξη.** Η πρόταση είναι αντιστροφοαντίθετη, και συνεπώς λογικά ισοδύναμη, με το Λήμμα 2.1.

$\square$

**Παράδειγμα 2.8** Στο χώρο $C^0(\mathbb{R})$, θεωρούμε τις συναρτήσεις sin και cos. Εάν η μηδενική συνάρτηση εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$a(\sin) + b(\cos) = 0$$

τότε για κάθε $x \in \mathbb{K}$ ισχύει η ισότητα

$$a \sin x + b \cos x = 0\,.$$

Ειδικότερα εάν $x = 0$ έχουμε $a \sin 0 + b \cos 0 = 0$, δηλαδή $b = 0$ και εάν $x = \frac{\pi}{2}$ έχουμε $a \sin \frac{\pi}{2} + b \cos \frac{\pi}{2} = 0$, δηλαδή $a = 0$. Συμπεραίνουμε οτι ο μόνος τρόπος να εκφραστεί η μηδενική συνάρτηση ως γραμμικός συνδυασμός των sin και cos είναι με όλους τους συντελεστές ίσους με 0. Συνεπώς οι συναρτήσεις sin και cos είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

**Πρόταση 2.4** *Εάν μία συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένη, τότε κάθε συλλογή που την περιέχει είναι επίσης γραμμικά εξαρτημένη. Εάν μία συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητη, τότε κάθε συλλογή που περιέχεται σε αυτήν είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητη.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε τη συλλογή διανυσμάτων $v_1, \dots, v_n$, $w_1, \dots, w_m$. Εάν τα διανύσματα $v_1, \dots, v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, υπάρχουν αριθμοί, $a_1, \dots, a_n$, οι οποίοι δεν είναι όλοι ίσοι με 0, τέτοιοι ώστε

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0\,.$$

Σχηματίζουμε το γραμμικό συνδυασμό

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n + 0 w_1 + \cdots + 0 w_m$$

ο οποίος είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, αλλά τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές δεν είναι 0. Άρα η συλλογή $v_1, \dots, v_n$, $w_1, \dots, w_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένη.

Θεωρούμε μια γραμμικά ανεξάρτητη συλλογή διανυσμάτων $v_1, \dots, v_n$, και τη συλλογή $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$, όπου $k \leq n$ και $i_j$ είναι διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί μεταξύ 1 και $n$. Θέλουμε να δείξουμε οτι η συλλογή $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Έστω ένας γραμμικός συνδυασμός των $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$, ο οποίος είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα,

$$a_1 v_{i_1} + \cdots + a_k v_{i_k} = 0\,.$$

Σχηματίζουμε το γραμμικό συνδυασμό

$$b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

όπου $b_{i_j} = a_j$ για $j = 1, \dots k$, και $b_i = 0$ εάν $i$ δεν είναι ίσο με κάποιο $i_j$, $1 \leq j \leq k$. Τότε

$$b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n = a_1 v_{i_1} + \cdots + a_k v_{i_k} = 0$$

Αφού η συλλογή $v_1, \dots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη, όλοι οι συντελεστές $b_i$, $1 \leq i \leq n$ είναι ίσοι με 0. Συνεπώς και οι $a_j = b_{i_j}$ είναι ίσοι με 0. Άρα η συλλογή $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

$\square$

**Παράδειγμα 2.9** Στο χώρο $\mathbb{K}[x]$ των πολυωνύμων μίας μεταβλητής με συντελεστές στο σώμα $\mathbb{K}$, το σύνολο

$$\mathcal{B} = \left\{ p_k(x) = x^k \mid k \in \mathbb{N}_0 \right\} = \{p_0(x),\, p_1(x),\, p_2(x), \dots\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Πρέπει να δείξουμε οτι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Από την Πρόταση 2.4, κάθε υποσύνολο ενός γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αφού κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{B}$ περιέχεται σε ένα υποσύνολο της μορφής $\{p_0(x),\, p_1(x),\, p_2(x), \dots,\, p_n(x)\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, αρκεί να αποδείξουμε οτι σύνολα αυτής της μορφής είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό που εκφράζει το μηδενικό πολυώνυμο:

$$a_0\, p_0(x) + a_1\, p_1(x) + a_2\, p_2(x) + \cdots + a_n p_n(x) = 0$$

δηλαδή $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο και συνεπώς $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα οτι το μηδενικό διάνυσμα εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του συνόλου. Θα δούμε οτι το ίδιο ισχύει και για κάθε άλλο διάνυσμα που βρίσκεται στο χώρο που παράγει το σύνολο.

**Πρόταση 2.5** *Το σύνολο διανυσμάτων $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο εάν και μόνον εάν κάθε διάνυσμα $w \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ εκφράζεται κατά ένα και μόνο τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$.*

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε οτι το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θεωρούμε διάνυσμα $w \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$, και γραμμικούς συνδυασμούς που εκφράζουν το $w$,

$$w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \quad \text{και} \quad w = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

Τότε $a_1 v_1 + \cdots a_n v_n - (b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) = 0$, και συνεπώς

$$(a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n = 0\,.$$

Αφού το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο,

$$a_1 - b_1 = 0,\; a_2 - b_2 = 0, \ldots,\; a_n - b_n = 0\,,$$

και συνεπώς $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$. Συμπεραίνουμε οτι το $w$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε οτι κάθε διάνυσμα $w \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$. Το μηδενικό διάνυσμα ανήκει στο $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$, και προφανώς $0 = 0\,v_1 + \cdots + 0\,v_n$. Από την υπόθεση της μοναδικότητας δεν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός με τουλάχιστον ένα συντελεστή διαφορετικό από 0 που να εκφράζει το μηδενικό διάνυσμα, και συνεπώς το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

□

**Λήμμα 2.6** *Εάν το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο και $v_1 \neq 0$, τότε υπάρχει $k$, με $1 \leq k < n$, τέτοιο ώστε το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και υπάρχουν αριθμοί $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ τέτοιοι ώστε $v_{k+1} = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$.*

**Απόδειξη.** Το σύνολο $\{v_1\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αφού το $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, υπάρχει κάποιο ελάχιστο $k$ τέτοιο ώστε $\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Αφού το $k$ είναι το ελάχιστο με αυτή την ιδιότητα, το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Υπάρχουν $b_1, \ldots, b_{k+1} \in \mathbb{K}$, όχι όλα ίσα με μηδέν, τέτοια ώστε $b_1 v_1 + \cdots + b_{k+1} v_{k+1} = 0$. Εάν $b_{k+1} = 0$, τότε $b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k = 0$ και από γραμμική ανεξαρτησία $b_1 = \cdots = b_k = 0$. Άρα $b_{k+1} \neq 0$, και συνεπώς

$$v_{k+1} = -\frac{b_1}{b_{k+1}} v_1 - \cdots - \frac{b_k}{b_{k+1}} v_k\,.$$

□

## Βάσεις

Εάν ένα υποσύνολο $S$ του διανυσματικού χώρου $V$ παράγει το $V$, τότε κάθε στοιχείο του $V$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $S$. Εάν επί πλέον το σύνολο $S$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε αυτός ο γραμμικός συνδυασμός είναι μοναδικός για κάθε στοιχείο του $V$. Γι' αυτό το λόγο ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο που παράγει ένα χώρο $V$ έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Ένα τέτοιο σύνολο ονομάζεται βάση του $V$.

**Ορισμός.** Ένα υποσύνολο $\mathcal{B}$ του διανυσματικού χώρου $V$ λέγεται **βάση** του $V$ εάν το $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει το διανυσματικό χώρο $V$.

**Παράδειγμα 2.10** Στο $\mathbb{K}^2$, τα διανύσματα $(1,\,0)$ και $(0,\,1)$ αποτελούν μία βάση του χώρου, γιατί είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το χώρο $\mathbb{K}^2$: εάν $(a,\,b)\in\mathbb{K}^2$, τότε $(a,\,b)=a\,(1,\,0)+b\,(0,1)$.

**Παράδειγμα 2.11** Το σύνολο

$$\mathcal{B} \;=\; \{p_k(x)=x^k \mid k\in\mathbb{N}_0\}$$

αποτελεί βάση του χώρου πολυωνύμων $\mathbb{K}[x]$. Είδαμε στο Παράδειγμα 2.9 οτι είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Κάθε πολυώνυμο γράφεται στη μορφή $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, με $a_n\neq 0$, και συνεπώς εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $\mathcal{B}$:

$$p(x)=a_0p_0(x)+a_1p_1(x)+\ldots+a_np_n(x)\,.$$

Μία βάση ενός διανυσματικού χώρου $V$ χαρακτηρίζεται ως ένα μέγιστο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $V$, και επίσης ως ένα ελάχιστο παράγον σύνολο του $V$.

**Πρόταση 2.7** *Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $V$, και ένα σύνολο $\{v_1,\ldots v_n\}\subseteq V$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. *$\{v_1,\ldots,v_n\}$ είναι βάση του $V$, δηλαδή είναι γραμμικά ανεξάρτητο παράγον σύνολο του $V$.*
2. *Κάθε διάνυσμα $w\in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1,\ldots,v_n$.*
3. *$\{v_1,\ldots,v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αλλά για κάθε $w\in V\setminus\{v_1,\ldots,v_n\}$, το σύνολο $\{v_1,\ldots,v_n\}\cup\{w\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.*
4. *$\{v_1,\ldots,v_n\}$ είναι παράγον σύνολο $V$, ενώ για κάθε $i=1,\ldots,n$, το σύνολο $\{v_1,\ldots,v_n\}\setminus\{v_i\}$ δεν παράγει το $V$.*

**Απόδειξη.** Η ισοδυναμία των 1 και 2 είναι συνέπεια της Πρότασης 2.5.

Για να δείξουμε οτι το 1 συνεπάγεται το 3, παρατηρούμε οτι εάν $\{v_1,\ldots,v_n\}$ είναι βάση και $w\in V\setminus\{v_1,\ldots,v_n\}$, τότε το $w$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1,\ldots,v_n$, και συνεπώς $\{v_1,\ldots,v_n\}\cup\{w\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Αντιστρόφως, εάν ισχύει το 3, τότε κάθε στοιχείο $w \in V$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$, και συνεπώς $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο παράγον σύνολο.

Για να δείξουμε οτι το 1 συνεπάγεται το 4, παρατηρούμε οτι εάν για κάποιο $j = 1, \ldots, n$, το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_j\}$ παράγει το $V$, τότε το $v_j$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων στοιχείων του $\{v_1, \ldots, v_n\}$, το οποίο συνεπώς δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αντιστρόφως, εάν το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ παράγει το $V$, αλλά δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε, από το Λήμμα Γραμμικής Εξάρτησης, Λήμμα 2.2, υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του $\{v_1, \ldots, v_n\}$ το οποίο παράγει το $V$.

□

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι κάπως τεχνικό, αλλά θεμελιώδες για τη θεωρία των πεπερασμένα παραγόμενων διανυσματικών χώρων. Λέει οτι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο δεν μπορεί να έχει περισσότερα στοιχεία από ένα σύνολο που παράγει το χώρο, και οτι μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάποια από τα στοιχεία του παράγοντος συνόλου με τα στοιχεία του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου ώστε να έχουμε ένα νέο παράγον σύνολο που περιέχει το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

**Θεώρημα 2.8** *(Θεώρημα Αντικατάστασης). Εάν το πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ παράγει το γραμμικό χώρο $V$, και $\{w_1, \ldots, w_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $V$, τότε $k \leq n$ και υπάρχουν $n-k$ στοιχεία $v_{i_j}$, για $j = 1, \ldots, n-k$ τέτοια ώστε*

$$\{w_1, \ldots, w_k, v_{i_1}, \cdots, v_{i_{n-k}}\}$$

*παράγουν το $V$.*

**Απόδειξη.** Αφού το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ παράγει το διανυσματικό χώρο $V$, το $w_1$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$w_1 = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n ,$$

και εφόσον $w_1 \neq 0$, υπάρχει κάποιο $j = 1, \ldots, n$ για το οποίο $a_j \neq 0$. Αντικαθιστούμε το $v_j$ με το $w_1$, και έχουμε το σύνολο

$$S_1 = (\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_j\}) \cup \{w_1\} .$$

Από το Λήμμα Γραμμικής Εξάρτησης, Λήμμα 2.2, το $S_1$ παράγει το χώρο $V$. Αν χρειάζεται αλλάζουμε την αρίθμηση των στοιχείων του $S_1$ ώστε να έχουμε

$$S_1 = \{w_1, v_2, \ldots, v_n\} .$$

Κατόπιν θεωρούμε το διάνυσμα $w_2$. Αφού το $S_1$ παράγει το $V$, το $w_2$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $S_1$,

$$w_2 = a_1 w_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n .$$

Αφού τα $w_1$, $w_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $w_2 - a_1 w_1 \neq 0$, και συνεπώς υπάρχει κάποιο $j = 2, \ldots, n$ για το οποίο $a_j \neq 0$. Θέτουμε $S_2 = (S_1 \setminus \{v_j\}) \cup \{w_2\}$, και υποθέτουμε οτι

$$S_2 = \{w_1, w_2, v_3, \ldots, v_n\} .$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο υποθέτουμε ότι, για $m < k$, έχουμε κατασκευάσει το σύνολο $S_m = \{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$, το οποίο παράγει το $V$. Θεωρούμε το διάνυσμα $w_{m+1}$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του $S_m$, και έχουμε

$$w_{m+1} - (a_1 w_1 + \ldots + a_m w_m) = a_{m+1} v_{m+1} + \ldots + a_n v_n \,.$$

Αφού τα $w_1, \ldots, w_{m+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, η δεξιά πλευρά δεν είναι ίση με το μηδενικό διάνυσμα. Συνεπώς $m < n$ και υπάρχει $j = m+1, \ldots, n$ τέτοιο ώστε $a_j \neq 0$. Συμπεραίνουμε οτι το σύνολο $S_{m+1} = (S_m \setminus \{v_j\}) \cup \{w_{m+1}\}$ παράγει το $V$.

Αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί μέχρι να κατασκευάσουμε το σύνολο

$$S_k = \{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\} \,,$$

το οποίο παράγει το διανυσματικό χώρο $V$.

□

**Πόρισμα 2.9** *Ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο σε ένα διανυσματικό χώρο δεν μπορεί να έχει περισσότερα στοιχεία από ένα σύνολο που παράγει το χώρο.*

□

**Πόρισμα 2.10** *Εάν $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ είναι βάσεις ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου, τότε $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.*

**Απόδειξη.** Από το Θεώρημα Αντικατάστασης, Θεώρημα 2.8, και οι δύο βάσεις έχουν πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Υποθέτουμε οτι $\mathcal{B}$ έχει $n$ στοιχεία και η $\mathcal{B}'$ έχει $n'$ στοιχεία. Αφού το σύνολο $\mathcal{B}'$ παράγει το διανυσματικό χώρο, και $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, $n \leq n'$. Παρόμοια το $\mathcal{B}$ παράγει το χώρο και το $\mathcal{B}'$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα $n' \leq n$. Συνεπώς $n = n'$.

□

**Πρόταση 2.11** *Εάν ο διανυσματικός χώρος $V$ παράγεται από το πεπερασμένο σύνολο $S$, και $F$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $S$, τότε υπάρχει μία βάση $\mathcal{B}$ του $V$ τέτοια ώστε*

$$F \subseteq \mathcal{B} \subseteq S \,.$$

**Απόδειξη.** Έστω $\{v_1, \ldots, v_k\}$ το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $F$, και

$$S = \{v_1, \, \ldots, \, v_k, \, w_1, \, \ldots, \, w_m\} \,.$$

Εάν το $S$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε $S$ είναι βάση του $V$, και θέτουμε $\mathcal{B} = S$. Εάν το $S$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε μπορούμε να εκφράσουμε το μηδενικό διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του $S$, με τουλάχιστον ένα συντελεστή διαφορετικό από το 0:

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k + b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m = 0 \,.$$

Εάν $a_i = 0$ για όλα τα $i = 1, \ldots, k$, τότε υπάρχει κάποιο $j = 1, \ldots, m$ για το οποίο $b_j \neq 0$. Εάν $a_i \neq 0$ για κάποιο $i = 1, \ldots, k$, τότε, από την γραμμική ανεξαρτησία των $v_1, \ldots, v_n$, συμπεραίνουμε οτι $a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k \neq 0$, και συνεπώς πάλι υπάρχει κάποιο $j = 1, \ldots, m$ για το οποίο $b_j \neq 0$. Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει κάποιο $j = 1, \ldots, m$ τέτοιο ώστε $w_j$ έχει μη μηδενικό συντελεστή, και από το Λήμμα Γραμμικής Εξάρτησης, Λήμμα 2.2, το σύνολο $S_1 = S \setminus \{w_j\}$ παράγει όλο το χώρο $V$. Εάν $S_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, θέτουμε $\mathcal{B} = S_1$. Διαφορετικά, επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία και διαγράφουμε κάποιο άλλο από τα περιττά $w_j$. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί το πολύ $m$ φορές, και καταλήγει σε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο που παράγει το $V$, δηλαδή τη ζητούμενη βάση $\mathcal{B}$.

$\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα ισχύει σε κάθε διανυσματικό χώρο, αλλά εδώ θα το αποδείξουμε μόνο για πεπερασμένα παραγόμενους διανυσματικούς χώρους. Στην περίπτωση μη πεπερασμένα παραγόμενων χώρων, η ύπαρξη βάσης είναι συνέπεια του Αξιώματος Επιλογής (δες Θεμέλια των Μαθηματικών, Επίλογος).

**Θεώρημα 2.12** *Κάθε διανυσματικός χώρος $V$ περιέχει μία βάση. Ειδικότερα, κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο του $V$ μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση του χώρου $V$, και κάθε σύνολο που παράγει το διανυσματικό χώρο $V$ περιέχει μία βάση του $V$.*

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε οτι ο διανυσματικός χώρος $V$ παράγεται από το πεπερασμένο σύνολο $S$.

Θεωρούμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $F$ στο $V$ (το οποίο μπορεί να είναι και το κενό σύνολο) και εφαρμόζουμε την Πρόταση 2.11 στο πεπερασμένο παράγον σύνολο $S \cup F$ και στο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $F$, για να κατασκευάσουμε μία βάση $\mathcal{B}$ του $V$, με $F \subseteq \mathcal{B}$.

$\square$

# Διάσταση

**Ορισμός.** Έστω διανυσματικός χώρος $V$. Η **διάσταση** του $V$ συμβολίζεται $\dim V$ και ορίζεται ως εξής:

$$\dim V = \begin{cases} 0 & \text{εάν } V = \{0\} \\ n & \text{εάν υπάρχει βάση του } V \text{ με } n \text{ στοιχεία} \\ \infty & \begin{array}{l}\text{εάν για κάθε } m \in \mathbb{N}, \text{ υπάρχει γραμμικά} \\ \text{ανεξάρτητο υποσύνολο του } V \text{ με } m \text{ στοιχεία}\end{array} \end{cases}$$

Λέμε οτι ο διανυσματικός χώρος $V$ έχει **πεπερασμένη διάσταση** εάν $\dim V \in \mathbb{N}_0$, ενώ ονομάζουμε **απειροδιάστατο** ένα χώρο για τον οποίο $\dim V = \infty$.

Είναι φανερό οτι ένας χώρος είναι πεπερασμένα παραγόμενος εάν και μόνον εάν έχει πεπερασμένη διάσταση. Γι' αυτό το λόγο, ο όρος πεπερασμένα παραγόμενος δεν χρησιμοποιείται για διανυσματικούς χώρους, και αντικαθίσταται από τον όρο χώρος πεπερασμένης διάστασης.

**Παράδειγμα 2.12** Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^n$ τα διανύσματα $e_j$ για $j = 1, 2, \ldots, n$, τα οποία έχουν 1 στη θέση $j$ και 0 σε όλες τις άλλες θέσεις. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $\delta_{i\,j}$ του Kronecker, όπου

$$\delta_{i\,j} = \begin{cases} 1 & \text{εάν } i = j \\ 0 & \text{εάν } i \neq j \end{cases}$$

έχουμε $e_j = (\delta_{1\,j}, \delta_{2\,j}, \ldots, \delta_{n\,j})$. Το σύνολο $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{K}^n$, η οποία ονομάζεται **κανονική βάση** του $\mathbb{K}^n$.

Η ακόλουθη Πρόταση είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της διάστασης και της Πρότασης 2.7.

**Πρόταση 2.13** *Έστω διανυσματικός χώρος $V$ διάστασης $n$. Τότε*

1. *Κανένα σύνολο με περισσότερα από $n$ στοιχεία δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο στο $V$.*

2. *Κανένα σύνολο με λιγότερα από $n$ στοιχεία δεν παράγει το $V$.*

□

**Θεώρημα 2.14** *Έστω διανυσματικός χώρος $V$ διάστασης $n$, και $S$ υποσύνολο του $V$ με $n$ στοιχεία. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *$S$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο στο $V$.*

2. *$S$ παράγει το διανυσματικό χώρο $V$.*

3. *$S$ είναι βάση του $V$.*

**Απόδειξη.** Σε ένα διανυσματικό χώρο διάστασης $n$, ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο με $n$ στοιχεία είναι μέγιστο, και συνεπώς είναι μία βάση, ενώ ένα παράγον σύνολο με $n$ στοιχεία είναι ελάχιστο, και συνεπώς είναι μία βάση.

□

**Πρόταση 2.15** *Έστω διανυσματικός χώρος $V$ διάστασης $n$, και $\{v_1, \ldots, v_n\}$ βάση του $V$. Εάν $\{w_1, \ldots, w_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $V$, τότε υπάρχουν $n-k$ στοιχεία $v_{i_j}$, για $j = 1, \ldots, n-k$, τέτοια ώστε*

$$\{w_1, \ldots, w_k, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-k}}\}$$

*είναι βάση του $V$.*

**Απόδειξη.** Απο το Θεώρημα Αντικατάστασης, Θεώρημα 2.8, υπάρχουν $v_{i_j}$ τέτοια ώστε $\{w_1, \ldots, w_k, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-k}}\}$ παράγει το $V$. Από το Θεώρημα 2.14, ένα παράγον σύνολο του $V$ με $n$ στοιχεία είναι βάση του $V$.

□

**Πρόταση 2.16** *Κάθε γραμμικός υπόχωρος $X$ ένος διανυσματικού χώρου $V$ πεπερασμένης διάστασης έχει πεπερασμένη διάσταση και $\dim X \le \dim V$. Εάν $\dim X = \dim V$, τότε $X = V$.*

**Απόδειξη.** Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 2.11 για να κατασκευάσουμε βάση του $X$, καθώς δεν είναι προφανές ότι ένας υπόχωρος ενός πεπερασμένα παραγόμενου χώρου είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Θα κατασκευάσουμε μία βάση του $X$ ως ένα μέγιστο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο, βασιζόμενοι στην ιδιότητα οτι κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $X$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $V$, και συνεπώς έχει το πολύ $\dim V$ στοιχεία.

Εάν $X = \{0\}$, τότε $\dim X = 0 \le \dim V$. Υποθέτουμε οτι $X \neq \{0\}$, και θεωρούμε μη μηδενικό διάνυσμα $x_1 \in X$. Θέτουμε $Y_1 = \langle x_1 \rangle$.

Υποθέτουμε οτι έχουμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο $\{x_1, \ldots, x_k\}$ του $X$, και $Y_k = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$. Εάν $X = Y_k$, τότε $\dim X = k \le \dim V$. Διαφορετικά, θεωρούμε διάνυσμα $x_{k+1} \in X \setminus Y_k$. Θα δείξουμε οτι $\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Θεωρούμε γραμμικό συνδυασμό των $x_1, \ldots, x_{k+1}$ που εκφράζει το μηδενικό διάνυσμα,

$$a_1 x_1 + \ldots + a_{k+1} x_{k+1} = 0\,.$$

Εάν $a_{k+1} \neq 0$, τότε $x_{k+1} \in Y_k$, που αντιφάσκει προς τις υποθέσεις μας. Άρα $a_{k+1} = 0$, και

$$a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k = 0\,.$$

Αλλά $\{x_1, \ldots, x_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και συνεπώς $a_1 = \cdots = a_k = 0$. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε διαδοχικά μεγαλύτερα γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του $X$. Αφού δεν υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του $V$ με περισσότερα από $\dim V$ στοιχεία, η διαδικασία τερματίζεται, και $X = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ για κάποιο $n \le \dim V$. Συνεπώς $\dim X = n \le \dim V$.

Εάν $\dim X = \dim V$, τότε μία βάση του $X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $V$ με $\dim V$ στοιχεία, και συνεπώς παράγει το $V$.

□

**Πρόταση 2.17** *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο $V$ πεπερασμένης διάστασης, και γραμμικούς υπόχωρους $X$ και $Y$. Τότε ισχύει η σχέση*

$$\dim(X+Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y).$$

**Απόδειξη.** Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση όπου $X \cap Y \neq \{0\}$. Διαλέγουμε μία βάση $\{z_1, \ldots, z_n\}$ του $X \cap Y$. Τότε υπάρχουν $x_1, \ldots, x_\ell \in X$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{z_1, \ldots, z_n, x_1, \ldots, x_\ell\}$ να αποτελεί βάση του $X$, και $y_1, \ldots, y_m \in Y$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{z_1, \ldots, z_n, y_1, \ldots, y_m\}$ να αποτελεί βάση του $Y$.

Θα αποδείξουμε οτι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \{z_1, \ldots, z_n, x_1, \ldots, x_\ell, y_1, \ldots, y_m\}$$

είναι βάση του $X + Y$.

Είναι εύκολο να δούμε οτι το $\mathcal{B}$ παράγει το $X+Y$. Για να δείξουμε οτι το $B$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό

$$a_1z_1 + \cdots + a_nz_n + b_1x_1 + \cdots + b_\ell x_\ell + c_1y_1 + \cdots c_my_m = 0.$$

Θέτουμε $v = a_1z_1 + \cdots + a_nz_n + b_1x_1 + \cdots + b_\ell x_\ell \in X$, και έχουμε $v = -(c_1y_1 + \cdots + c_my_m) \in Y$. Συμπεραίνουμε οτι το $v \in X \cap Y$ και συνεπώς υπάρχουν $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{K}$, τέτοια ώστε $v = d_1z_1 + \cdots + d_nz_n$.

Από τη γραμμική ανεξαρτησία των $z_1, \dots, z_n$, $x_1, \dots, x_\ell$, η έκφραση του $v$ ως γραμμικού συνδυασμού είναι μοναδική, και η ισότητα

$$a_1z_1 + \cdots + a_nz_n + b_1x_1 + \cdots + b_lx_l = d_1z_1 + \cdots + d_nz_n$$

συνεπάγεται οτι $a_i = d_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, και $b_j = 0$ για κάθε $j = 1, \dots, \ell$.

Παρόμοια, η γραμμική ανεξαρτησία των $z_1, \dots, z_n$, $y_1, \dots, y_m$ και η ισότητα

$$d_1z_1 + \cdots + d_nz_n = -(c_1y_1 + \cdots + c_my_m)$$

συνεπάγεται οτι $d_i = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, και $c_j = 0$ για κάθε $j = 1, \dots, m$. Καταλήγουμε οτι όλοι οι συντελεστές είναι 0, συνεπώς το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Η περίπτωση $X \cap Y = \{0\}$ αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο.

□

**Πόρισμα 2.18** *Το άθροισμα των γραμμικών υπόχωρων $X+Y$ είναι ευθύ εάν και μόνον εάν*

$$\dim X + Y = \dim X + \dim Y\,.$$

□

**Πρόταση 2.19** *Έστω διανυσματικός χώρος $V$ πεπερασμένης διάστασης. Εάν $X$ είναι υπόχωρος του $V$, υπάρχει υπόχωρος $Y$ του $V$, τέτοιος ώστε*

$$V = X \oplus Y\,.$$

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε οτι $\dim V = n$, $\dim X = m$, και θεωρούμε βάση του $X$, $\{x_1, \dots, x_m\}$. Από την Πρόταση 2.15, υπάρχουν διανύσματα $y_1, \dots, y_{n-m}$ του $V$ τέτοια ώστε $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-m}\}$ είναι βάση του $V$. Θέτουμε $Y = \langle y_1, \dots, y_{n-m}\rangle$. Προφανώς $X+Y = \langle x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-m}\rangle = V$, και από τη γραμμική ανεξαρτησία του $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-m}\}$ δείχνουμε οτι $X \cup Y = \{0\}$.

□

Όταν $X$ και $Y$ είναι υπόχωροι του $V$, και $V = X \oplus Y$, λέμε οτι ο $Y$ είναι **συμπληρωματικός υπόχωρος** του $X$ στον $V$.

**Άσκηση 2.1** Θεωρήστε διανυσματικό χώρο $X$ πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$ και διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$. Δείξτε οτι εάν $x_i = 0$ για κάποιο $i$, τότε τα $x_1, x_2, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
Δείξτε οτι εάν $x_i = x_j$ για κάποιο $i$ και $j$, με $i \neq j$, τότε τα $x_1, x_2, \ldots, x_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

**Άσκηση 2.2** Θεωρήστε το $\mathbb{R}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από το $\mathbb{Q}$. Δείξτε οτι το σύνολο 'διανυσμάτων' $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
Υπόδειξη: Δείξτε οτι εάν είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε $\sqrt{2/3} \in \mathbb{Q}$.

**Άσκηση 2.3** Θεωρήστε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $C^0(\mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με πράξεις κατά σημείο.
Δείξτε οτι τα στοιχεία $f_1, f_2, \ldots, f_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όπου $f_k(x) = \sin(kx)$.

**Άσκηση 2.4** Δείξτε οτι εάν το σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε το ίδιο ισχύει και για το $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n\}$.

**Άσκηση 2.5** Δίδονται τρία διανύσματα $u_1, u_2, u_3 \in V$. Δείξτε οτι εάν $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_2, u_3\rangle$, τότε τα $u_1, u_2, u_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
Ισχύει το αντίστροφο;

**Άσκηση 2.6** Δείξτε οτι στο χώρο $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με πραγματικούς συντελεστές, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο με $n$ στοιχεία.

**Άσκηση 2.7** Βρείτε δύο βάσεις του $\mathbb{K}^4$, που δεν περιέχουν κοινά διανύσματα, τέτοιες ώστε η μία να περιέχει τα διανύσματα $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$ και η άλλη τα διανύσματα $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$.

**Άσκηση 2.8** Δείξτε οτι τα διανύσματα $u_1 = (0, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0, 1)$ και $u_4 = (1, 1, 1, 0)$ αποτελούν βάση του $\mathbb{K}^4$. Εκφράστε το διάνυσμα $u = (1, 1, 1, 1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $u_1, u_2, u_3, u_4$.
Το ίδιο για το $w = (1, 0, 0, 0)$.

**Άσκηση 2.9** Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^4$ θεωρούμε τους υπόχωρους

$$U = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \,|\, z_1 = z_2,\, z_4 = 0\}$$

$$W = \langle (1, 0, 0, 0), (\mathrm{i}, 1, 0, 0), (0, \mathrm{i}, 1, 0)\rangle .$$

α′. Δείξτε οτι $U \subseteq W$.

β′. Βρείτε μία βάση του $W$ η οποία να περιέχει μία βάση του $U$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Αντικατάστασης. Στη δοθείσα βάση $w_1, w_2, w_3$ του $W$ μπορείτε να προσθέσετε ένα στοιχείο της βάσης του $U$, και κατόπιν να αφαιρέσετε ένα στοιχείο το οποίο γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, έστω $w_1 = a\,u_1 + b\,w_2 + c\,w_3$. Επαναλαμβάνοντας παίρνουμε τη ζητούμενη βάση, $u_1,\, u_2,\, w_3$.)

**Άσκηση 2.10** Στο χώρο $\mathbb{C}[x]$ των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{C}$, θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathbb{P}_k$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με $k$. Δείξτε οτι εάν $\deg p = k$, τότε η συλλογή $p, p', p'', \ldots, p^{(k)}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{P}_k$. Εάν $a \in \mathbb{C}$, εκφράστε το πολυώνυμο $q(x) = p(x+a)$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων αυτής της βάσης.

**Άσκηση 2.11** Υποθέστε οτι $X$ είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, και $Y$ είναι υπόχωρος του $X$. Δείξτε οτι εάν $\dim Y = \dim X$, τότε $Y = X$.
Βρείτε ένα παράδειγμα για να δείξετε οτι το συμπέρασμα δεν ισχύει εάν ο χώρος $X$ είναι απειροδιάστατος.

**Άσκηση 2.12**. Δίδονται οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$,

$$U = \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \,|\, x_1 = 2x_4,\, x_2 = x_3\}$$

και

$$V = \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \,|\, x_1 = x_4 = 0\}\,.$$

Βρείτε μία βάση του χώρου $U + V$.

**Άσκηση 2.13** Βρείτε μία βάση του διανυσματικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^5$,

$$V = \{(x_1,\, \ldots,\, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 = 3x_2,\, x_3 = 7x_4\}\,.$$

**Άσκηση 2.14** Δείξτε οτι το $\mathbb{C}$, θεωρούμενο ως διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, έχει διάσταση 2. Για ποιά $z \in \mathbb{C}$ αποτελεί το σύνολο $\{z,\, \bar{z}\}$ βάση του $\mathbb{C}$ πάνω από το $\mathbb{R}$;
Για ένα τέτοιο $z = a + \mathrm{i}b$, εκφράστε το $x + iy$ ως γραμμικό συνδυασμό των $z,\, \bar{z}$.

**Άσκηση 2.15** Με το συμβολισμό της Άσκησης 1.20, δείξτε οτι εάν $V$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$, και $\dim V < \infty$, τότε $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$.

**Άσκηση 2.16** Έστω διανυσματικός χώρος $V$ πάνω από το $\mathbb{R}$, και βάση του $V$, $\{u_1,\, u_2,\, u_3,\, u_4\}$. Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + 2u_2 + au_3 + u_4 \\ v_2 &= au_1 + u_2 + 2u_3 + 3u_4 \\ v_3 &= u_2 + bu_3\,. \end{aligned}$$

α΄. Προσδιορίστε τους αριθμούς $a$ και $b$ έτσι ώστε τα διανύσματα $v_1,\, v_2,\, v_3$ να είναι γραμμικά εξαρτημένα.

β΄. Βρείτε τη διάσταση του υπόχωρου $\langle v_1,\, v_2,\, v_3\rangle$ που παράγεται από τα $v_1,\, v_2$ και $v_3$ και προσδιορίστε μία βάση του.

**Άσκηση 2.17** Δείξτε οτι εάν τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και $y \notin \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, τότε τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

**Άσκηση 2.18** Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$, και $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ μία βάση του $V$. Εξετάστε εάν το σύνολο

$$\mathcal{B}' = \{v_1, v_1 + v_2, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_n\}$$

είναι βάση του $V$.
Ίδιο ερώτημα για το

$$\mathcal{B}'' = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1\}.$$

**Άσκηση 2.19** Υποθέτουμε οτι $Y$ και $Z$ είναι γραμμικοί υπόχωροι του διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης $V$. Δείξτε οτι το άθροισμα $Y + Z$ είναι ευθύ εάν και μόνον εάν $\dim(Y + Z) = \dim Y + \dim Z$.

**Άσκηση 2.20** Θεωρήστε διανυσματικό χώρο $V$ πάνω από το $\mathbb{R}$, γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_5$ στο $V$, και διάνυσμα $w = \sqrt{2}\, v_1 - \frac{1}{3}\, v_2 + v_3 + 3v_4 - \sqrt{3}\, v_5$.

α΄. Υπάρχουν δύο τρισδιάστατοι υπόχωροι $W_1$ και $W_2$ του $V$, τέτοιοι ώστε $W_1 \cap W_2 = \langle w \rangle$;

β΄. Υπάρχουν δύο διδιάστατοι υπόχωροι $U_1$ και $U_2$ του $V$, οι οποίοι δεν περιέχουν το $w$, και τέτοιοι ώστε $w \in U_1 + U_2$;

**Άσκηση 2.21** Θεωρούμε τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^5$,

$$X = \left\{(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 3x_1 = 2x_2 + x_3,\ x_4 = x_5\right\}$$

α΄. Βρείτε υπόχωρο $Y \subseteq \mathbb{R}^5$, τέτοιο ώστε $\mathbb{R}^5 = X \oplus Y$.

β΄. Βρείτε υπόχωρο $U \subseteq \mathbb{R}^5$, τέτοιο ώστε $(0, 1, -2, 1, 1) \in U$ και $\mathbb{R}^5 = X + U$.

**Άσκηση 2.22** Στο διανυσματικό χώρο $C^0([0, 1])$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 1]$, θεωρούμε τους υποχώρους $X$ των σταθερών συναρτήσεων και $Y$ των συναρτήσεων $g$ για τις οποίες $\int_0^1 g(t)dt = 0$. Δείξτε οτι $X$ και $Y$ είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι του $C^0([0, 1])$, δηλαδή οτι $C^0([0, 1]) = X \oplus Y$.

**Άσκηση 2.23** Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{P}_n$ των πολυωνύμων με μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού ίσου ή μικρότερου από $n$, θεωρούμε ένα πολυώνυμο $q$, με $\deg q = k < n$. Εάν $V$ είναι το σύνολο των πολυωνύμων στο $\mathbb{P}_n$ τα οποία διαιρούνται με το $q$, δείξτε οτι $V$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{P}_n$ και οτι $\mathbb{P}_{k-1}$ και $V$ είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι.

**Άσκηση 2.24** Πολυώνυμα Tchebychev ονομάζονται τα πολυώνυμα $T_n$, για $n = 0, 1, 2, \ldots$, τα οποία εκφράζουν το $\cos n\vartheta$ ως πολυώνυμο του $x = \cos\vartheta$.

α'. Δείξτε οτι ικανοποιείται η επαγωγική σχέση

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\,.$$

και συμπεράνετε οτι $T_n$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n$.

β'. Δείξτε οτι $T_0, T_1, \ldots, T_n$ αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{P}_n$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με $n$.

**Άσκηση 2.25** Θεωρούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$ και ένα υπόσωμα $\mathbb{K}'$, τέτοιο ώστε το $\mathbb{K}$ να είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{K}'$. Εάν $V$ είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{K}$, δείξτε οτι στο σύνολο $V$ ορίζεται δομή διανυσματικού χώρου πάνω από το $\mathbb{K}'$. Εάν συμβολίσουμε $\dim_{\mathbb{F}} X$ τη διάσταση του $X$ όταν το θεωρούμε ως διανυσματικό χώρο πάνω από το σώμα $\mathbb{F}$, δείξτε οτι

$$\dim_{\mathbb{K}'} V = \dim_{\mathbb{K}'} \mathbb{K} \dim_{\mathbb{K}} V.$$

**Άσκηση 2.26** Εάν συμβολίσουμε $0, 1, 2$ τα στοιχεία του $\mathbb{Z}_3$, δείξτε οτι το σύνολο $\{(1, 2), (2, 1)\} \subseteq (\mathbb{Z}_3)^2$ είναι γραμμικά εξαρτημένο πάνω από το σώμα $\mathbb{Z}_3$.

**Άσκηση 2.27** Βρείτε όλους τους διανυσματικούς υπόχωρους διάστασης 1 στο $(\mathbb{Z}_3)^2$.

# Κεφάλαιο 3

# Γραμμικές Απεικονίσεις

Θα εξετάσουμε απεικονίσεις από ένα διανυσματικό χώρο σε έναν άλλο. Από τη σκοπιά της γραμμικής άλγεβρας, μας ενδιαφέρουν οι απεικονίσεις που διατηρούν κάποια στοιχεία της δομής του διανυσματικού χώρου: αυτές που απεικονίζουν αθροίσματα σε αθροίσματα, και γινόμενα σε γινόμενα.

Γνωρίζουμε ήδη απεικονίσεις με αυτές τις ιδιότητες:

**Παράδειγμα 3.1** Εάν $A$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας, ο πολλαπλασιασμός ενός $x \in \mathbb{R}^n$, με τον πίνακα από τα αριστερά, δίδει ένα στοιχείο $Ax \in \mathbb{R}^m$ και, για $x$, $y \in \mathbb{R}^n$ και $a \in \mathbb{R}$, ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} A(x+y) &= Ax + Ay \\ A(ax) &= a\,Ax. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 3.2** Έστω $C^1(\mathbb{R})$ ο χώρος των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, που είναι παραγωγίσιμες σε όλο το $\mathbb{R}$, και έχουν συνεχή παράγωγο. Εάν $f \in C^1(\mathbb{R})$, η παραγώγιση $D$, που απεικονίζει την $f$ στην παράγωγό της $D(f) = f'$, είναι απεικόνιση από το $C^1(\mathbb{R})$ στο $C^0(\mathbb{R})$, και έχει τις ιδιότητες, για $f$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ και $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} D(f+g) &= Df + Dg \\ D(af) &= a\,Df \end{aligned}$$

**Ορισμός.** Θεωρούμε δύο διανυσματικούς χώρους $V$ και $U$ πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Η απεικόνιση $L : V \to U$ ονομάζεται **γραμμική** εάν για κάθε $v$, $w \in V$ και $a \in \mathbb{K}$, ισχύει

$$\begin{aligned} L(v+w) &= L(v) + L(w) \\ L(av) &= a\,L(v) \end{aligned}$$

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει οτι μπορούμε να συνδυάσουμε τον έλεγχο των δύο συνθηκών σε μία. Η απόδειξη του βασίζεται στην επιλογή κατάλληλων τιμών του $a$ και του $w$.

**Λήμμα 3.1** *Η απεικόνιση $L$ είναι γραμμική εάν και μόνον εάν , για κάθε $v, w \in V$ και $a \in \mathbb{K}$,*

$$L(av + w) = aL(v) + L(w)\,.$$

**Άσκηση 3.1** Γράψτε την απόδειξη του Λήμματος.

**Παράδειγμα 3.3** Η **μηδενική** απεικόνιση $\mathbf{0} : V \to W$, η οποία απεικονίζει κάθε διάνυσμα του $V$ στο μηδενικό διάνυσμα του $W$, $\mathbf{0}(v) = 0$, είναι γραμμική.

**Παράδειγμα 3.4** Η **ταυτοτική** απεικόνιση $\mathbf{I}_V : V \to V$, η οποία απεικονίζει κάθε διάνυσμα του $V$ στον εαυτό του, $\mathbf{I}_V(v) = v$, είναι γραμμική.

**Παράδειγμα 3.5** Για κάθε $a \in \mathbb{K}$, η απεικόνιση $T_a : V \to V$, η οποία πολλαπλασιάζει κάθε διάνυσμα με τον αριθμό $a$, $T_a(v) = a\,v$, είναι γραμμική. Παρατηρούμε οτι η απεικόνιση $\mathbf{0} : V \to V$ είναι ίση με την $T_0 : V \to V$, ενώ η $\mathbf{I} : V \to V$ είναι ίση με την $T_1 : V \to V$.

**Παράδειγμα 3.6** Για κάθε $m \times n$ πίνακα $A$, η απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, η οποία πολλαπλασιάζει κάθε διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ με τον πίνακα $A$ από τα αριστερά, $T_A(x) = Ax$, είναι γραμμική.

**Παράδειγμα 3.7** Η παραγώγιση, $D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$, η οποία απεικονίζει κάθε διαφορίσιμη απεικόνιση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$, στην παράγωγο της, $D(f) = f'$, είναι γραμμική απεικόνιση.

**Παράδειγμα 3.8** Η ολοκλήρωση, $I : C^0([0,\,1]) \to \mathbb{R}$, η οποία απεικονίζει κάθε συνεχή απεικόνιση στο διάστημα $[0,\,1]$, στο ολοκλήρωμά της στο $[0,\,1]$,

$$I(f) = \int_0^1 f(t)dt\,,$$

είναι γραμμική απεικόνιση. Πράγματι, για κάθε $f,\,g \in C^0[0,\,1]$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} I(af+g) &= \int_0^1 (af(t) + g(t))\,dt \\ &= a\int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 g(t)dt \\ &= aI(f) + I(g) \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 3.9** Στο χώρο των πολυωνύμων, ο πολλαπλασιασμός με ένα σταθερό μονώνυμο είναι γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε το μονώνυμο $bx^m$, και ορίζουμε την απεικόνιση $T_{bx^m} : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ με

$$T_{bx^m}\,(q(x)) = bx^m\, q(x)$$

Εάν $q(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, τότε

$$T_{bx^m}\,(q(x)) = ba_0 x^m + \cdots + ba_n x^{m+n}\,,$$

και μπορείτε εύκολα να ελέγξετε οτι $T_{bx^m}$ είναι γραμμική απεικόνιση.

**Παράδειγμα 3.10** Στο χώρο $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ των ακολουθιών με όρους στο $\mathbb{K}$, ορίζουμε την απεικόνιση shift, $s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, με

$$(a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots) \mapsto (a_2,\, a_3,\, a_4, \ldots)\,,$$

ή, πιο αυστηρά, $s\,((a_n)) = (b_n)$, όπου $b_n = a_{n+1}$. Η απεικόνιση shift είναι γραμμική.

Θα εξετάσουμε παραδείγματα απεικονίσεων που δεν είναι γραμμικές.

**Παράδειγμα 3.11** Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$ *δεν είναι γραμμική* εάν $b \neq 0$, παρ' όλο που το γράφημα της είναι μία ευθεία. Γενικότερα, οι μόνες πολυωνυμικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι γραμμικές είναι τα μονώνυμα βαθμού 1. Έτσι η $f(x) = 3x$ είναι γραμμική, αλλά οι $g(x) = 3x + 2$ και $h(x) = 2x^2$, δεν είναι γραμμικές.

**Παράδειγμα 3.12** Εάν $A$ είναι $m \times n$ πίνακας, και $b \in \mathbb{R}^m$, η απεικόνιση $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax + b$ δεν είναι γραμμική εάν $b \neq 0$.

Μπορούμε να βρούμε συναρτήσεις που ικανοποιούν τη μία από τις δύο συνθήκες αλλά όχι την άλλη.

**Παράδειγμα 3.13** Στο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε

$$f(x_1,\, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1}{x_2}(x_1,\, x_2) & \text{εάν } x_2 \neq 0 \\ (0,\, 0) & \text{εάν } x_2 = 0. \end{cases}$$

Η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ικανοποιεί τη ιδιότητα $f(ax) = af(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$, αλλά δεν ικανοποιεί προσθετική ιδιότητα.

Η γραμμικότητα μιας απεικόνισης εξαρτάται με ουσιαστικό τρόπο από το σώμα πάνω από το οποίο ορίζονται οι διανυσματικοί χώροι. Στο επόμενο παράδειγμα, η απεικόνιση ικανοποιεί την προσθετική ιδιότητα, αλλά η επαλήθευση της πολλαπλασιαστικής ιδιότητας εξαρτάται από το σώμα ορισμού.

**Παράδειγμα 3.14** Θεωρούμε το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από $\mathbb{C}$. Γράφουμε $z = x + \mathrm{i}y$ για ένα στοιχείο $z \in \mathbb{C}$ όταν το θεωρούμε ως διάνυσμα, και $w$ για ένα στοιχείο $w \in \mathbb{C}$ όταν το θεωρούμε ως αριθμό. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$L : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \bar{z} = x - \mathrm{i}y\,.$$

Η προσθετική ιδιότητα ισχύει.

$$L(z_1 + z_2) = \overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2\,.$$

Η πολλαπλασιαστική ιδιότητα δεν ισχύει: $L(wz) = \overline{(wz)} = \bar{w}\bar{z}$, το οποίο δεν είναι ίσο με $wL(z) = w\bar{z}$, εάν $\mathrm{Im}\,(w) \neq 0$.

Βλέπουμε οτι η $L$ δεν είναι γραμμική απεικόνιση όταν θεωρούμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς.

Εάν όμως θεωρήσουμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}_\mathbb{R}$ πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς, τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$L(az) = a\bar{z} = aL(z)$$

και η $L : \mathbb{C}_\mathbb{R} \to \mathbb{C}_\mathbb{R}$ είναι γραμμική.

**Παράδειγμα 3.15** Εάν $V$ και $W$ είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, $L : V \to W$ και $M : V \to W$ είναι γραμμικές απεικονίσεις και $a \in \mathbb{K}$, τότε οι απεικονίσεις

$$L + M : V \to W : v \mapsto L(v) + M(v)$$

και

$$aL : V \to W : v \mapsto aL(v)$$

είναι επίσης γραμμικές.

Το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από το διανυσματικό χώρο $V$ στο $W$ συμβολίζεται $\mathcal{L}(V, W)$ ή $\mathrm{Hom}\,(V, W)$. Με τις παραπάνω πράξεις $\mathcal{L}(V, W)$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$.

**Άσκηση 3.2** Ελέγξτε οτι $L+M$ και $aL$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, και οτι $\mathcal{L}(V, W)$ είναι πράγματι διανυσματικός χώρος.

Στα επόμενα αποτελέσματα αποδεικνύουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες των γραμμικών απεικονίσεων. Ειδικότερα στο Λήμμα 3.2, 2 και 3 δείχνουμε οτι μια γραμμική απεικόνιση μπορεί να χαλάσει τη γραμμική ανεξαρτησία μιας συλλογής διανυσμάτων, αλλά δεν μπορεί μια γραμμικά εξαρτημένη συλλογή να την κάνει γραμμικά ανεξάρτητη.

**Λήμμα 3.2** *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους $V$ και $W$, και γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$.*

1. *$L(0) = 0$.*
2. *Εάν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε τα $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.*
3. *Εάν $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

**Απόδειξη.** Εάν $v \in V$, τότε $0v = 0$ και $L(0) = L(0v) = 0L(v) = 0$.

Θεωρούμε το γραμμικό συνδυασμό $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$. Εάν αυτός είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, τότε

$$a_1L(v_1) + \cdots + a_nL(v_n) = L(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = L(0) = 0\,.$$

Συνεπώς εάν υπάρχει μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$ που εκφράζει το 0, τότε το ίδιο ισχύει και για τα $L(v_1), \ldots, L(v_n)$.

Αντιθέτως, εάν το μηδενικό διάνυσμα δεν εκφράζεται ως μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $L(v_1), \ldots, L(v_n)$, τότε το ίδιο ισχύει και για τα $v_1, \ldots, v_n$.

□

**Λήμμα 3.3** *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους $V$ και $W$, γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$, και γραμμικούς υπόχωρους $X \subseteq V$ και $Y \subseteq W$.*

1. *Η εικόνα $L(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $W$, και η αντίστροφη εικόνα $L^{-1}(Y)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $V$.*
2. $\dim(L(X)) \leq \dim X$.

**Απόδειξη.** Εάν $y_1$, $y_2 \in L(X)$, υπάρχουν διανύσματα $x_1$, $x_2 \in X$ τέτοια ώστε $L(x_1) = y_1$ και $L(x_2) = y_2$. Από τη γραμμικότητα της $L$, $y_1 + y_2 = L(x_1 + x_2) \in L(X)$ και $ay_1 = L(ax_1) \in L(X)$. Συμπεραίνουμε οτι $L(X)$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου $W$, και συνεπώς $L(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος. Παρόμοια, εάν $x_1$, $x_2 \in L^{-1}(Y)$, τότε $L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) \in Y$ και $L(ax_1) = aL(x_1) \in Y$ και συνεπώς $L^{-1}(Y)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $V$.

Από το 1 γνωρίζουμε οτι $L(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος. Εάν $X = \{0\}$, τότε $L(X) = \{0\}$, και $\dim L(X) = 0 = \dim X$. Κατόπιν υποθέτουμε οτι $0 < \dim X < \infty$. Θεωρούμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{y_1, \ldots, y_n\}$ στο $L(X)$, και διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$ στο $X$ τέτοια ώστε $L(x_i) = y_i$, για $i = 1, \ldots, n$. Από το Λήμμα 3.2, 3, τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και συνεπώς $n \leq \dim X$. Αυτό ισχύει για κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο $L(X)$, άρα το $L(X)$ έχει πεπερασμένη διάσταση και $\dim L(X) \leq \dim X$.

□

Εάν $L : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση, ο υπόχωρος $L(V) \subseteq W$ ονομάζεται **εικόνα** της $L$, και συμβολίζεται $\operatorname{im} L$. Η διάσταση της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης $L$ ονομάζεται **τάξη** της $L$ και συμβολίζεται $\operatorname{rank} L$. Ο υπόχωρος $L^{-1}(\{0\}) \subseteq V$ ονομάζεται **πυρήνας** της $L$, και συμβολίζεται $\ker L$.

**Πρόταση 3.4** *Η γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ είναι ενεικονική εάν και μόνον εάν* $\ker L = \{0\}$.

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε οτι η $L$ είναι ενεικονική (ή 'ένα προς ένα'). Εάν $v \in \ker L$, τότε $L(v) = 0 = L(0)$, και συνεπώς $v = 0$. Άρα $\ker L = \{0\}$. Αντιστρόφως, υποθέτουμε οτι $\ker L = \{0\}$. Εάν $L(v) = L(u)$, τότε $L(v - u) = 0$, άρα $v - u \in \ker L = \{0\}$, και συνεπώς $v = u$. Άρα η $L$ είναι ενεικονική.

□

**Παράδειγμα 3.16** Ο πυρήνας της μηδενικής απεικόνισης $\mathbf{0} : V \to W$ είναι όλο το πεδίο ορισμού, $\ker \mathbf{0} = V$. Η εικόνα της είναι ο μηδενικός υπόχωρος του $W$, $\operatorname{im} \mathbf{0} = \{0\} \subseteq W$.

**Παράδειγμα 3.17** Ο πυρήνας της απεικόνισης παραγώγισης $D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο όλων των σταθερών συναρτήσεων,

$$\ker D = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid \text{υπάρχει } c \in \mathbb{R} \text{ τέτοιο ώστε } f(t) = c \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}\}.$$

Η εικόνα της είναι όλο το σύνολο $C^0(\mathbb{R})$, αφού για κάθε συνάρτηση $f$ που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, υπάρχει αντιπαράγωγος

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt\,.$$

Συνεπώς $\operatorname{im} D = C^0(\mathbb{R})$.

**Παράδειγμα 3.18** Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα $A$, και τη γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L(x) = Ax$. Ο πυρήνας της $L$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων $x$ του $\mathbb{R}^n$ για τα οποία $Ax = 0$, δηλαδή ο μηδενόχωρος του πίνακα $A$,

$$\ker L = \mathcal{N}(A)\,.$$

Η εικόνα της $L$ είναι ο χώρος όλων των διανυσμάτων $y \in \mathbb{R}^m$ για τα οποία υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ax = y$, δηλαδή ο χώρος στηλών του $A$,

$$\operatorname{im} L = \mathcal{R}(A)\,.$$

Η απεικόνιση $L$ είναι *ενεικονική* εάν και μόνον εάν $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, δηλαδή όταν ο πίνακας $A$ έχει τάξη $n$. Η απεικόνιση $L$ είναι *επεικονική* εάν και μόνον εάν $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m$, δηλαδή όταν ο πίνακας $A$ έχει τάξη $m$, (δες Γραμμική Άλγεβρα Ι, Κεφάλαιο 3).

**Παράδειγμα 3.19** Η απεικόνιση shift, $s : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ δεν είναι ενεικονική. Ο πυρήνας της είναι ο υπόχωρος όλων των ακολουθιών $(a_n)$ για τις οποίες $a_n = 0$ για $n \geq 2$. Η εικόνα της είναι όλος ο χώρος $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, και η $s$ είναι επεικόνιση.

Γνωρίζουμε οτι η διάσταση του μηδενόχωρου και η διάσταση του χώρου στηλών ενός $m \times n$ πίνακα ικανοποιούν τη σχέση

$$n = \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A)\,.$$

Συνεπώς για την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L(x) = AX$, ισχύει

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \ker L + \dim \operatorname{im} L\,.$$

Θα δείξουμε οτι η ανάλογη σχέση ισχύει για κάθε γραμμική απεικόνιση με πεδίο ορισμού πεπερασμένης διάστασης.

**Θεώρημα 3.5** *Εάν $L : V \to W$, είναι γραμμική απεικόνιση, και $\dim V < \infty$, τότε ισχύει η σχέση*

$$\dim V = \dim \ker L + \dim \operatorname{im} L\,.$$

**Απόδειξη.** Ο πυρήνας $\ker L$ είναι υπόχωρος του $V$, και από την Πρόταση 2.16, $\dim \ker L < \infty$. Έχουμε ήδη δείξει, στο Λήμμα 3.3, 2, οτι $\dim L(V) \leq \dim V$, συνεπώς $\dim \operatorname{im} L < \infty$. Θεωρούμε βάση $\{w_1, \ldots, w_m\}$ της εικόνας $\operatorname{im} L$, και βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του πυρήνα $\ker L$, και διανύσματα $v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}$ τέτοια ώστε, για κάθε $i = 1, \ldots, m$, $L(v_{n+i}) = w_i$. Θα δείξουμε οτι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n,\, v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}\}$$

είναι βάση του $V$.

Πρώτα δείχνουμε οτι το $\mathcal{B}$ παράγει το $V$. Έστω $v \in V$. Τότε $L(v) \in \operatorname{im} L$, και συνεπώς εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $w_1, \ldots, w_m$.

$$\begin{aligned} L(v) &= a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m \\ &= a_1 L_1(v_{n+1}) + \cdots + a_m L_m(v_{n+m}) \\ &= L(a_1 v_{n+1} + \cdots + a_m v_{n+m}) \,. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε οτι $v - (a_1 v_{n+1} + \cdots + a_m v_{n+m}) \in \ker L$, και συνεπώς εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$,

$$v - (a_1 v_{n+1} + \cdots + a_m v_{n+m}) = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n \,.$$

Άρα $v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n + a_1 v_{n+1} + \cdots + a_m v_{n+m}$, και $v \in \langle v_1, \ldots, v_{n+m} \rangle$. Συνεπώς $V = \langle v_1, \ldots, v_{n+m} \rangle$.

Για να δείξουμε οτι $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, υποθέτουμε οτι $a_1 v_1 + \cdots + a_{n+m} v_{n+m} = 0$. Αλλά τότε

$$a_{n+1} v_{n+1} + \cdots + a_{n+m} v_{n+m} = -(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) \,.$$

Εφαρμόζοντας την απεικόνιση $L$ στις δύο πλευρές έχουμε

$$a_{n+1} w_1 + \cdots + a_{n+m} w_m = 0 \,.$$

Όμως $\{w_1, \ldots, w_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και συνεπώς $a_{n+1} = \cdots = a_{n+m} = 0$. Αλλά τότε $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$, και από τη γραμμική ανεξαρτησία του $\{v_1, \ldots, v_n\}$ έχουμε $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Συμπεραίνουμε οτι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του $V$, και συνεπώς

$$\dim V = n + m = \dim \ker L + \dim \operatorname{im} L \,.$$

□

**Πόρισμα 3.6** *Εάν* $\dim V > \dim W$*, τότε δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση από το* $V$ *στο* $W$ *που να είναι ενεικονική.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$. Εάν $\dim V < \infty$, τότε από το Θεώρημα 3.5, $\dim \ker L > 0$, και από την Πρόταση 3.4 η $L$ δεν είναι ενεικόνιση.

Εάν $\dim V = \infty$ και $\dim W < \infty$, υπάρχει υπόχωρος $X$ του $V$, τέτοιος ώστε $\infty > \dim X > \dim W$. Ο περιορισμός της $L$ στον υπόχωρο $X$ δεν είναι ενεικονική απεικόνιση, και συνεπώς ούτε η $L$ είναι ενεικονική.

□

**Πόρισμα 3.7** *Εάν* $\dim V < \dim W$*, τότε δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση από το* $V$ *στο* $W$ *που να είναι επεικονική.*

□

**Πρόταση 3.8** *Εάν* $L : V \to W$ *και* $M : W \to U$ *είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε η σύνθεση* $M \circ L$ *είναι επίσης γραμμική απεικόνιση.*

**Απόδειξη.** Για κάθε $v_1$, $v_2 \in V$ και $a \in \mathbb{K}$, έχουμε

$$\begin{aligned} M \circ L(a\,v_1 + v_2) &= M\,(a\,L(v_1) + L(v_2)) \\ &= a\,M\,(L(v_1)) + M\,(L(v_2)) \\ &= a\,M \circ L(v_1) + M \circ L(v_2)\,. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε οτι $M \circ L$ είναι γραμμική απεικόνιση.

□

**Πρόταση 3.9** *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους $V$ και $W$ πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Εάν $\mathcal{B}$ είναι βάση του $V$ και $f : \mathcal{B} \to W$ είναι απεικόνιση, τότε υπάρχει ακριβώς μία γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ τέτοια ώστε για κάθε $v \in \mathcal{B}$, $L(v) = f(v)$.*

**Απόδειξη.** Αφού $\mathcal{B}$ είναι βάση του $V$, κάθε διάνυσμα $u \in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $\mathcal{B}$,

$$u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n\,. \tag{3.1}$$

Ορίζουμε $L(u) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$. Από τη μοναδικότητα του γραμμικού συνδυασμού 3.1, η $L$ ορίζεται με μοναδικό τρόπο για κάθε $u \in V$, και συνεπώς είναι απεικόνιση. Εύκολα ελέγχουμε οτι είναι γραμμική.

Για να δείξουμε οτι είναι μοναδική, θεωρούμε μία γραμμική απεικόνιση $M : V \to W$ τέτοια ώστε $M(v) = f(v)$ για κάθε $v \in \mathcal{B}$. Έαν $u \in V$, και $u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ για $v_i \in \mathcal{B}$, έχουμε

$$\begin{aligned} M(u) &= M(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) \\ &= a_1 M(v_1) + \cdots + a_n M(v_n) \\ &= a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) \\ &= L(u)\,. \end{aligned}$$

Συνεπώς $M = L$.

□

**Πρόταση 3.10** *Με τις υποθέσεις της Πρότασης 3.9,*

1. *Η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης $L : V \to W$ είναι ο υπόχωρος του $W$ που παράγεται από το σύνολο $f(\mathcal{B})$,*

2. *Η $L$ είναι ενεικονική εάν και μόνον εάν η συλλογή $f(v)$ για $v \in \mathcal{B}$, είναι γραμμικά ανεξάρτητη* [1].

**Απόδειξη.** Αφού για κάθε $u \in V$, η εικόνα $L(u)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $f(v_i)$, είναι προφανές οτι $\operatorname{im} L \subseteq \langle f(\mathcal{B}) \rangle$. Αντίθετα, εάν $w \in \langle f(\mathcal{B}) \rangle$, τότε $w = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$, για κατάλληλα $v_i \in \mathcal{B}$ και $a_i \in \mathbb{K}$, και συνεπώς

$$w = a_1 L(v_1) + \cdots + a_n L(v_n) = L(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) \in \operatorname{im} L\,.$$

[1] Αυτό σημαίνει οτι η απεικόνιση συνόλων $f : \mathcal{B} \to W$ είναι ενεικόνιση και το σύνολο $f(\mathcal{B})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $W$.

Για να δείξουμε το 2, παρατηρούμε οτι στην περίπτωση που $\mathcal{B}$ είναι άπειρο σύνολο, για να είναι η συλλογή $f(v)$, για $v \in \mathcal{B}$, γραμμικά ανεξάρτητη, πρέπει για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του $\mathcal{B}$, η συλλογή $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

Πρώτα δείχνουμε οτι εάν η συλλογή $f(v)$, $v \in \mathcal{B}$, δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητη, τότε η $L$ δεν είναι ενεικονική. Υποθέτουμε οτι υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ και $a_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n$, με $a_1 \neq 0$, τέτοια ώστε

$$a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) = 0\,.$$

Αφού $a_1 \neq 0$ και $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \neq 0$. Αλλά $L(v) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) = 0$. Συνεπώς η $L$ δεν είναι ενεικονική.

Αντίστροφα, δείχνουμε οτι εάν η $L$ δεν είναι ενεικονική, τότε η συλλογή $f(v)$, $v \in \mathcal{B}$, δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Θεωρούμε $v$, $u \in V$, με $v \neq u$, και έστω $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ και $u = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$ για κάποιο πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathcal{B}$ και $a_i$, $b_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Έστω οτι η $L$ δεν είναι ενεικονική, και $L(v) = L(u)$. Τότε $0 = L(v - u) = (a_1 - b_1) f(v_1) + \cdots + (a_n - b_n) f(v_n)$, αλλά τα $(a_i - b_i)$ δεν είναι όλα μηδέν, και συνεπώς η συλλογή $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ είναι γραμμικά εξαρτημένη.

$\square$

Αξίζει να διατυπώσουμε τις παραπάνω Προτάσεις στη ειδικότερη περίπτωση που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια, αυτή των χώρων πεπερασμένης διάστασης. Τότε μία βάση του $V$ είναι πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ και η Πρόταση 3.9 λέει οτι μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε συλλογή διανυσμάτων $w_1, \ldots, w_n$, και τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση για την οποία $L(v_i) = w_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Η εικόνα της $L$ είναι ο υπόχωρος $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle \in W$, και η $L$ είναι ενεικονική εάν και μόνον εάν η συλλογή $w_1, \ldots, w_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

## Ισομορφισμοί

Μια γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ ονομάζεται **ισομορφισμός** εάν η $L$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση (δηλαδή είναι ενεικονική και επεικονική), και η αντίστροφη απεικόνιση είναι επίσης γραμμική. Δηλαδή εάν υπάρχει $L^{-1} : W \to V$ τέτοια ώστε $L \circ L^{-1} = \mathbf{I}_W$, $L^{-1} \circ L = \mathbf{I}_V$, και για κάθε $w_1$, $w_2 \in W$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$L^{-1}(a\, w_1 + w_2) = a\, L^{-1}(w_1) + L^{-1}(w_2)\,.$$

Εάν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των διανυσματικών χώρων $V$ και $W$, λέμε οτι οι χώροι $V$ και $W$ είναι **ισομορφικοί**, και το συμβολίζουμε $V \cong W$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα δείχνει οτι η υπόθεση οτι $L^{-1}$ είναι γραμμική είναι περιττή. Η αντίστροφη συνάρτηση κάθε γραμμικής συνάρτησης είναι γραμμική.

**Λήμμα 3.11** *Η γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ είναι ισομορφισμός εάν και μόνον εάν είναι ενεικονική και επεικονική.*

**Απόδειξη.** Αφού η $L$ είναι αμφιμονοσήμαντη, υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση $L^{-1}$, και $L \circ L^{-1} = \mathbf{I}_W$.

Θεωρούμε $w_1,\, w_2 \in W$ και $a \in \mathbb{K}$. Τότε

$$L \circ L^{-1}(a\,w_1 + w_2) = \mathbf{I}_W(a\,w_1 + w_2) = a\,w_1 + w_2\,.$$

Επίσης, αφού η $L$ είναι γραμμική,

$$\begin{aligned} L\left(a\,L^{-1}(w_1) + L^{-1}(w_2)\right) &= a\,L\left(L^{-1}(w_1)\right) + L\left(L^{-1}(w_2)\right) \\ &= a\,w_1 + w_2\,. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$L\left(L^{-1}(a\,w_1 + w_2)\right) = L\left(a\,L^{-1}(w_1) + L^{-1}(w_2)\right)$$

και αφού η $L$ είναι ενεικονική,

$$L^{-1}(a\,w_1 + w_2) = a\,L^{-1}(w_1) + L^{-1}(w_2)\,.$$

□

Από την άποψη της Γραμμικής Άλγεβρας, δύο ισομορφικοί χώροι είναι πανομοιότυποι. Οποιαδήποτε ιδιότητα έχει ένα υποσύνολο $X$ του $V$ η οποία εκφράζεται αποκλειστικά μέσω γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του, την ίδια ιδιότητα έχει και η εικόνα $Y$ του υποσυνόλου $X$ στο $W$ μέσω του ισομορφισμού $L$.

Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης $V$ πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, $\dim V = n$, και μία βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ του $V$. Κάθε στοιχείο $w \in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$,

$$w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n\,.$$

Εάν τώρα θεωρήσουμε το $\mathcal{B}$ ως ένα διατεταγμένο σύνολο, με τη διάταξη που προκύπτει από τους δείκτες $1,\, 2,\, \ldots,\, n$, σε κάθε διάνυσμα $w \in V$ αντιστοιχεί το διατεταγμένο σύνολο των $n$ αριθμών του $\mathbb{K}$, $(a_1, \ldots, a_n)$.

Το αριθμητικό διάνυσμα $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ ονομάζεται **διάνυσμα συντεταγμένων** του $w$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\mathcal{B}$ και θα το συμβολίζουμε $w_{\mathcal{B}}$. Η αντιστοιχία $w \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$ είναι αμφιμονοσήμαντη: σε κάθε διάνυσμα του $V$ αντιστοιχεί μοναδικό διάνυσμα συντεταγμένων στο $\mathbb{K}^n$, και σε κάθε αριθμητικό διάνυσμα στο $\mathbb{K}^n$ αντιστοιχεί μοναδικό διάνυσμα στο $V$. Αυτή η αντιστοιχία είναι πολύ σημαντική, γιατί μας επιτρέπει, αφού επιλέξουμε μία διατεταγμένη βάση σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης $V$, να μεταφέρουμε ερωτήματα σχετικά με τα διανύσματα του $V$, σε ερωτήματα σχετικά με αριθμητικά διανύσματα του $\mathbb{K}^n$, όπου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις υπολογιστικές μεθόδους της άλγεβρας πινάκων.

**Παράδειγμα 3.20** Το διάνυσμα $u = (4,\, 5) \in \mathbb{R}^2$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B} = \{(2,\, 1),\, (-1,\, 1)\}$,

$$(4,\, 5) = a_1(2,\, 1) + a_2(-1,\, 1),$$

απ' όπου παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2a_1 - a_2 &= 4 \\ a_1 + a_2 &= 5\,, \end{aligned}$$

το οποίο έχει λύση $(a_1,\, a_2) = (3,\, 2)$. Πράγματι

$$(4,\, 5) = 3(2,\, 1) + 2(-1,\, 1)$$

Το διάνυσμα συντεταγμένων του $(4,\, 5)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι $u_{\mathcal{B}} = (3,\, 2)$.

**Λήμμα 3.12** *Η απεικόνιση $\iota_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ που ορίζει η παραπάνω αντιστοιχία είναι ισομορφισμός.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε την κανονική βάση $\{e_1, \ldots,\, e_n\}$ του $\mathbb{K}^n$. Θα δείξουμε οτι η απεικόνιση $\iota_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση που ορίζεται σύμφωνα με την Πρόταση 3.9 και απεικονίζει, για κάθε $i = 1, \ldots,\, n$, το διάνυσμα $v_i$ της βάσης $\mathcal{B}$ στο διάνυσμα $e_i \in \mathbb{K}^n$. Πράγματι, εάν $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$,

$$\iota_{\mathcal{B}}(v) = (a_1, \ldots,\, a_n) = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \,.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.10, η απεικόνιση $\iota_{\mathcal{B}}$ είναι επεικονική, εφ' όσον $\{e_1, \ldots,\, e_n\}$ παράγουν τον $\mathbb{K}^n$, και είναι ενεικονική εφ' όσον $\{e_1, \ldots,\, e_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο $\mathbb{K}^n$. Άρα $\iota_{\mathcal{B}}$ είναι ισομορφισμός

□

Διατυπώνουμε το επόμενο συμπέρασμα ως ένα Θεώρημα Δομής, δηλαδή ένα θεώρημα που ταξινομεί μία κατηγορία μαθηματικών αντικειμένων συγκρίνοντας τα με συγκεκριμένα αντικείμενα, τη δομή των οποίων καταλαβαίνουμε αρκετά ικανοποιητικά.

**Θεώρημα 3.13** *(Θεώρημα Δομής Διανυσματικών Χώρων Πεπερασμένης Διάστασης) Έστω $V$ διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και $\dim V = n$. Τότε ο $V$ είναι ισομορφικός με το χώρο $\mathbb{K}^n$,*

$$V \cong \mathbb{K}^n \,.$$

□

**Άσκηση 3.3** Δείξτε οτι κάθε γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ είναι πολλαπλασιασμός με ένα στοιχείο του $\mathbb{K}$, δηλαδή εάν $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, τότε υπάρχει $a \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $Lx = ax$, γιά κάθε $x \in \mathbb{K}$.

**Άσκηση 3.4** Δείξτε οτι ο πολλαπλασιασμός με πολυώνυμο $p(x)$,

$$T_{p(x)} : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x] : q(x) \mapsto p(x)q(x)\,,$$

είναι γραμμική απεικόνιση.

**Άσκηση 3.5** Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές, και βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα τους.

α'. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\qquad L(x, y) = (2x + 3y, x)$

β'. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\qquad L(x, y) = (y, x + y + 1)$

γ'. $L : C^0(a, b) \to C^0(a, b),\qquad L(f)(x) = (x^2 + 1)f(x)$

δ'. $L : C^0(a, b) \to C^0(a, b),\qquad L(f) = |f|.$

**Άσκηση 3.6** Δείξτε οτι δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε

$$\ker L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 = x_2,\, x_3 = x_4 = x_5\}\,.$$

**Άσκηση 3.7** Θεωρούμε την απεικόνιση

$$L : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$$

η οποία ορίζεται με $L(z, w) = 3z - w$.

α'. Δείξτε οτι η $L$ είναι γραμμική.

β'. Βρείτε τον υπόχωρο $\ker L$.

γ'. Βρείτε έναν υπόχωρο $U$ τέτοιο ώστε $U \oplus \ker L = \mathbb{C}^2$.

**Άσκηση 3.8** Θεωρούμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω απο το $\mathbb{R}$. Ποιές απο τις ακόλουθες απεικονίσεις $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμικές; Ποιές είναι ισομορφισμοί; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

α'. $(x, y) \mapsto x + \mathrm{i}y$

β'. $(x, y) \mapsto y + \mathrm{i}x$

γ'. $(x, y) \mapsto \mathrm{i}(x + y)$

δ'. $(x, y) \mapsto x + \mathrm{i}$

**Άσκηση 3.9** Υποθέτουμε οτι $X$ είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, και οτι $V$ είναι υπόχωρος. Δείξτε οτι κάθε γραμμική απεικόνιση $L : V \to Y$, μπορεί να επεκταθεί σε γραμμική απεικόνιση $\tilde{L} : X \to Y$, δηλαδή υπάρχει γραμμική απεικόνιση $\tilde{L}$ τέτοια ώστε $\tilde{L}u = Lu$ για κάθε $u \in V$.

**Άσκηση 3.10** Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$L(x,\, y,\, z,\, t) = (x + y,\, y - z,\, x + z)\,.$$

Δείξτε οτι η $L$ είναι γραμμική, βρείτε βάσεις για τον πυρήνα $\ker L$ και την εικόνα $\operatorname{im} L$, και υπολογίστε την τάξη $\operatorname{rank}(L)$.

**Άσκηση 3.11** Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$

$$L(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5) = (x_1{+}x_3,\, -2x_1{+}x_2{+}x_5,\, x_1{+}x_3{+}x_4{+}2x_5,\, -2x_1{+}x_2{+}x_4{+}3x_5)$$

α′. Βρείτε $4 \times 5$ πίνακα $A$ τέτοιο ώστε $L(x) = Ax$.

β′. Βρείτε βάσεις των υποχώρων $\ker L \subseteq \mathbb{R}^5$ και $\operatorname{im} L \subseteq \mathbb{R}^4$.

γ′. Βρείτε υπόχωρο $V$ του $\mathbb{R}^5$ τέτοιο ώστε $V \oplus \ker L = \mathbb{R}^5$.

δ′. Δείξτε οτι $L|_V : V \to \operatorname{im} L$ είναι ισομορφισμός.

**Άσκηση 3.12** Στον διανυσματικό χώρο $C^0(\mathbb{R})$ θεωρούμε την απεικόνιση $L : f \mapsto F$, όπου

$$F(x) = \int_0^x f(t)e^{-t^2}dt.$$

Δείξτε οτι $L$ είναι γραμμική απεικόνιση από το $C^0(\mathbb{R})$ στο $C^0(\mathbb{R})$. Είναι η $L$ επεικονική;

**Άσκηση 3.13** Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο $V$ πεπερασμένης διάστασης $n$, και γραμμικές απεικονίσεις $L$ και $M$ από τον $V$ στον εαυτό του, με τις ιδιότητες

α′. $L \circ M = 0$

β′. $L + M$ είναι ισομορφισμός

Δείξτε οτι $\operatorname{rank}(L) + \operatorname{rank}(M) = n$.

**Άσκηση 3.14** Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους $U$, $V$, $W$ και γραμμικές απεικονίσεις $L \in \mathcal{L}(U,\, W), M \in \mathcal{L}(U,\, V)$, τέτοιες ώστε $\ker M \subseteq \ker L$. Δείξτε οτι τότε υπάρχει γραμμική απεικόνιση $N \in \mathcal{L}(V,\, W)$, τέτοια ώστε $L = N \circ M$.

**Άσκηση 3.15** Θεωρούμε διανυσματικό χώρο $V$ πεπερασμένης διάστασης, και γραμμικές απεικονίσεις $L,\, M \in \mathcal{L}(V)$. Δείξτε ότι

$$|\operatorname{rank}(L) - \operatorname{rank}(M)| \le \operatorname{rank}(L + M) \le \operatorname{rank}(L) + \operatorname{rank}(M).$$

**Άσκηση 3.16** Στο χώρο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές θεωρούμε την απεικόνιση παράγωγο $D : p \mapsto p'$. Δείξτε οτι η $D$ είναι γραμμική επεικόνιση, αλλά δεν είναι ενεικόνιση. Τι συμπέρασμα βγάζετε για τη διάσταση του $\mathbb{R}[x]$;

**Άσκηση 3.17** Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους $U$, $V$, $W$ και γραμμικές απεικονίσεις $L \in \mathcal{L}(U, V)$, $M \in \mathcal{L}(V, W)$.

α′. Δείξτε οτι
$$\ker(M \circ L) \subseteq L^{-1}(\ker M \cap \operatorname{im} L)\,.$$
Εάν επι πλέον οι $U$, $V$, $W$ έχουν πεπερασμένη διάσταση, δείξτε οτι
$$\dim(\ker M \cap \operatorname{im} L) = r(L) - r(M \circ L)\,.$$

β′. Εάν $U = V = W$ και $L \circ M = M \circ L$, δείξτε οτι $L(\ker M) \subseteq \ker M$ και $L(\operatorname{im} M) \subseteq \operatorname{im} M$.

**Άσκηση 3.18** Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του $u = (6, -3, 1) \in \mathbb{R}^3$ ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (2, 1, -1), (2, 0, 0)\}$.

**Άσκηση 3.19** Βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του πολυωνύμου $p(x) = 3x^2 - 6x - 2$ ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{x^2, x - 1, 2x\}$ του $\mathbb{P}_2$.

**Άσκηση 3.20** Θεωρούμε διανυσματικό χώρο $V$ και δύο συμπληρωματικούς υπόχωρους $X$ και $Y$ του $V$. Αν $v \in V$ και $v = x+y$, με $x \in X$, $y \in Y$, ορίζουμε $P : V \to V$ με $P(v) = x$. Δείξτε οτι $P$ είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση, και οτι $P^2 = P$. Αυτή η απεικόνιση ονομάζεται προβολή του $V$ στον $Q$ παράλληλα προς τον $Y$.

**Άσκηση 3.21** Υποθέτουμε οτι $P : V \to V$ είναι γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $P^2 = P$. Μία τέτοια απεικόνιση ονομάζεται προβολή. Δείξτε οτι $\ker P$ και $\operatorname{im} P$ είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι του $V$, και οτι $P$ είναι η προβολή του $V$ στον υπόχωρο $\operatorname{im} P$ παράλληλα προς τον υπόχωρο $\ker P$.

Δώστε ένα παράδειγμα απεικόνισης $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοιας ώστε $\ker L$ και $\operatorname{im} L$ να είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι, αλλά η $L$ να μην είναι προβολή.

**Άσκηση 3.22** Θεωρούμε ένα διάνυσμα $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $v_1 + v_2 + v_3 = 1$. Δείξτε οτι η απεικόνιση
$$P : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x - (x_1 + x_2 + x_3)v$$
είναι μία προβολή. Βρείτε τους υπόχωρους $\ker P$ και $\operatorname{im} P$.

**Άσκηση 3.23** Επαληθεύστε οτι το σύνολο $V$ των $2\times 2$ πινάκων της μορφής $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ για $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ είναι διανυσματικός χώρος.

Δείξτε οτι η απεικόνιση $M : \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a+c & b \\ b & a+b+c \end{bmatrix}$ είναι γραμμική, και βρείτε βάσεις των υπόχωρων $\ker M$ και $\operatorname{im} M$.

**Άσκηση 3.24** Στο χώρο $\mathbb{R}[x]_n$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με $n$, θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}$,

$$L : p \mapsto \int_0^1 p(t)dt\,.$$

Θεωρούμε επίσης την απεικόνιση $Q : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_{n+1}$ η οποία απεικονίζει το πολυώνυμο $p(x)$ στο πολυώνυμο

$$q(x) = \int_0^x p(t)dt\,.$$

α′. Επαληθεύστε οτι η $L$ είναι γραμμική απεικόνιση, και βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της.

β′. Επαληθεύστε οτι η $Q$ είναι γραμμική απεικόνιση, και δείξτε οτι

$$\operatorname{im} Q = \langle x,\, x^2,\, \ldots,\, x^{n+1} \rangle\,.$$

γ′. Αποδείξτε οτι για κάθε $p \in \mathbb{R}[x]_n$, ισχύει $L(p) = 0$ εάν και μόνον εάν

$$Q(p) \in \langle x(x-1),\, x^2(x-1),\, \ldots,\, x^n(x-1) \rangle\,.$$

δ′. Βρείτε μία βάση του $\ker L$.

# Κεφάλαιο 4

# Κατασκευή νέων διανυσματικών χώρων

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα εξετάσουμε τρόπους να κατασκευάζουμε νέους διανυσματικούς χώρους. Οι σημαντικότερες κατασκευές τις οποίες θα μελετήσουμε είναι το ευθύ άθροισμα, το πηλίκο και ο δυϊκός χώρος.

## Ευθύ Αθροισμα

Θεωρούμε $V$ και $W$ διανυσματικούς χώρους πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Στο καρτεσιανό γινόμενο $V \times W = \{(v,\, w) \,|\, v \in V,\, w \in W\}$ ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με στοιχεία του $\mathbb{K}$ ως εξής: για $(v,\, w),\, (x,\, y) \in V \times W$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$(v,\, w) + (x,\, y) = (v + x,\, w + y) \qquad \text{και} \qquad a\,(v,\, w) = (a\,v,\, a\,w)\,.$$

Με αυτές τις πράξεις το σύνολο $V \times W$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, τον οποίο ονομάζουμε **(εξωτερικό) ευθύ άθροισμα** των $V$ και $W$, και συμβολίζουμε $V \oplus W$.

**Παράδειγμα 4.1** Το ευθύ άθροισμα $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ είναι ο διανυσματικός χώρος που συνήθως συμβολίζουμε $\mathbb{R}^2$. Στοιχεία του είναι τα διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών $(x,\, y)$, και οι πράξεις ορίζονται κατά συνιστώσα.

**Παράδειγμα 4.2** Εάν $V$ και $W$ είναι δύο διαφορετικοί διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, το ευθύ άθροισμα $V \oplus W$ είναι διαφορετικό από το ευθύ άθροισμα $W \oplus V$. Όμως τα δύο αθροίσματα είναι ισομορφικά:

$$V \oplus W \cong W \oplus V\,.$$

**Άσκηση 4.1** Δείξτε οτι η απεικόνιση $(v,\, w) \mapsto (w,\, v)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και γραμμική, και συνεπώς ορίζει έναν ισομορφισμό $C \,:\, V \oplus W \longrightarrow W \oplus V$.

**Παράδειγμα 4.3** Εάν $U$, $V$ και $W$ είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, το ευθύ άθροισμα $(U \oplus V) \oplus W$ και το ευθύ άθροισμα $U \oplus (V \oplus W)$ είναι ισομορφικά:

$$(U \oplus V) \oplus W \cong U \oplus (V \oplus W)\,.$$

**Άσκηση 4.2** Δείξτε οτι η απεικόνιση $((u, v), w)) \mapsto (u, (v, w))$ είναι αμφιμονοσήμαντη και γραμμική, και συνεπώς ορίζει έναν ισομορφισμό $D : (U \oplus V) \oplus W \longrightarrow U \oplus (V \oplus W)$.

Το ακόλουθο Λήμμα εξηγεί τη σχέση μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού ευθέως αθροίσματος.

**Λήμμα 4.1** *Εάν $X$ και $Y$ είναι γραμμικοί υπόχωροι του $V$, και $X \cap Y = \{0\}$, τότε το (εσωτερικό ευθύ) άθροισμα των $X$ και $Y$ είναι ισομορφικό με το (εξωτερικό) ευθύ άθροισμα:*

$$X + Y \cong X \oplus Y\,.$$

**Απόδειξη.** Εάν $v \in X + Y \subseteq V$, υπάρχουν μοναδικά $x \in X$ και $y \in Y$ τέτοια ώστε $v = x + y$. Ορίζουμε την απεικόνιση $L : X + Y \to X \oplus Y$ με $L(v) = (x, y)$. Ελέγχουμε οτι είναι αμφιμονοσήμαντη και γραμμική.

□

Προσέξτε τη διαφορά μεταξύ του ισομορφισμού στο Λήμμα 4.1 και του ισομορφισμού $V \cong \mathbb{K}^{\dim V}$ στο Θεώρημα 3.13. Ο ισομορφισμός $X + Y \cong X \oplus Y$ δεν βασίζεται σε κάποια επιλογή: τα $x$ και $y$ είναι μοναδικά καθορισμένα από τα δεδομένα του προβλήματος. Λέμε οτι αυτός είναι ένας **κανονικός ισομορφισμός**, ενώ ο ισομορφισμός $V \cong \mathbb{K}^{\dim V}$ δεν είναι κανονικός, αφού εξαρτάται από την επιλογή μίας βάσης του $V$.

**Λήμμα 4.2** *Εάν $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ και $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα (παράγοντα σύνολα, βάσεις) στους διανυσματικούς χώρους $V$ και $W$ αντίστοιχα, τότε*

$$\{(v_1, 0), (v_2, 0), \ldots, (v_k, 0), (0, w_1), (0, w_2), \ldots, (0, w_m)\}$$

*είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο (αντίστοιχα, παράγον σύνολο, βάση) του $V \oplus W$.*

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε οτι τα στοιχεία $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m$ του $\mathbb{K}$ ικανοποιούν τη σχέση

$$a_1(v_1, 0) + \cdots + a_k(v_k, 0) + b_1(0, w_1) + \cdots + b_m(0, w_m) = (0, 0)\,.$$

Τότε ισχύει $(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k, b_1w_1 + \cdots + b_mw_m) = (0, 0)$, και συνεπώς $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k = 0$ και $b_1w_1 + \cdots + b_mw_m = 0$.

Αν $\{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο $V$, συμπεραίνουμε οτι $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. Αντίστοιχα, αν $\{w_1, \ldots, w_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο $W$, $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$. Δείξαμε οτι

$$\{(v_1, 0), (v_2, 0), \ldots, (v_k, 0), (0, w_1), (0, w_2), \ldots, (0, w_m)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο $V \oplus W$.

Τώρα θεωρούμε στοιχείο $(v, w) \in V \oplus W$. Αν $\{v_1, \ldots, v_k\}$ είναι παράγον σύνολο του $V$, υπάρχουν $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ τέτοια ώστε $v = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$. Αντίστοιχα, αν $\{w_1, \ldots, w_m\}$ είναι παράγον σύνολο του $W$, υπάρχουν $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ τέτοια ώστε $w = b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m$. Συμπεραίνουμε οτι

$$(v, w) = a_1(v_1, 0) + \cdots + a_k(v_k, 0) + b_1(0, w_1) + \cdots + b_m(0, w_m),$$

και συνεπώς

$$\{(v_1, 0), (v_2, 0), \ldots, (v_k, 0), (0, w_1), (0, w_2), \ldots, (0, w_m)\}$$

είναι παράγον σύνολο του $V \oplus W$.

$\square$

Άμεση συνέπεια του Λήμματος είναι το ακόλουθο Θεώρημα:

**Θεώρημα 4.3** *Εάν $V$ και $W$ είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, τότε*

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W.$$

$\square$

Με το ευθύ άθροισμα δύο διανυσματικών χώρων $V$ και $W$ συνδέονται οι ακόλουθες γραμμικές απεικονίσεις:

1. Οι **κανονικές εμφυτεύσεις** του $V$ και του $W$ στο $V \oplus W$,

$$\begin{aligned} j_1 : V &\longrightarrow V \oplus W \ : \ v \mapsto (v, 0) \\ j_2 : W &\longrightarrow V \oplus W \ : \ w \mapsto (0, w). \end{aligned}$$

2. Οι **κανονικές προβολές** του $V \oplus W$ επί των $V$ και $W$,

$$\begin{aligned} p_1 : V \oplus W &\longrightarrow V \ : \ (v, w) \mapsto v \\ p_2 : V \oplus W &\longrightarrow W \ : \ (v, w) \mapsto w. \end{aligned}$$

# Χώρος πηλίκο

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο $V$ πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και γραμμικό υπόχωρο $X$ του $V$. Στο $V$ ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$v \sim w \quad \text{εάν και μόνον εάν} \quad v - w \in X.$$

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας αυτής της σχέσης το ονομάζουμε **πηλίκο** του $V$ με το $X$, και το συμβολίζουμε

$$V/X.$$

Την κλάση ισοδυναμίας του $v \in V$ ως προς αυτή τη σχέση τη συμβολίζουμε

$$v + X, \quad \text{ή} \quad \tilde{v}.$$

**Παράδειγμα 4.4** Στο $\mathbb{R}^3$, θεωρούμε τον υπόχωρο $X = \{(t,\, t,\, 2t)\,|\, t \in \mathbb{R}\}$. $X$ είναι η ευθεία που περνάει από τα σημεία $(0,\, 0,\, 0)$ και $(1,\, 1,\, 2)$. Η κλάση ισοδυναμίας του σημείου $(x,\, y,\, z)$ στο πηλίκο $\mathbb{R}^3/X$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων της μορφής

$$(x,\, y,\, z) + (t,\, t,\, 2t) \quad t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή είναι η ευθεία που περνάει από το $(x,\, y,\, z)$ και είναι παράλληλη προς τον $X$. Το σύνολο πηλίκο $\mathbb{R}^3/X$ είναι το σύνολο όλων των ευθειών στο $\mathbb{R}^3$ που είναι ίσες ή παράλληλες με την $X$.

Στο πηλίκο $V/X$ ορίζουμε τις πράξεις, για $v + X,\, y + X \in V/X,\, a \in \mathbb{K}$.

$$(v + X) + (w + X) = (v + w) + X$$

$$a\,(v + X) = a\,v + X\,.$$

**Λήμμα 4.4** *Με αυτές τις πράξεις $V/X$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω απο το $\mathbb{K}$.*

Ο διανυσματικός χώρος $V/X$ ονομάζεται **χώρος πηλίκο** του $V \bmod X$.
**Απόδειξη.** Μηδέν είναι η κλάση του $X = 0 + X$ και το αντίθετο του $v + X$ είναι $-(v + X) = (-v) + X$. Εύκολα ελέγχουμε τα υπόλοιπα αξιώματα.

□

Ορίζεται κανονική *επεικόνιση* $P : V \to V/X$, με $v \mapsto v+X$, η οποία είναι γραμμική: εάν $u,\, v \in V$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} P(au + v) &= (au + v) + X \\ &= a(u + X) + (v + X) \\ &= aP(u) + P(v)\,. \end{aligned}$$

**Θεώρημα 4.5** *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο $V$ πεπερασμένης διάστασης και υπόχωρο $X$ του $V$. Εάν $\{x_1,\, \ldots,\, x_k\}$ είναι βάση του $X$, και $\{x_1,\, \ldots,\, x_k,\, v_1,\, \ldots,\, v_m\}$ βάση του $V$, τότε $\{v_1 + X,\, \ldots,\, v_m + X\}$ αποτελεί βάση του $V/X$, και συνεπώς*

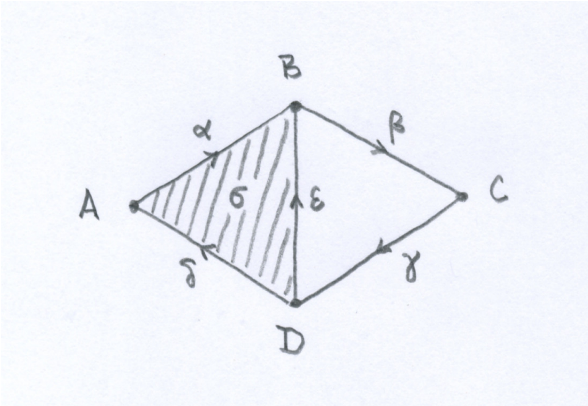
$$\dim(V/X) = \dim V - \dim X\,.$$

**Απόδειξη.** Εστω $v \in V$. Υπάρχουν $a_1,\, \ldots,\, a_k$ και $b_1,\, \ldots,\, b_m$ τέτοια ώστε $v = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k + b_1v_1 + \cdots + b_mv_m$. Τότε $v - (b_1v_1 + \cdots + b_mv_m) \in X$, άρα

$$\begin{aligned} v + X &= (b_1v_1 + \cdots + b_mv_m) + X \\ &= b_1(v_1 + X) + \cdots + b_m(v_m + X) \end{aligned}$$

άρα $\{v_1 + X,\, \cdots,\, v_m + X\}$ παράγουν το $V/X$.

Έστω $b_1(v_1 + X) + \cdots + b_m(v_m + X) = 0$. Τότε $b_1v_1 + \cdots + b_mv_m \in X$, άρα υπάρχουν $a_1,\, \cdots,\, a_k$ τέτοια ώστε $b_1v_1 + \cdots + b_mv_m = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$. Αλλά απο γραμμική ανεξαρτησία των $\{x_1,\, \cdots,\, x_k,\, v_1,\, \cdots,\, v_m\}$ έχουμε $a_1 = \cdots = a_k = b_1 = \cdots = b_m = 0$. Άρα το σύνολο $\{v_1 + X,\, \cdots,\, v_m + X\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και




αποτελεί βάση του $V/X$.

□

**Παράδειγμα 4.5** Θεωρούμε το 'πολύεδρο' του σχήματος, με μία έδρα $\sigma$, πέντε ακμές $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ και τέσσερεις κορυφές $A$, $B$, $C$, $D$.

Ορίζουμε τους διανυσματικούς χώρους

$$C_0 = \{a_1A + a_2B + a_3C + a_4D \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$C_1 = \{b_1\alpha + b_2\beta + \cdots + b_5\varepsilon \mid b_i \in \mathbb{R}\}$$
$$C_2 = \{s\sigma \mid s \in \mathbb{R}\}\,.$$

και τις γραμμικές απεικονίσεις

$$\partial_2 \,:\, C_2 \to C_1, \qquad \partial_1 \,:\, C_1 \to C_0$$

με $\partial_2(\sigma) = \alpha + \delta - \varepsilon$ και

$$\begin{aligned}
&\partial_1(b_1\alpha + \cdots + b_5\varepsilon) = \\
&= \; b_1(B-A) + b_2(C-B) + b_3(D-C) + b_4(A-D) + b_5(B-D) \\
&= \; (b_4 - b_1)A + (b_1 - b_2 + b_5)B + (b_2 - b_3)C + (b_3 - b_4 - b_5)D\,.
\end{aligned}$$

**Λήμμα 4.6 (Λήμμα Poincaré)**

$$\partial_1\partial_2 = 0\,.$$

**Απόδειξη.** $\partial_1\partial_2(\sigma) = \partial_1(\alpha + \delta - \varepsilon) = (B - A) + (A - D) + (B - D) = 0.$

□

Συνεπώς $\operatorname{im}\partial_2 \subseteq \ker\partial_1$ και ορίζεται ο διανυσματικός χώρος πηλίκο

$$H_1 = \ker\partial_1/\operatorname{im}\partial_2\,.$$

Θα προσδιορίσουμε μία βάση του $H_1$. Πρώτα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που ορίζουν το $\ker\partial_1$, και βρίσκουμε οτι τα διανύσματα $\beta + \gamma + \varepsilon$ και $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ αποτελούν μία βάση του χώρου $\ker\partial_1$. Το διάνυσμα $\alpha + \delta - \varepsilon$ αποτελεί μία βάση του $\operatorname{im}\partial_2$. Από το Θεώρημα 4.5, για να προσδιορίσουμε μία βάση του πηλίκου $\ker\partial_1/\operatorname{im}\partial_2$, πρέπει να βρούμε μία βάση του $\ker \partial_1$ η οποία να περιέχει το διάνυσμα $\alpha + \delta - \varepsilon$ της βάσης του $\operatorname{im} \partial_2$. Παρατηρούμε οτι $\alpha + \beta + \gamma + \delta = (\alpha + \delta - \varepsilon) + (\beta + \gamma + \varepsilon)$ και συνεπώς $\{\alpha + \delta - \varepsilon, \beta + \gamma + \varepsilon\}$ είναι βάση του $\ker \partial_1$. Συμπεραίνουμε οτι το διάνυσμα $(\beta + \gamma + \varepsilon) + \operatorname{im} \partial_2$ αποτελεί βάση του $H_1$.

Η διάσταση του $H_1$ μετράει τις 'τρύπες' στο πολύεδρο. Το στοιχείο της συγκεκριμένης βάσης που βρήκαμε διαγράφει έναν 'κύκλο' γύρω από την τρύπα του πολυέδρου.

**Θεώρημα 4.7 (Θεώρημα Ισομορφισμού)** *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους $V$ και $W$ πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$.*

1. *Η απεικόνιση $\tilde{L} : V/\ker L \to W$, $\tilde{L}(v + \ker L) = L(v)$, είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση, και η $L$ παραγοντοποιείται ως σύνθεση $L = \tilde{L} \circ P$, όπου $P : V \to V/\ker L$ είναι η κανονική επεικόνιση $v \mapsto v + \ker L$.*

2. *Υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*

$$V/\ker L \cong \operatorname{im} L\,.$$

**Απόδειξη.** Θεωρούμε την κλάση ισοδυναμίας του $v$ στο $V/\ker L$, δηλαδή $v + \ker L = \{u \in V \mid u - v \in \ker L\}$. Παρατηρούμε οτι εάν $u \in v + \ker L$ τότε $L(u) = L(v)$. Αρα η απεικόνιση $\tilde{L} : V/\ker L \to W$, $\tilde{L}(v + \ker L) = L(v)$ είναι καλά ορισμένη. Ελέγχουμε οτι η $\tilde{L}$ είναι γραμμική:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}\left(a(v + \ker L) + (u + \ker L)\right) &= \tilde{L}\left((a\,v + u) + \ker L\right) \\
&= L(a\,v + u) \\
&= a\,L(v) + L(u) \\
&= a\,\tilde{L}(v + \ker L) + \tilde{L}(u + \ker L)\,.
\end{aligned}$$

Η $\tilde{L}$ είναι ενεικονική, εφ' όσον εάν $L(v) = L(u)$, τότε $v - u \in \ker L$ και $v + \ker L = u + \ker L$. Η $\tilde{L}$ είναι επεικονική στην εικόνα της $L$, γιατί εάν $w = L(v)$, τότε $w = \tilde{L}(v + \ker L)$. Συμπεραίνουμε οτι $\tilde{L}$ είναι ισομορφισμός από το πηλίκο $V/\ker L$ στην εικόνα $\operatorname{im} L$.

□

Στη Γραμμική Άλγεβρα Ι, έχουμε δεί οτι εάν $A$ είναι $m \times n$ πίνακας, στη γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax$ αντιστοιχεί μία αντιστρέψιμη απεικόνιση από το χώρο γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ στο χώρο στηλών $\mathcal{R}(A)$, και οτι η $T_A$ μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση τριών απεικονίσεων,

$$T_A = E \circ L \circ P\,,$$

όπου $P : \mathbb{R}^n \to \mathcal{R}(A^T)$ είναι η προβολή στο χώρο γραμμών, $L : \mathcal{R}(A^T) \to \mathcal{R}(A)$ είναι η αντιστρέψιμη απεικόνιση $L(x) = Ax$, και $E : \mathcal{R}(A) \to \mathbb{R}^m$ είναι ο εγκλεισμός $E(y) = y$.

Τώρα βλέπουμε οτι σε γενικούς διανυσματικούς χώρους, χωρίς επιλεγμένες βάσεις, έχουμε μια ανάλογη παραγοντοποίηση, όπου τη θέση του χώρου γραμμών καταλαμβάνει το πηλίκο.

**Πρόταση 4.8** *Εάν $L : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε $L = E \circ \tilde{L} \circ P$, όπου $P : V \to V/\ker(L)$ είναι η κανονική επεικόνιση, $\tilde{L} : V/\ker(L) \to \mathrm{im}\,(L)$ είναι ο κανονικός ισομορφισμός και $E : \mathrm{im}\,(L) \to W$ είναι ο εγκλεισμός.*

□

Στη συνέχεια δίδουμε δύο άλλα αποτελέσματα, τα οποία αναφέρονται ως Δεύτερο και Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμού.

**Πρόταση 4.9 (Δεύτερο και Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμού.)**

1. *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο $V$ πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και $X, Y$ γραμμικούς υπόχωρους του $V$. Τότε υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*

$$(X \oplus Y)/Y \cong X/(X \cap Y)\,.$$

2. *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο $V$ πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και $X, Y$ γραμμικούς υπόχωρους του $V$ τέτοιους ώστε $X \subseteq Y$. Τότε $Y/X$ είναι υπόχωρος του $V/X$, και υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*

$$(V/X)/(Y/X) \cong V/Y\,.$$

□

**Παράδειγμα 4.6** Υπάρχει επίσης ισομορφισμός $V \cong \ker L \oplus \mathrm{im}\, L$, αλλά αυτός δεν είναι κανονικός. Εάν επιλέξουμε μία βάση $\{w_1, \ldots, w_m\}$ του $\mathrm{im}\, L$, και $v_1, \ldots, v_m$ τέτοια ώστε $L(v_i) = w_i$, τότε τα $v_1, \ldots, v_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και ορίζεται γραμμική ενεικόνιση, $M_2 : \mathrm{im}\, L \to V : w_i \mapsto v_i$. Η απεικόνιση

$$M : \ker L \oplus \mathrm{im}\, L \to V \,:\, (v, w) \mapsto v + M_2(w)$$

είναι ισομορφισμός, αλλά εξαρτάται από την επιλογή των $v_i$.

# Δυϊκοί χώροι

Εχουμε δεί οτι το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από ένα διανυσματικό χώρο $V$ σε ένα διανυσματικό χώρο $W$ είναι επίσης διανυσματικός χώρος, ο $\mathcal{L}(U, V)$. Στην περίπτωση που $W$ είναι ο μονοδιάστατος χώρος $\mathbb{K}$, ονομάζουμε τον $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ **δυϊκό χώρο** του $V$, και τον συμβολίζουμε $V'$.

**Παράδειγμα 4.7** Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^n$ ορίζονται οι *συναρτήσεις συντεταγμένων* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Εάν $x = (x_1, \ldots, x_n)$, τότε $\varphi_k(x) = x_k$.

Εάν $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}^n$, έχουμε $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Εάν $\psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ είναι οποιαδήποτε γραμμική συνάρτηση, η $\psi$ καθορίζεται από τις τιμές της στα στοιχεία της βάσης: εάν $\psi(e_i) = a_i \in \mathbb{K}$, τότε για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n)$, έχουμε

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)\\ &= x_1\psi(e_1) + \cdots + x_n\psi(e_n)\\ &= x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n\,,\end{aligned}$$

δηλαδή, για κάθε γραμμική συνάρτηση $\psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $\psi(x)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των συντεταγμένων $x_i = \varphi_i(x)$ του $x$,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \\ &= \varphi_1(x) a_1 + \cdots + \varphi_n(x) a_n \,, \end{aligned}$$

αλλά καθώς ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{K}$ είναι μεταθετικός,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= a_1 \varphi_1(x) + \cdots + a_n \varphi_n(x) \\ &= (a_1 \varphi_1 + \cdots + a_n \varphi_n)(x) \,. \end{aligned}$$

Καθώς αυτό ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{K}^n$, έχουμε $\psi = a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$, και οι συναρτήσεις συντεταγμένων $\varphi_i$ παράγουν το δυϊκό χώρο $(\mathbb{K}^n)'$.

**Συμβολισμός.** Εκτός από το συνηθισμένο συμβολισμό των συναρτήσεων, $\varphi(x) = a$, για στοιχεία του δυϊκού χώρου χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός

$$\langle x, \varphi \rangle = a \,.$$

**Παράδειγμα 4.8** Στο χώρο $\mathbb{K}[x]$ των πολυωνύμων μίας μεταβλητής, η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}$ για την οποία $\varphi(p(x)) = \langle p(x), \varphi \rangle = p(0)$ είναι ένα στοιχείο του δυϊκού χώρου $(\mathbb{K}[x])'$. Γενικότερα, εάν $t_1, \ldots, t_k$ και $a_1, \ldots, a_k$ είναι στοιχεία του $\mathbb{K}$, τότε η συνάρτηση $\psi : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}$, για την οποία $\psi(p(x)) = \langle p(x), \psi \rangle = a_1 p(t_1) + \cdots + a_k p(t_k)$, είναι στοιχείο του δυϊκού χώρου $(\mathbb{K}[x])'$.

**Παράδειγμα 4.9** Στο χώρο $C^0[0, 1]$ των συνεχών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$, εάν $0 \leq a < b \leq 1$, και $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, η συνάρτηση $\psi : C^0[0, 1] \to \mathbb{R}$, για την οποία

$$\psi(f) = \langle f, \psi \rangle = \int_a^b \alpha(t)\, f(t)\, dt$$

είναι στοιχείο του δυϊκού χώρου $(C^0[0, 1])'$.

**Παράδειγμα 4.10** Θεωρούμε μία διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Το διαφορικό της $f$ στο σημείο $(x_1, \ldots, x_n)$ είναι η γραμμική απεικόνιση

$$Df(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \,.$$

Δηλαδή $Df(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)'$ και $Df$ είναι μία απεικόνιση $Df : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)'$, εν γένει μη γραμμική.

Υπενθυμίζουμε οτι εάν $V$ είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι βάση του $V$, και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\varphi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ τέτοια ώστε $\varphi(v_i) = a_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Δηλαδή υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\varphi \in V'$ τέτοιο ώστε $\langle v_i, \varphi \rangle = a_i$.

**Θεώρημα 4.10** *Εάν $V$ είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι βάση του $V$, τότε υπάρχει βάση του $V'$, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, για την οποία, με το συμβολισμό $\delta_{ij}$ του Kronecker,*

$$\varphi_j(v_i) = \langle v_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$$

*και άρα*

$$\dim V' = \dim V .$$

Η βάση $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ονομάζεται **δυϊκή βάση** της $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

**Απόδειξη.** Πρώτα δείχνουμε οτι το $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Ο γραμμικός συνδυασμός $\psi = a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$ είναι 0 εάν και μόνον εάν $\psi(v) = 0$ για κάθε $v \in V$. Ειδικότερα, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 = \psi(v_i) &= \langle v_i, a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n \rangle \\ &= a_1\langle v_i, \varphi_1 \rangle + \cdots + a_n\langle v_i, \varphi_n \rangle \\ &= a_1\delta_{i1} + \cdots + a_n\delta_{in} \\ &= a_i \end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε οτι $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Για να δείξουμε οτι τα $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ παράγουν το δυϊκό χώρο $V'$, θεωρούμε $\psi \in V'$ με $\langle v_i, \psi \rangle = c_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, και $u = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$. Τότε

$$\begin{aligned} \langle u, \psi \rangle &= \langle b_1v_1 + \cdots + b_nv_n, \psi \rangle \\ &= b_1\langle v_1, \psi \rangle + \cdots + b_n\langle v_n, \psi \rangle \\ &= b_1c_1 + \cdots + b_nc_n \\ &= \langle u, \varphi_1 \rangle c_1 + \cdots + \langle u, \varphi_n \rangle c_n \\ &= \langle u, c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n \rangle \end{aligned}$$

άρα $\psi = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$.

□

**Θεώρημα 4.11** *Εάν $v, w \in V$ και $v \neq w$, τότε υπάρχει $\psi \in V'$ τέτοιο ώστε $\langle v, \psi \rangle \neq \langle w, \psi \rangle$.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε βάση $\{v_i, \ldots, v_n\}$ του $V$, και τη δυϊκή βάση $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ του $V'$. Εάν $\langle v, \psi \rangle = \langle w, \psi \rangle$ για όλα τα $\psi \in V'$, τότε, για κάθε $\varphi_i$ της δυϊκής βάσης, έχουμε $\langle v - w, \varphi_i \rangle = 0$, και $v - w = \langle u - w, \varphi_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle v - w, \varphi_n \rangle v_n = 0$.

□

Αφού ο δυϊκός χώρος $V'$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, μπορούμε να θεωρήσουμε το δυϊκό του χώρο, $(V')'$, ο οποίος συμβολίζεται $V''$. Ένα στοιχείο $\chi$ του χώρου $V''$ είναι μία γραμμική συνάρτηση στο χώρο $V'$,

$$\chi : V' \to \mathbb{K} : \psi \mapsto \chi(\psi) .$$

**Παράδειγμα 4.11** Εάν $v \in V$, τότε η απεικόνιση $\eta : \psi \mapsto \langle v, \psi \rangle$ είναι γραμμική ως προς το $\psi$, (Ασκηση: Τί ακριβώς σημαίνει αυτό;). Συνεπώς για κάθε $v \in V$ ορίζεται, με φυσικό τρόπο, ένα $\eta \in V''$. Θα δούμε οτι, για χώρους πεπερασμένης διάστασης, αυτή η αντιστοιχία είναι ένας ισομορφισμός.

**Θεώρημα 4.12** *Εάν $V$ είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, τότε η απεικόνιση*

$$\nu \,:\, V \longrightarrow V'' \,:\, v \longmapsto (\eta \,:\, \psi \mapsto \langle v,\, \psi\rangle)$$

*είναι (κανονικός) ισομορφισμός.*

**Απόδειξη.** Η $\nu$ είναι γραμμική:

$$\begin{aligned} \nu(a\,v+w)(\psi) &= \langle a\,v+w,\, \psi\rangle \\ &= a\,\langle v,\, \psi\rangle + \langle w,\, \psi\rangle \\ &= a\,\nu(v)(\psi)+\nu(w)(\psi)\,. \end{aligned}$$

Για να δείξουμε οτι η $\nu$ είναι ενεικόνιση, θεωρούμε $v,\, w \in V$. Εάν $\nu(v) = \nu(w)$ τότε, για κάθε $\psi \in V'$, $\psi(v) = \psi(w)$, και από το Θεώρημα 4.11, $v = w$.

Από το Θεώρημα 4.10, $\dim V'' = \dim V' = \dim V$, και συνεπώς η $\nu$ είναι επεικόνιση.

□

Εάν $L \,:\, V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση, μπορούμε να ορίσουμε τη **δυϊκή απεικόνιση** $L'$ (ή **ανάστροφη απεικόνιση** $L^T$) ανάμεσα στους δυϊκούς χώρους:

$$L' : W' \to V' \quad , \quad L'(\psi) = \psi \circ L\,.$$

Προσέξτε οτι η $L'$ έχει φορά αντίθετη από την $L$, και ικανοποιεί τη σχέση $\langle v,\, L'\psi\rangle = \langle Lv,\, \psi\rangle$.

Παρατηρούμε οτι η αντιστοιχία $L \mapsto L'$ είναι γραμμική απεικόνιση από το $\mathcal{L}(V,\, W)$ στο $\mathcal{L}(W',\, V')$: $(a\,L+M)' = a\,L' + M'$.

**Λήμμα 4.13** *Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $L \,:\, U \to V$ και $M \,:\, V \to W$. Τότε*

1. *$(M \circ L)' = L' \circ M'$.*
2. *Εάν η $L \,:\, U \to V$ είναι αντιστρέψιμη, τότε η $L' \,:\, V' \to U'$ είναι επίσης αντιστρέψιμη και $(L^{-1})' = (L')^{-1}$.*
3. *Εάν οι χώροι $U$ και $V$ είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε το ακόλουθο διάγραμμα γραμμικών απεικονίσεων μετατίθεται:*

$$\begin{array}{ccccc} & U & \longrightarrow & V & \\ \nu_U & \downarrow & & \downarrow & \nu_V \\ & U'' & \longrightarrow & V'' & \end{array} ,$$

*δηλαδή*

$$\nu_V \circ L = L'' \circ \nu_U\,,$$

*όπου $L'' = (L')'$ και $\nu_U,\, \nu_V$ είναι οι κανονικοί ισομορφισμοί.*

**Απόδειξη.** Εάν $\zeta \in W'$, τότε

$$\begin{aligned}(M \circ L)'(\zeta) &= \zeta \circ (M \circ L) \\ &= (\zeta \circ M) \circ L \\ &= L'(\zeta \circ M) \\ &= L'(M'(\zeta)) \\ &= L' \circ M'(\zeta)\end{aligned}$$

Εάν η $L$ είναι αντιστρέψιμη, τότε

$$\left(L^{-1}\right)' \circ L' = \left(L \circ L^{-1}\right)' = (\mathbf{I}_V)' = \mathbf{I}_{V'}$$

και

$$L' \circ \left(L^{-1}\right)' = \left(L^{-1} \circ L\right)' = (\mathbf{I}_U)' = \mathbf{I}_{U'}\,.$$

Εάν $u \in U$ και $\varphi \in U'$, έχουμε $\nu_U(u)(\varphi) = \langle u,\, \varphi\rangle$. Εάν $\psi \in V'$, έχουμε

$$\begin{aligned}L''\nu_U(u)(\psi) &= \nu_U(u)(L'\psi) \\ &= \langle u,\, L'\psi\rangle \\ &= \langle Lu,\, \psi\rangle \\ &= \nu_V(Lu)(\psi) \\ &= \nu_V \circ L(u)(\psi)\,.\end{aligned}$$

□

**Άσκηση 4.3** Θεωρήστε τα διανύσματα $x$, $y$, $u$ και $v$ στο $\mathbb{K}^4$, όπου $\mathbb{K}$ είναι ένα σώμα στο οποίο $1 \neq -1$, και τους υπόχωρους $Z$ και $W$ που παράγονται απο τα σύνολα $\{x, y\}$ και $\{u, v\}$ αντίστοιχα. Σε ποιές απο τις ακόλουθες περιπτώσεις ισχύει οτι $\mathbb{K}^4 = Z \oplus W$.

α΄.
$$x = (1, 1, 0, 0) \qquad y = (1, 0, 1, 0)$$
$$u = (0, 1, 0, 1) \qquad v = (0, 0, 1, 1)$$

β΄.
$$x = (1, 0, 0, 1) \qquad y = (0, 1, 1, 0)$$
$$u = (1, 0, -1, 0) \qquad v = (0, 1, 0, 1)$$

**Άσκηση 4.4** Εάν $X$, $Y$, $Z$ είναι διανυσματικοί χώροι πάνω απο το σώμα $\mathbb{K}$, δείξτε οτι υπάρχουν ισομορφισμοί.

α΄. $X \oplus Y \cong Y \oplus X$

β΄. $X \oplus (Y \oplus Z) \cong (X \oplus Y) \oplus Z$

**Άσκηση 4.5** Έστω διανυσματικός χώρος $U$ και υπόχωροι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ του $U$. Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ και $V = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$.

α΄. Δείξτε οτι $Y \cong V$ εάν και μόνον εάν για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ισχύει $(X_1 + \cdots + X_i) \cap X_{i+1} = 0$.

β΄. Δείξτε οτι εάν $Y \cong V$ τότε $X_i \cap X_j = 0$ για κάθε $i \neq j$. Βρείτε ένα παράδειγμα με τρείς υπόχωρους $X_1$, $X_2$, $X_3$ για να δείξετε οτι δεν ισχύει το αντίστροφο.

**Άσκηση 4.6** Εάν $L : V \to X$ και $M : W \to Y$ είναι γραμμικές απεικονίσεις διανυσματικών χώρων πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, δείξτε οτι ορίζεται απεικόνιση $L \oplus M$ από το $V \oplus W$ στο $X \oplus Y$,

$$L \oplus M(v, w) = (L(v), M(w)),$$

η οποία είναι γραμμική. Δείξτε οτι $\operatorname{im}(L \oplus M) = \operatorname{im} L \oplus \operatorname{im} M$ και οτι $\ker(L \oplus M) = \ker L \oplus \ker M$.

**Άσκηση 4.7** Ελέγξτε οτι οι κανονικές εμφυτεύσεις $j_1 : V \longrightarrow V \oplus W$ και $j_2 : W \longrightarrow V \oplus W$ και οι κανονικές προβολές $p_1 : V \oplus W \longrightarrow V$ και $p_2 : V \oplus W \longrightarrow W$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, και οτι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$p_1 \circ j_1 = \mathbf{I}_V, \quad p_1 \circ j_2 = 0, \quad p_2 \circ j_1 = 0, \quad p_2 \circ j_2 = \mathbf{I}_W.$$

**Άσκηση 4.8** Θεωρήστε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}[x]$ όλων των πολυωνύμων μίας μεταβλητής, και τον υπόχωρο $\mathbb{P}_n$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με $n$. Έχει ο χώρος πηλίκο $\mathbb{R}[x]/\,\mathbb{P}_n$ πεπερασμένη διάσταση;

**Άσκηση 4.9** Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^4$ θεωρήστε τους υπόχωρους

$$U = \big\{(z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4) \in \mathbb{C}^4 \,|\, z_1 = z_2\big\}$$

και

$$V = \big\{(z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4) \in \mathbb{C}^4 \,|\, z_1 - z_2 - iz_3 + iz_4 = 2z_2 + z_3 = 2z_2 + (1+\mathrm{i})z_3 - iz_4 = 0\big\}\;.$$

α′. Δείξτε οτι $V \subseteq U$.

β′. Βρείτε μία βάση του χώρου πηλίκο $U/\,V$.

**Άσκηση 4.10** Υποθέτουμε οτι $L\,:\,V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση, $X$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $V$, $Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $W$, και ισχύει $L(X) \subseteq Y$. Δείξτε οτι ορίζεται γραμμική απεικόνιση $\tilde{L}\,:\,V/X \to W/Y$, τέτοια ώστε

$$\tilde{L} \circ P = Q \circ L\,,$$

όπου $P\,:\,V \to V/X$ και $Q\,:\,W \to W/Y$ είναι οι κανονικές επεικονίσεις.

**Άσκηση 4.11** Βρείτε ένα μη μηδενικό στοιχείο $\varphi$ του χώρου $(\mathbb{C}^3)'$, τέτοιο ώστε εάν $x_1 = (1,\,1,\,1)$ και $x_2 = (1,\,1,\,-1)$, τότε $\langle x_1,\,\varphi\rangle = \langle x_2,\,\varphi\rangle = 0$.

**Άσκηση 4.12** Τα διανύσματα $x_1 = (1,\,1,\,1)$, $x_2 = (1,\,1,\,-1)$ και $x_3 = (1,\,-1,\,-1)$ αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^3$. Εάν $\{\varphi_1,\,\varphi_2,\,\varphi_3\}$ είναι η δυϊκή βάση του $(\mathbb{C}^3)'$, και $x = (0,\,1,\,0)$, βρείτε τα $\langle x,\,\varphi_1\rangle$, $\langle x,\,\varphi_2\rangle$ και $\langle x,\,\varphi_3\rangle$.

**Άσκηση 4.13** Ποιές από τις ακόλουθες συναρτήσεις στο $\mathbb{C}^3$ είναι στοιχεία του $(\mathbb{C}^3)'$;

α′. $\varphi(z_1,\,z_2,\,z_3) = z_1 + 3z_2$

β′. $\varphi(z_1,\,z_2,\,z_3) = z_1 - {z_3}^2$

γ′. $\varphi(z_1,\,z_2,\,z_3) = z_2 + 1$

δ′. $\varphi(z_1,\,z_2,\,z_3) = z_1 + z_2 z_3$

**Άσκηση 4.14** Θεωρούμε μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $(c_k) = (c_0,\,c_1,\,c_2,\,\ldots)$. Για κάθε πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ ορίζουμε $\psi(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i c_i$. Δείξτε οτι $\psi \in (\mathbb{R}[x])'$, και οτι κάθε στοιχείο του δυϊκού χώρου $(\mathbb{R}[x])'$ προκύπτει με αυτόν τον τρόπο, για κατάλληλη επιλογή της ακολουθίας $(a_k)$.

**Άσκηση 4.15** Εάν $\psi \in V'$, $\psi \neq 0$ και $a \in \mathbb{K}$, είναι αλήθεια οτι υπάρχει $x \in V$ τέτοιο ώστε $\langle x, \psi \rangle = a$;

**Άσκηση 4.16** Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους $U$, $V$ και $W$, και γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$. Δείξτε οτι η απεικόνιση $\mathcal{L}(U, V) \to \mathcal{L}(U, W) : M \mapsto L \circ M$ είναι γραμμική.

**Άσκηση 4.17** Δείξτε οτι εάν $V$ είναι διανυσματικός χώρος, και $\varphi$ είναι μη μηδενικό στοιχείο του$V'$, τότε το σύνολο

$$U = \{x \in V | \langle x, \varphi \rangle = 0\}$$

είναι υπόχωρος του $V$. Εάν $\dim V < \infty$, βρείτε τη διάσταση του $U$.

**Άσκηση 4.18** Δείξτε οτι εάν $\varphi$ και $\psi \in V'$ και για κάθε $x \in V$, $\langle x, \varphi \rangle = 0$ εάν και μόνον εάν $\langle x, \psi \rangle = 0$, τότε υπάρχει $a \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $\psi = a\varphi$.

**Άσκηση 4.19** Μία συνάρτηση $Q : W \times V \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **διγραμμική** εάν η $Q$ είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά, δηλαδή, για κάθε $w, z \in W$, $u, v \in V$ και $a \in \mathbb{K}$, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{array}{ll} Q(w + z, u) = Q(w, u) + Q(z, u) & \qquad Q(aw, u) = aQ(w, u) \\ Q(w, u + v) = Q(w, u) + Q(w, v) & \qquad Q(w, au) = aQ(w, u) \end{array}$$

Δείξτε οτι το σύνολο $\mathcal{L}(W, V; \mathbb{K})$ των διγραμμικών συναρτήσεων στο $W \times V$ είναι διανυσματικός χώρος ως προς τις κατά σημείο πράξεις.

**Άσκηση 4.20** Θεωρούμε μία απεικόνιση $L : W \to V'$, δηλαδή για κάθε $w \in W$, $L(w)$ είναι μία γραμμική απεικόνιση $L(w) : V \to \mathbb{R}$.

α'. Τι σημαίνει να είναι η $L$ γραμμική απεικόνιση;

β'. Δείξτε οτι εάν $L$ είναι γραμμική, τότε η απεικόνιση $M : W \times V \to \mathbb{R}$, για την οποία $M(w, v) = \langle v, L(w) \rangle$ είναι διγραμμική.

γ'. Δείξτε οτι η αντιστοιχία $L \mapsto M$ ορίζει ισομορφισμό μεταξύ του διανυσματικού χώρου $\mathcal{L}(W, V')$ και του χώρου των διγραμμικών συναρτήσεων $\mathcal{L}(W, V; \mathbb{R})$.

# Κεφάλαιο 5

# Γραμμικές απεικονίσεις, βάσεις και πίνακες

## Πίνακες πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$

Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$ ή $\mathbb{K}^{m,n}$ ή $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Το σύνολο των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$ το συμβολίζουμε $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.

Η θεωρία των πινάκων που μελετήσαμε στην Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, στο μεγαλύτερο μέρος της ισχύει επακριβώς για πίνακες με όρους σε οποιοδήποτε σώμα.

Για οποιοδήποτε σώμα $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$ είναι διανυσματικός χώρος, και ο πολλαπλασιασμός πινάκων ορίζεται όταν αυτοί έχουν κατάλληλο σχήμα. Εάν $A$ είναι $m \times n$ πίνακας, και $B$ είναι $n \times k$ πίνακας πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, ορίζεται το γινόμενο $AB$, και είναι ο $m \times k$ πίνακας $C$, ο οποίος έχει στη θέση $i\,j$, δηλαδή στην $i$ γραμμή και στην $j$ στήλη, τον όρο

$$\begin{aligned} c_{i\,j} &= a_{i\,1}\,b_{1\,j} + \cdots + a_{i\,n}\,b_{n\,j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\,\ell}\,b_{\ell\,j}\,. \end{aligned}$$

Η απαλοιφή Gauss μπορεί επίσης να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε σώμα $\mathbb{K}$ για να μετατρέψουμε ένα $m \times n$ πίνακα σε ένα γραμμοϊσοδύναμο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή.

Η **τάξη** του πίνακα $A$ (ή **βαθμός** του πίνακα $A$) είναι ο αριθμός $r(A)$,

$$\begin{aligned} r(A) &= \text{αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του } A \\ &= \text{αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του } A \\ &= \text{αριθμός οδηγών στο γραμμοϊσοδύναμο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή} \end{aligned}$$

Προσέξτε οτι σε ένα πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, κάθε μή μηδενική γραμμή έχει έναν οδηγό. (Καμία φορά μας διαφεύγει ο οδηγός στην τελευταία γραμμή, επειδή δεν χρησιμοποιείται κατά την απαλοιφή).

**Πρόταση 5.1** *Κάθε γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ αντιστοιχεί σε ένα $m \times n$ πίνακα $A$, τέτοιο ώστε, για κάθε $b \in \mathbb{K}^n$, $L(b) = Ab$,*

$$L(b_1, \ldots, b_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

**Απόδειξη.** Θεωρούμε την κανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{K}^n$,

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_j = (\delta_{1j}, \ldots, \delta_{nj}), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

και τα διανύσματα $L(e_1), \ldots, L(e_n) \in \mathbb{K}^m$.

Ορίζουμε τον πίνακα $A$ να έχει στη $j$ στήλη, για $j = 1, \ldots, n$, το διάνυσμα $L(e_j) \in \mathbb{K}^m$. Δηλαδή

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

όπου $(a_{1j}, \ldots, a_{mj}) = L(e_j)$.

Εάν $b = (b_1, \ldots, b_n)$ έχουμε $b = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$, και συνεπώς

$$\begin{aligned} L(b) &= b_1 L(e_1) + \cdots + b_n L(e_n) \\ &= b_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + b_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε την παράσταση του γινομένου πίνακα με διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των στηλών του πίνακα, και έχουμε

$$\begin{aligned} L(b) &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= Ab. \end{aligned}$$

□

# Γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης $V$ και $W$, και γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$. Εάν επιλέξουμε μία βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ του $V$, γνωρίζουμε (Κεφάλαιο 3) οτι ορίζεται ισομορφισμός

$$\iota_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$$

ο οποίος απεικονίζει κάθε διάνυσμα $v \in V$ στο *διάνυσμα συντεταγμένων* του $v$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$: εάν $v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$, τότε

$$\iota_{\mathcal{B}}(v) = v_{\mathcal{B}} = (b_1, \ldots, b_n)\,.$$

Εάν επιλέξουμε μία βάση $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ του $W$, έχουμε επίσης τον ισομορφισμό

$$\iota_{\mathcal{C}} \,:\, W \to \mathbb{K}^m\,,$$

ο οποίος απεικονίζει το διάνυσμα $w = c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m$ στο διάνυσμα συντεταγμένων του $w$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$,

$$\iota_{\mathcal{C}}(w) = w_{\mathcal{C}} = (c_1, \ldots, c_m)\,.$$

Εάν συνθέσουμε τη γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ από τα δεξιά με τον ισομορφισμό $\iota_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{K}^n \to V$ και από τα αριστερά με τον ισομορφισμό $\iota_{\mathcal{C}} : W \to \mathbb{K}^m$, έχουμε την απεικόνιση

$$\iota_{\mathcal{C}} \circ L \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1} \,:\, \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \tag{5.1}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1, αυτή η απεικόνιση αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό με ένα $m \times n$ πίνακα $A$, τέτοιο ώστε

$$A \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

εάν και μόνον εάν

$$L(b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) = c_1 w_1 + \ldots + c_m w_m\,.$$

Πιο αναλυτικά, για κάθε διάνυσμα $v_j$ της βάσης $\mathcal{B}$ του $V$, το διάνυσμα $L(v_j) \in W$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης $\mathcal{C}$ του $W$. Γράφουμε $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ για το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} L(v_j) &= a_{1j} w_1 + \cdots + a_{mj} w_m \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\,. \end{aligned}$$

Ο $m \times n$ πίνακας

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

ονομάζεται **πίνακας της απεικόνισης $L : V \to W$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ του $V$ και $\mathcal{C}$ του $W$** και θα τον συμβολίζουμε ${}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$. Ο πίνακας $A$ έχει στη $j$ στήλη το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$, και

$$A \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

εάν και μόνον εάν

$$L(b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) = c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m \,.$$

**Παρατήρηση:** Προσοχή στη σειρά των δεικτών, που δεν είναι αυτή που έχουμε συνηθίσει, π.χ. σε πολλαπλασιασμό πίνακα επί διάνυσμα: $(Ab)_i = \sum a_{ij} b_j$. Η διάταξη που χρησιμοποιήσαμε επιβάλλεται για να ταιριάζει ο πολλαπλασιασμός πινάκων με τη σύνθεση απεικονίσεων, όπως θα δούμε στο Θεώρημα 5.4. Η διάταξη των δεικτών αντιστρέφεται όταν περνάμε από διάνυσμα της βάσης σε διάνυσμα συντεταγμένων ως προς τη βάση.

Αντίστροφα, εάν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας, γνωρίζουμε από την Πρόταση 3.9 οτι υπάρχει μία μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$T_A \, : \, V \longrightarrow W$$

τέτοια ώστε

$$T_A(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \ \text{ για } j = 1, \ldots, n \,. \tag{5.2}$$

**Θεώρημα 5.2** *Θεωρούμε $V$ και $W$ διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ βάση του $V$, $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ βάση του $W$. Η αντιστοιχία $A \mapsto T_A$, όπου $T_A$ είναι η απεικόνιση της (5.2), ορίζει έναν ισομορφισμό από το χώρο $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$ στο χώρο $\mathcal{L}(V, W)$.*

**Απόδειξη.** Έχουμε δει οτι η αντιστοιχία είναι αμφιμονοσήμαντη. Αρκεί να ελέγξουμε οτι είναι γραμμική. Εάν $A, B \in \mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$ και $c \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} T_{cA+B}(v_j) = \sum_{i=1}^{m} (ca_{ij} + b_{ij}) w_i &= c \sum a_{ij} w_i + \sum b_{ij} w_i \\ &= cT_A(v_j) + T_B(v_j) \,. \end{aligned}$$

□

**Παράδειγμα 5.1** Θεωρούμε την απεικόνιση $L \, : \, \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(u, v, w) = (u + v - w, \, 2u + w)$, και τις κανονικές βάσεις

$$\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\} \ , \quad \text{όπου} \quad e_1 = (1, 0, 0), \, e_2 = (0, 1, 0), \, e_3 = (0, 0, 1) \,,$$

του $\mathbb{R}^3$ και

$$\mathcal{E}_2 = \{f_1, f_2\} \ , \quad \text{όπου} \quad f_1 = (1, 0, ), \, f_2 = (0, 1) \,,$$

του $\mathbb{R}^2$.

Ο πίνακας της $L$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{E}_3$ και $\mathcal{E}_2$ δίδεται από τις σχέσεις

$$L(e_j) = \sum a_{ij} f_i \qquad j = 1, 2, 3 \,.$$

Για $j = 1$

$$L(1, 0, 0) = (1, 2) = a_{11}(1, 0) + a_{21}(0, 1)$$

άρα $a_{11} = 1$, $a_{21} = 2$.

Για $j = 2$

$$L(0,\,1,\,0) = (1,\,0) = a_{12}(1,\,0) + a_{22}(0,\,1)$$

άρα $a_{12} = 1$, $a_{22} = 0$.

Για $j = 3$

$$L(0,\,0,\,1) = (-1,\,1) = a_{13}(1,\,0) + a_{23}(0,\,1)$$

άρα $a_{13} = -1$, $a_{23} = 1$.

Συνεπώς

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε οτι για το γενικό διάνυσμα $x = (u,\,v,\,w) \in \mathbb{R}^3$, ισχύει

$$L(x) = \begin{bmatrix} u+v-w \\ 2u+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = Ax\,.$$

Δηλαδή ο πίνακας που αντιστοιχεί στην απεικόνιση $L$ ως προς τις **κανονικές βάσεις**, είναι ακριβώς ο πίνακας που δίδει την απεικόνιση $L$ με πολλαπλασιασμό από τα αριστερά.

Τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε τον πίνακα της $L$ ως προς κάποιες άλλες βάσεις, έστω τη βάση

$$\mathcal{B} = \{v_1,\,v_2,\,v_3\}\,, \quad \text{όπου} \quad v_1 = (1,\,0,\,-1),\, v_2 = (1,\,1,\,1),\, v_3 = (1,\,0,\,0)\,,$$

του $\mathbb{R}^3$, και τη βάση

$$\mathcal{C} = \{w_1,\,w_2\}\,, \quad \text{όπου} \quad w_1 = (1,\,1),\, w_2 = (0,\,1)\,,$$

του $\mathbb{R}^2$. Για το πρώτο διάνυσμα της $\mathcal{B}$ έχουμε

$$L(v_1) = L(1,\,0,\,-1) = (2,\,1) = 2(1,\,1) - (0,\,1) = 2w_1 - w_2\,,$$

άρα $b_{11} = 2$, $b_{21} = -1$. Για το δεύτερο

$$L(v_2) = L(1,\,1,\,1) = (1,\,3) = (1,\,1) + 2(0,\,1) = w_1 + 2w_2\,,$$

άρα $b_{12} = 1$, $b_{22} = 2$, και για το τρίτο

$$L(v_3) = L(1,\,0,\,0) = (1,\,2) = (1,\,1) + (0,\,1) = w_1 + w_2\,,$$

άρα $b_{13} = 1$, $b_{23} = 1$. Συνεπώς ο πίνακας ${}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$ είναι ο

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε οτι για να υπολογίσουμε τη στήλη $j$ του πίνακα ${}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$ λύνουμε την εξίσωση
$$Cx = L(v_j)\,,$$
όπου $C$ είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα της βάσης $\mathcal{C}$.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την αντιστοιχία μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων, για να βρούμε γενικές μεθόδους υπολογισμού μίας βάσης του πυρήνα ή της εικόνας μίας γραμμικής απεικόνισης μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης.

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους $V$, με βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $W$, με βάση $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ και γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$. Έστω $A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$ ο πίνακας της $L$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$.

Υπενθυμίζουμε οτι για την απεικόνιση $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : x \mapsto Ax$, έχουμε:

- η εικόνα $\operatorname{im} T_A$ είναι ο χώρος στηλών του $A$, $\mathcal{R}(A)$, και μία βάση του $\operatorname{im} T_A$ δίδεται από τις στήλες του $A$ που αντιστοιχούν σε στήλες του κλιμακωτού πίνακα $U$ οι οποίες περιέχουν οδηγούς.

- ο πυρήνας $\ker T_A$ είναι ο μηδενοχώρος του $A$, $\mathcal{N}(A)$, και μία βάση του $\ker T_A$ δίδεται από ένα πλήρες σύστημα γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$.

Πως σχετίζονται αυτά με την εικόνα και τον πυρήνα της $L$;

Θεωρούμε τους ισομορφισμούς
$$\iota_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n : a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$$
και
$$\iota_{\mathcal{C}} : W \to \mathbb{K}^m : b_1w_1 + \ldots + b_mw_n \mapsto (b_1, \ldots, b_m)\,.$$
Από την 5.1 έχουμε $T_A = \iota_{\mathcal{C}} \circ L \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1}$, και συνεπώς
$$L = \iota_{\mathcal{C}}^{-1} \circ T_A \circ \iota_{\mathcal{B}}\,.$$

**Πόρισμα 5.3** *1.* $\ker L = \iota_{\mathcal{B}}^{-1}(\ker T_A) = \iota_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{N}(A))$. *Δηλαδή το διάνυσμα* $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ *ανήκει στον πυρήνα της* $L$ *εάν και μόνον εάν* $(a_1, \ldots, a_n)$ *ανήκει στο μηδενόχωρο του πίνακα* $A$.

*2.* $\operatorname{im} L = \iota_{\mathcal{C}}^{-1}(\operatorname{im} T_A) = \iota_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathcal{R}(A))$. *Δηλαδή* $b_1w_1 + \cdots + b_mw_m$ *ανήκει στην εικόνα της* $L$ *εάν και μόνον εάν* $(b_1, \ldots, b_m)$ *ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα* $A$.

$\square$

**Θεώρημα 5.4** *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους* $V$, $W$, $Z$ *πεπερασμένης διάστασης, και βάσεις* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ *και* $\mathcal{D} = \{z_1, \ldots, z_\ell\}$ *αντίστοιχα. Εάν* $L : V \to W$ *και* $M : W \to Z$ *είναι γραμμικές απεικονίσεις, και*
$$A = (a_{jk})_{\substack{k=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$$

$$B = (b_{ij})_{\substack{j=1,\ldots,m \\ i=1,\ldots,\ell}} = {}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{C}}$$

*και*

$$C = (c_{ik})_{\substack{k=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,\ell}} = {}_{\mathcal{D}}(M \circ L)_{\mathcal{B}},$$

*τότε*

$$C = BA\,,$$

*δηλαδή*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, a_{jk}$$

*για κάθε* $i = 1, \ldots, \ell$ *και κάθε* $k = 1, \ldots, n$, *και*

$$M \circ L(v_k) = \sum_{i=1}^{\ell} \left( \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, a_{jk} \right) z_i\,.$$

**Απόδειξη.** Από τον ορισμό των $A$, $B$, $C$ έχουμε

$$L(v_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} w_j \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$M(w_j) = \sum_{i=1}^{\ell} b_{ij} z_i \qquad j = 1, \ldots, m$$

και

$$M \circ L(v_k) = \sum_{i=1}^{\ell} c_{ik}\, z_i \qquad k = 1, \ldots, n$$

Αλλά

$$\begin{aligned} M \circ L(v_k) &= M\left(L(v_k)\right) \\ &= M\left( \sum_{j=1}^{m} a_{jk}\, w_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{jk}\, M(w_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{jk} \left( \sum_{i=1}^{\ell} b_{ij}\, z_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\ell} a_{jk}\, b_{ij}\, z_i \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \left( \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, a_{jk} \right) z_i\,. \end{aligned}$$

Από τη μοναδικότητα των συντελεστών έχουμε

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, a_{jk}\,,$$

και συνεπώς $C = BA$.

□

**Πόρισμα 5.5** *Εάν $L : V \to W$ είναι ισομορφισμός, και $A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$, τότε ο πίνακας της $L^{-1}$, ως προς τις ίδιες βάσεις, είναι ο $A^{-1}$,*

$${}_{\mathcal{B}}(L^{-1})_{\mathcal{C}} = (\,{}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}})^{-1}\,.$$

**Απόδειξη.** Εάν $B = {}_{\mathcal{B}}(L^{-1})_{\mathcal{C}}$, τότε $BA$ είναι ο πίνακας της απεικόνισης $L^{-1} \circ L = \mathbf{I}_V$, άρα $BA = \mathbf{I}$, και $B = A^{-1}$.

□

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης $X$ και $Y$, και βάσεις $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_k\}$ του $X$ και $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ του $Y$. Τότε

$$\mathcal{B} = \{(x_1, 0), \ldots, (x_k, 0), (0, y_1), \ldots, (0, y_m)\}$$

αποτελεί βάση του ευθέως αθροίσματος $X \oplus Y$. Θεωρούμε διάνυσμα $v = (x, y) \in X \oplus Y$. Εάν $x = s_1x_1 + \cdots + s_kx_k$ και $y = t_1y_1 + \cdots + t_my_m$, τότε το διάνυσμα συντεταγμένων του $v$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι

$$v_{\mathcal{B}} = (s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_m)\,.$$

Παρατηρούμε οτι ο πίνακας της εμφύτευσης $j_1 : X \longrightarrow X \oplus Y$ (δες σελίδα 55), ως προς τις βάσεις $\mathcal{X}$ του $X$ και $\mathcal{B}$ του $X \oplus Y$ είναι ο $(k+m) \times k$ πίνακας

$${}_{\mathcal{B}}(j_1)_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k \\ 0 \end{bmatrix},$$

ενώ ο πίνακας της προβολής $p_1 : X \oplus Y \longrightarrow X$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ του $X \oplus Y$ και $\mathcal{X}$ του $X$ είναι ο $k \times (k+m)$ πίνακας

$${}_{\mathcal{X}}(p_1)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & 0 \end{bmatrix}.$$

Αντίστοιχα για τις απεικονίσεις $j_2$ και $p_2$ έχουμε

$${}_{\mathcal{B}}(j_2)_{\mathcal{Y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_k \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad {}_{\mathcal{Y}}(p_2)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_k \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε τώρα γραμμική απεικόνιση $L : X \oplus Y \longrightarrow X \oplus Y$. Με την $L$ συνδέονται οι ακόλουθες γραμμικές απεικονίσεις:

$$\begin{aligned}
\alpha &= p_1 \circ L \circ j_1 : X \longrightarrow X \\
\beta &= p_1 \circ L \circ j_2 : Y \longrightarrow X \\
\gamma &= p_2 \circ L \circ j_1 : X \longrightarrow Y \\
\delta &= p_2 \circ L \circ j_2 : Y \longrightarrow Y\,.
\end{aligned}$$

Γράφουμε τον πίνακα $\Lambda = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ της $L$ ως προς τη διατεταγμένη βάση $\mathcal{B}$ σε μορφή μπλοκ:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

όπου $A$ είναι $k \times k$, $B$ είναι $k \times m$, $C$ είναι $m \times k$ και $D$ είναι $m \times m$ πίνακες. Τότε για τον πίνακα της απεικόνισης $\alpha$ ως προς τη βάση $\mathcal{X}$ έχουμε

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{X}}\alpha_{\mathcal{X}} &= {}_{\mathcal{X}}(p_1)_{\mathcal{B}} \; {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}} \; {}_{\mathcal{B}}(j_1)_{\mathcal{X}} \\ &= \begin{bmatrix} I_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= A\,. \end{aligned}$$

Παρόμοια έχουμε

$${}_{\mathcal{X}}\beta_{\mathcal{Y}} = B\,, \quad {}_{\mathcal{Y}}\gamma_{\mathcal{X}} = C\,, \quad \text{και} \quad {}_{\mathcal{Y}}\delta_{\mathcal{Y}} = D\,.$$

# Πίνακας δυϊκής απεικόνισης

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους $V$ και $W$, με βάσεις $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ και $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ αντίστοιχα.

Γνωρίζουμε οτι ορίζεται η δυϊκή βάση $\mathcal{B}' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ του δυϊκού χώρου $V'$, όπου

$$\varphi_i(v_j) = \langle v_j, \varphi_i \rangle = \delta_{i\,j} \quad \text{για} \quad i, j = 1, \ldots, n$$

και η δυϊκή βάση $\mathcal{C}' = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ του δυϊκού χώρου $W'$, όπου

$$\psi_k(w_\ell) = \langle w_\ell, \psi_k \rangle = \delta_{k\,\ell} \quad \text{για} \quad k, \ell = 1, \ldots, m\,.$$

Θεωρούμε γραμμική απεικόνιση $L : V \longrightarrow W$ και τον πίνακα $A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$ της απεικόνισης $L$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ του $V$ και $\mathcal{C}$ του $W$. Η δυϊκή απεικόνιση $L' : W' \longrightarrow V'$ έχει πίνακα ως προς τις βάσεις $\mathcal{C}'$ και $\mathcal{B}'$, $A' = {}_{\mathcal{B}'}L'_{\mathcal{C}'} = (a'_{j\,k})$ τέτοιο ώστε

$$L'(\psi_k) = \sum_{j=1}^{n} a'_{j\,k} \varphi_j\,. \tag{5.3}$$

Όμως γνωρίζουμε οτι η δυϊκή απεικόνιση ικανοποιεί, για κάθε $k = 1, \ldots, m$ και κάθε $v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$,

$$\begin{aligned} L'(\psi_k)(v) &= \psi_k \circ L(v) \\ &= \psi_k(Av) \\ &= \psi_k \left( \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{\ell\,j} b_j w_\ell \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell\,j} b_j \psi_k(w_\ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{n} a_{k\,j} b_j \qquad \text{αφού } \psi_k(w_\ell) = 0 \text{ όταν } \ell \neq k, \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{k\,j} \varphi_j(v) \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε οτι

$$L'(\psi_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{k\,j} \varphi_j\,. \tag{5.4}$$

Συγκρίνοντας τις 5.3 και 5.4, καταλήγουμε οτι $a'_{j\,k} = a_{k\,j}$, δηλαδή οτι ο πίνακας $A' = {}_{\mathcal{B}'}L'_{\mathcal{C}'}$ της δυϊκής απεικόνισης $L' : W' \longrightarrow V'$ είναι ο **ανάστροφος** του πίνακα $A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$ της απεικόνισης $L : V \longrightarrow W$.

**Παράδειγμα 5.2** Θεωρούμε πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ και την αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Οι συναρτήσεις συντεταγμένων ορίζουν βάσεις στους δυϊκούς χώρους $(\mathbb{R}^3)'$ και $(\mathbb{R}^2)'$: εάν $\mathcal{E}_3 = \{e_1,\, e_2,\, e_3\}$ και $\mathcal{E}_2 = \{f_1,\, f_2\}$ είναι οι κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$, οι δυϊκές βάσεις είναι $\mathcal{E}'_3 = \{\varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi_3\}$ και $\mathcal{E}'_2 = \{\psi_1,\, \psi_2\}$, όπου $\varphi_i(e_j) = \delta_{i\,j}$ για $i,\, j = 1,\, 2,\, 3$ και $\psi_k(f_\ell) = \delta_{k\,\ell}$ για $k,\, \ell = 1,\, 2$.

Η δυϊκή απεικόνιση $(T_A)' : (\mathbb{R}^2)' \longrightarrow (\mathbb{R}^3)'$ απεικονίζει τη συνάρτηση $\psi \in (\mathbb{R}^2)'$ με $\langle f_k,\, \psi\rangle = b_k$ για $k = 1,\, 2$, στη συνάρτηση $(T_A)'(\psi) \in (\mathbb{R}^3)'$ με $\langle e_i,\, (T_A)'(\psi)\rangle = c_i$ για $i = 1,\, 2,\, 3$, και

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή, εάν $\psi(y_1,\, y_2) = b_1 y_1 + b_2 y_2$, τότε

$$(T_A)'(\psi)(x_1,\, x_2,\, x_3) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = b_1 x_1 + 2(b_1 + b_2) x_2 + (b_2 - b_1) x_3\,.$$

# Αλλαγή βάσης

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης $V$, και δύο διαφορετικές βάσεις του $V$,

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

και

$$\mathcal{B}' = \{x_1, \ldots, x_n\}\,.$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη σχέση ανάμεσα στις συντεταγμένες ενός διανύσματος $w \in V$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ και τις συντεταγμένες του $w$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}'$. Υποθέτουμε οτι

$$\begin{aligned} w &= a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \\ &= c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n\,, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$w_{\mathcal{B}} = (a_1, \ldots, a_n)$$

και

$$w_{\mathcal{B}'} = (c_1, \ldots, c_n)\,.$$

Επίσης θεωρούμε τον πίνακα $B$ που παριστάνει την ταυτοτική απεικόνιση $\mathbf{I}_V$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{B}$:

$$B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} = {}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'}\,.$$

Οι όροι $b_{ij}$ προσδιορίζονται από τις σχέσεις, για κάθε $j = 1, \ldots, n$

$$x_j = \mathbf{I}_V(x_j) = b_{1j}\, v_1 + \cdots + b_{nj}\, v_n\,. \tag{5.5}$$

Ο πίνακας $B$ έχει στη $j$ στήλη το διάνυσμα συντεταγμένων του $x_j \in \mathcal{B}'$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τα $c_j$ συναρτήσει των $a_i$ και των $b_{ij}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} w &= \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \left( \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, c_j \right) v_i\,. \end{aligned}$$

Αλλά από τη μοναδικότητα των συντεταγμένων έχουμε

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, c_j\,, \tag{5.6}$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Άρα το διάνυσμα συντεταγμένων $c$ του $w$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}' = \{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι λύση της εξίσωσης

$$Bc = a \tag{5.7}$$

όπου $a$ είναι το διάνυσμα συντεταγμένων του $w$ ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου η 5.7 γίνεται

$${}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'}\, w_{\mathcal{B}'} = w_{\mathcal{B}}$$

Θα ονομάσουμε τον πίνακα $B = {}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'}$, οι όροι του οποίου δίδονται από την 5.5, **πίνακα μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}'$ στη βάση** $\mathcal{B}$, ορολογία που συμφωνεί με αυτήν που χρησιμοποιήσαμε στο μάθημα Επίπεδο και Χώρος.

Ο πίνακας $B$ είναι αντιστρέψιμος, και ο αντίστροφος

$$B^{-1} = {}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}}$$

είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{B}'$.

Από την 5.7 βλέπουμε οτι

$$c = B^{-1}a\,.$$

Συνήθως είναι υπολογιστικά προτιμότερο να βρούμε το $c$ λύνοντας την εξίσωση 5.7 χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss, παρά να υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα $B^{-1}$.

Το επόμενο πρόβλημα που θα εξετάσουμε είναι η επίπτωση αλλαγής βάσεων στον πίνακα που παριστάνει μία γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης.

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους $V$ και $W$, και βάσεις $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ και $\mathcal{B}' = \{x_1, \ldots, x_n\}$ του $V$, και $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ και $\mathcal{C}' = \{y_1, \ldots, y_m\}$ του $W$.

Ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}'$ στη βάση $\mathcal{B}$ του $V$ είναι

$$B = {}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'} = (b_{ij})$$

και ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{C}'$ στη βάση $\mathcal{C}$ του $W$ είναι

$$C = {}_{\mathcal{C}}(\mathbf{I}_W)_{\mathcal{C}'} = (c_{k\ell})\,.$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, v_i \tag{5.8}$$

και για κάθε $\ell = 1, \ldots, m$ έχουμε

$$y_\ell = \sum_{k=1}^{m} c_{k\ell}\, w_k\,. \tag{5.9}$$

Θεωρούμε γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$, τον πίνακα $A$ της απεικόνισης $L$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$,

$$A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}} = (a_{ki})_{\substack{k=1,\ldots,m\\ i=1,\ldots,n}}$$

και τον πίνακα $D$ της απεικόνισης $L$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{C}'$,

$$D = {}_{\mathcal{C}'}L_{\mathcal{B}'} = (d_{\ell j})_{\substack{\ell=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}\,.$$

Από τον ορισμό των $A$ και $C$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ισχύει

$$L(v_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\, w_k \tag{5.10}$$

και για κάθε $j = 1, \ldots, n$ ισχύει

$$L(x_j) = \sum_{\ell=1}^{m} d_{\ell j}\, y_\ell\,. \tag{5.11}$$

Θέλουμε να εκφράσουμε τον $D$ συναρτήσει των $A$, $B$ και $C$.

Εφαρμόζουμε την απεικόνιση $L$ στην (5.8)και αντικαθιστούμε το $L(v_j)$ από την (5.10):

$$\begin{aligned} L(x_j) &= L\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, L(v_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}\, w_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, b_{ij}\right) w_k\,. \qquad (5.12) \end{aligned}$$

Εξ άλλου, στην (5.11) αντικαθιστούμε το $y_l$ από την (5.9):

$$\begin{aligned} L(x_j) &= \sum_{\ell=1}^{m} d_{\ell j}\, y_\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{m} d_{\ell j}\left(\sum_{k=1}^{m} c_{k\ell}\, w_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{\ell=1}^{m} c_{k\ell}\, d_{\ell j}\right) w_k\,. \qquad (5.13) \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις 5.12 και 5.13 έχουμε, από τη μοναδικότητα των συντεταγμένων, για κάθε $j = 1, \ldots, n$ και $k = 1, \ldots, m$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, b_{ij} = \sum_{\ell=1}^{m} c_{k\ell}\, d_{\ell j}\,,$$

δηλαδή

$$AB = CD\,.$$

Συμπεραίνουμε οτι

$$D = C^{-1}AB\,, \qquad (5.14)$$

ή, με το συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου,

$${}_{\mathcal{C}'}L_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{C}'}(\mathbf{I}_W)_{\mathcal{C}}\ {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}\ {}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'}\,. \qquad (5.15)$$

**Άσκηση 5.1** Θεωρήστε το σύνολο $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$ των $m \times n$ πινάκων με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$.

α΄. Δείξτε οτι $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$.

β΄. Εάν $A \in \mathcal{M}(n, \ell, \mathbb{K})$ δείξτε οτι η απεικόνιση $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{K}) \to \mathcal{M}(m, \ell, \mathbb{K}) : B \mapsto BA$ είναι γραμμική.

**Άσκηση 5.2** Θεωρήστε τον πίνακα με στοιχεία στο $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Φέρετε το πίνακα $A$ σε κλιμακωτή μορφή, και βρείτε τις λύσεις (στο $(\mathbb{Z}_3)^3$) του συστήματος

$$A\,u = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Άσκηση 5.3** Βρείτε τον πίνακα της απεικόνισης $L(x, y, z) = (x+y, 3y, x+2y-4z)$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Επαληθεύστε τον πίνακα που βρήκατε υπολογίζοντας το διάνυσμα $L(-1, 5, 2)$.

**Άσκηση 5.4** Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2 - x_3, 3x_1 - 5x_2, 4x_2 - 2x_3)$$

Προσδιορίστε τον πίνακα $A$ της $L$ ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$. Βρείτε την τάξη του $A$, και μια βάση της εικόνας της $L$.

**Άσκηση 5.5** Βρείτε τον πίνακα του τελεστή παραγώγισης $D$, που απεικονίζει το πολυώνυμο $p(x)$ στην παράγωγό του $Dp(x)$, ως προς τη βάση $\{2x^2, x, -1\}$ του $\mathbb{P}_2$. Επαληθεύστε τον πίνακα που βρήκατε υπολογίζοντας το πολυώνυμο $D(3x^2 - 2x + 4)$.

**Άσκηση 5.6** Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους $U$ και $V$, πεπερασμένης διάστασης, και υπόχωρο $X$ του $U$, $\dim X < \dim U$. Κατασκευάστε μία γραμμική απεικόνιση $L : U \to V$, με $\ker L = X$.

**Άσκηση 5.7** Βρείτε ένα ομογενές σύστημα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους, και πραγματικούς συντελεστές, του οποίου οι λύσεις είναι διανύσματα της μορφής $(\lambda, \lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Άσκηση 5.8** Στο διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{R}[x]_3$, θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $L : p(x) \mapsto q(x) = p(x+1)$ και $M : p(x) \mapsto r(x) = p(x-1)$. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $Q_\lambda : V \to V$ με $Q_\lambda = L + \lambda M$. Μελετήστε την τάξη του $Q_\lambda$ ως συνάρτηση του $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Άσκηση 5.9** Θεωρήστε το διανυσματικό χώρο όλων των $2 \times 2$ πινάκων, και τη γραμμική απεικόνιση $L : \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \to \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ που ορίζεται $L(X) = PX$, όπου $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Βρείτε τον $4 \times 4$ πίνακα της $L$ ως προς την ακόλουθη βάση του $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

**Άσκηση 5.10** Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \to \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$

$$L : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a-d & -b-c \\ b+c & d-a \end{bmatrix}.$$

α΄. Δείξτε οτι η $L$ είναι γραμμική απεικόνιση, και βρείτε τον πίνακα της $L$ ως προς την βάση

$$\mathcal{E}_{2,2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

β΄. Βρείτε βάσεις των $\ker L$, $\operatorname{im} L$ και $\ker L \cap \operatorname{im} L$.

**Άσκηση 5.11** Εάν $\sigma$ είναι μια μετάθεση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$, (δηλαδή μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το σύνολο στον εαυτό του) ορίζουμε τον $n \times n$ πίνακα $A_\sigma = (a_{ij})$ με

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν} \quad i = \sigma(j) \\ 0 & \text{εάν} \quad i \neq \sigma(j). \end{cases}$$

α΄. Βρείτε τους $3 \times 3$ πίνακες που αντιστοιχούν στις 6 διαφορετικές μεταθέσεις του $\{1, 2, 3\}$

β΄. Δείξτε οτι εάν $\tau$ είναι επίσης μετάθεση του $\{1, 2, \ldots, n\}$, τότε

$$A_{\sigma \circ \tau} = A_\sigma A_\tau.$$

**Άσκηση 5.12** Ο πίνακας μίας γραμμικής απεικόνισης ως προς κάποια βάση, εξαρτάται από τη διάταξη των στοιχείων της βάσης. Τί συμβαίνει στον πίνακα μίας γραμμικής απεικόνισης $L : V \to V$, ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, όταν μετατεθούν τα στοιχεία της $\mathcal{B}$;

Ελέγξτε παραδείγματα δύο ή τριών διαστάσεων, και κατόπιν διατυπώστε μία εικασία, και αποδείξτε την.

**Άσκηση 5.13** Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^4$ με τις κανονικές βάσεις $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ και $\mathcal{E}_4 = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$.

α'. Εάν $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ είναι η γραμμική απεικόνιση με πίνακα ως προς τις κανονικές βάσεις

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \end{bmatrix},$$

βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της $L$.

β'. Δείξτε οτι το σύνολο $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, με

$$v_1 = e_1 + e_2 - 2e_3 \quad , \quad v_2 = e_1 + e_2 + 2e_3 \quad , \quad v_3 = -e_1 + e_2$$

αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$. Εάν $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ είναι η γραμμική απεικόνιση με πίνακα ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{E}_4$ τον $A$, βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της $M$, και επαληθεύσατε οτι $L \neq M$.

**Άσκηση 5.14** $\mathbb{P}_k$ είναι ο χώρος των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με $k$, και $L : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ είναι η γραμμική απεικόνιση

$$L(ax^2 + bx + c) = ax + c$$

α'. Βρείτε τον πίνακα της $L$ ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2\}$ του $\mathbb{P}_2$ και $\mathcal{B}_1 = \{1, x\}$ του $\mathbb{P}_1$.

β'. Βρείτε τους πίνακες μετάβασης για τις βάσεις $\mathcal{B}_2' = \{1, x, x^2 + x\}$ του $\mathbb{P}_2$ και $\mathcal{B}_1' = \{1, x - 1\}$ του $\mathbb{P}_1$, και χρησιμοποιήστε τους για να υπολογίσετε τον πίνακα της $L$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_2'$ και $\mathcal{B}_1'$.

**Άσκηση 5.15** Αποδείξτε οτι το σύνολο $\{1 + x, x + x^2, \ldots, x^{n-1} + x^n, x^n\}$ είναι μία βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}[x]_n$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με $n$.

Εάν $L : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_3$ είναι η απεικόνιση $L(p) = xp'(x) + x^2p'(x)$ (όπου $p'(x)$ είναι η παράγωγος του πολυώνυμου $p(x)$) βρείτε τον πίνακα της $L$ ως προς τις βάσεις

α'. $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \quad , \quad \mathcal{C}_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$,

β'. $\mathcal{B}_2 = \{1 + x, x + x^2, x^2\} \quad , \quad \mathcal{C}_2 = \{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3\}$.

**Άσκηση 5.16** Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$L(x, y) = \left(\frac{23}{10}x + \frac{18}{5}y, \frac{18}{5}x + \frac{1}{5}y\right)$$

και η βάση $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}, \quad v_1 = (4, 3), \quad v_2 = \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.

α'. Βρείτε τον πίνακα της $L$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

β΄. Χρησιμοποιήστε τον πίνακα μετάβασης από την κανονική βάση στη $\mathcal{B}$, και τον αντίστροφο του, για να βρείτε τον πίνακα της $L$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

**Άσκηση 5.17** Θεωρούμε $m \times n$ πίνακα $A$ με συντελεστές στο σώμα $\mathbb{K}$, τάξεως $r$, και τη γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ με πίνακα $A$ ως προς τις κανονικές βάσεις του $\mathbb{K}^n$ και του $\mathbb{K}^m$. Αποδείξτε οτι υπάρχουν βάσεις $\mathcal{B}$ του $\mathbb{K}^n$ και $\mathcal{C}$ του $\mathbb{K}^m$ τέτοιες ώστε ο πίνακας της $L$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ να είναι ο

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix},$$

όπου $\mathbf{I}_r$ είναι ο ταυτοτικός $r \times r$ πίνακας, και $\mathbf{0}_1$, $\mathbf{0}_2$, $\mathbf{0}_3$ είναι αντίστοιχα οι μηδενικοί $r \times (n-r)$, $(m-r) \times r$ και $(m-r) \times (n-r)$ πίνακες.

**Άσκηση 5.18** Λέμε οτι δύο $m \times n$ πίνακες $A$ και $B$ είναι **ισοδύναμοι** εάν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P$ και $Q$, μεγέθους $n \times n$ και $m \times m$ αντίστοιχα, τέτοιοι ώστε $B = Q^{-1}AP$.

Δείξτε οτι δύο πίνακες είναι ισοδύναμοι εάν και μόνον εάν έχουν την ίδια τάξη.

**Άσκηση 5.19** Δίδονται οι διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{R}$ που παράγονται από τις ακμές και τις κορυφές ενός 'πολυγώνου': $C_1$ με βάση $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ και $C_0$ με βάση $\{A, B, C, D\}$.

Θεωρούμε την απεικόνιση $\partial : C_1 \to C_0$ η οποία ορίζεται

$$\begin{aligned} &\partial(b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma + b_4\delta + b_5\varepsilon) = \\ &= \ (b_4 - b_1)A + (b_1 - b_2 + b_5)B + (b_2 - b_3)C + (b_3 - b_4 - b_5)D\,. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της ομολογίας είναι προτιμότερο να εκφράσουμε την $\partial$ ως προς βάσεις του $C_1$ και του $C_0$ οι οποίες να περιέχουν τα διανύσματα $\beta + \gamma + \varepsilon$, $\alpha + \delta - \varepsilon$ και $B - A$, $C - B$, $D - C$, αντίστοιχα.

α΄. Βρείτε τις κατάλληλες βάσεις για το $C_1$ και το $C_0$, κατασκευάζοντας ταυτόχρονα τους πίνακες μετάβασης.

β΄. Βρείτε τον πίνακα $\partial$ ως προς τις αρχικές βάσεις, και λύστε το σύστημα με τους πίνακες μετάβασης για να υπολογίσετε τον πίνακα της απεικόνισης $\partial$ ως προς τις νέες βάσεις.

# Κεφάλαιο 6

# Αναλλοίωτοι υπόχωροι, ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα

## Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Θα μελετήσουμε πιο αναλυτικά την περίπτωση μίας απεικόνισης από ένα διανυσματικό χώρο $V$ στον εαυτό του,

$$L : V \to V$$

Μία τέτοια απεικόνιση την ονομάζουμε **γραμμικό τελεστή** στο $V$ (ή **ενδομορφισμό** του $V$). Γνωρίζουμε ήδη οτι τα σύνολα $\ker V$ και $\operatorname{im} V$ είναι υπόχωροι του $V$, και εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\begin{aligned} L(\ker V) &\subseteq \ker V \\ L(\operatorname{im} V) &\subseteq \operatorname{im} V\,. \end{aligned}$$

Για να μελετήσουμε σε βάθος τη δομή του τελεστή $L : V \to V$, θα εξετάσουμε εάν υπάρχουν άλλοι υπόχωροι $X \subseteq V$ τέτοιοι ώστε $L(X) \subseteq X$.

**Ορισμός.** $L : V \to V$ γραμμικός τελεστής. Ο υπόχωρος $X \subseteq V$ ονομάζεται **αναλλοίωτος** υπόχωρος από τον τελεστή $L$, εάν

$$L(X) \subseteq X\,.$$

Προσέξτε οτι δεν υποθέτουμε οτι $L(X) = X$, ούτε οτι $L^{-1}(X) \subseteq X$.

**Παράδειγμα 6.1** Στο χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{R}[x]$, θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathbb{R}[x]_k$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με $k$, και τον τελεστή παραγώγισης $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$. Για κάθε $k$ ο υπόχωρος $\mathbb{R}[x]_k$ είναι αναλλοίωτος από τον $D$, καθώς η παράγωγος ενός πολυωνύμου βαθμού μικρότερου ή ίσου με $k$ είναι επίσης πολυώνυμο του $\mathbb{R}[x]_k$.

Εάν $V$ είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης, και $X$ είναι υπόχωρος, γνωρίζουμε οτι κάθε βάση $\{x_1, \ldots, x_k\}$ του $X$ μπορεί να επεκταθεί σε βάση $\{x_1, \ldots, x_k,\, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ του $V$. Εάν $X$ είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή $L : V \to V$, και $[a_{ij}]$ είναι ο πίνακας του $L$ ως προς τη βάση $\{x_1, \ldots, x_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ τότε

$$L(x_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_{ij} v_i \,.$$

Όμως $L(x_j) \in X$ και συνεπώς $a_{ij} = 0$ για $i = k+1, \ldots, n$.

Άρα ο πίνακας $(a_{ij})$ είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} * & \vdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & * \end{bmatrix}$$

με ένα $(n-k) \times k$ μηδενικό μπλόκ κάτω αριστερά.

Θα μελετήσουμε αναλλοίωτους υπόχωρους σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Το αντίστοιχο για χώρους άπειρης διάστασης αποτελεί ένα από τα σημαντικά προβλήματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης.

## Ιδιοδιανύσματα, Ιδιοτιμές

Σε ένα αναλλοίωτο υπόχωρο διάστασης 1, ο τελεστής $L$ έχει πολύ απλή δομή: Εάν $X$ είναι αναλλοίωτος από τον $L$ και $\dim X = 1$, τότε για κάθε $x \in X$, $L(x) \in X$ και συνεπώς $L(x) = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$. Αντίστροφα, εάν υπάρχει $x \in V$, $x \neq 0$, τέτοιο ώστε $L(x) = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$, τότε ο υπόχωρος $X = \langle x \rangle$ είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της $L$, διάστασης 1.

**Ορισμός.** Θεωρούμε γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Οι αριθμοί $\lambda$ του $\mathbb{K}$ για τους οποίους υπάρχουν μη μηδενικά διανύσματα $v \in V$ που ικανοποιούν

$$L\,v = \lambda v \tag{6.1}$$

ονομάζονται **ιδιοτιμές** του γραμμικού τελεστή $L$, ενώ τα *μη μηδενικά* διανύσματα που ικανοποιούν την 6.1 ονομάζονται **ιδιοδιανύσματα** του $L$ για την ιδιοτιμή $\lambda$. Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του $L$ για την ιδιοτιμή $\lambda$, μαζί με το διάνυσμα 0, αποτελεί έναν υπόχωρο του $V$ αναλλοίωτο από τον $L$, που ονομάζεται **ιδιόχωρος** του $L$ για την ιδιοτιμή $\lambda$.

**Άσκηση 6.1** Ελέγξτε οτι πράγματι ο ιδιόχωρος του $L$ για την ιδιοτιμή $\lambda$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $V$.

**Παράδειγμα 6.2** Ο τελεστής $L = a\mathbf{I}_V : v \mapsto av$ έχει μοναδική ιδιοτιμή $a$. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του $V$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $L$ για την ιδιοτιμή $a$. Ο ιδιοχώρος του $L$ για την ιδιοτιμή $a$ είναι όλος ο χώρος $V$.

**Παράδειγμα 6.3** Ο τελεστής $L(x, y) = (3x, \frac{1}{2}y)$ έχει ιδιοδιάνυσμα $(1, 0)$ για την ιδιοτιμή 3 και ιδιοδιάνυσμα $(0, 1)$ για την ιδιοτιμή $\frac{1}{2}$.
Ο τελεστής περιστροφής κατά $\frac{\pi}{2}$, $R(x, y) = (-y, x)$ δεν έχει ιδιοδιανύσματα στο $\mathbb{R}^2$.

**Πρόταση 6.1** *Εάν $L : V \to V$ και $M : W \to W$ είναι γραμμικοί τελεστές και υπάρχει ισομορφισμός $T : V \to W$ τέτοιος ώστε*

$$L = T^{-1} \circ M \circ T$$

*τότε οι τελεστές $L$ και $M$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*

**Απόδειξη.** Για κάθε $v \in V$ έχουμε $L(v) = \lambda v$ εάν και μόνον εάν $T^{-1} \circ M \circ T(v) = \lambda v$, δηλαδή $M \circ T(v) = T(\lambda v) = \lambda T(v)$. Συνεπώς $\lambda$ είναι ιδιοτιμή του $L$, με ιδιοδιάνυσμα $v$, εάν και μόνον εάν $\lambda$ είναι ιδιοτιμή του $M$, με ιδιοδιάνυσμα $T(v)$.

□

**Θεώρημα 6.2** *Θεωρούμε τελεστή $L : V \to V$, και $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ διαφορετικές ιδιοτιμές του $L$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $v_1, \dots, v_m$. Τότε το σύνολο $\{v_1, \dots, v_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

**Απόδειξη.** Εάν το $\{v_1, \dots, v_m\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε υπάρχει $k$, με $1 < k \leq m$, τέτοιο ώστε $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αλλά

$$v_k = a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1} \,. \tag{6.2}$$

Εφαρμόζοντας την $L$ στις δύο πλευρές της 6.2 έχουμε

$$L(v_k) = a_1 L(v_1) + \cdots + a_{k-1} L(v_{k-1})$$

και αφού $v_i$ είναι ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_i$

$$\lambda_k v_k = a_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} \tag{6.3}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 6.2 με $\lambda_k$, και την αφαιρούμε από την 6.3:

$$0 = a_1(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} \,.$$

Εφ' όσον τα $v_1, \dots, v_{k-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $a_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, k-1$, αλλά $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$, και συνεπώς $a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$. Αλλά τότε, από την 6.2, $v_k = 0$, άτοπο. Συμπεραίνουμε οτι το σύνολο $\{v_1, \dots, v_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

□

**Πόρισμα 6.3** *Κάθε τελεστής στο $V$ έχει το πολύ $\dim V$ διαφορετικές ιδιοτιμές*

□

**Λήμμα 6.4** *Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή $L : V \to V$ εάν και μόνον εάν $L - \lambda \mathbf{I}_V$ δεν είναι ενεικόνιση. Σε αυτήν την περίπτωση, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda$ είναι ο πυρήνας $\ker(L - \lambda \mathbf{I}_V)$, και κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του $\ker(L - \lambda \mathbf{I}_V)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $L$ για την ιδιοτιμή $\lambda$.*

**Απόδειξη.** Εάν $L - \lambda \mathbf{I}_V$ δεν είναι ενεικόνιση, τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$ τέτοιο ώστε $(L - \lambda \mathbf{I}_V)(v) = 0$, δηλαδή $L(v) = \lambda v$, και συνεπώς $v$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $L$ και $\lambda$ ιδιοτιμή του $L$.

Αντίστροφα, εάν $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του $L$, τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$ τέτοιο ώστε $L(v) = \lambda v$, και συνεπώς $(L - \lambda \mathbf{I}_V)(v) = 0$, άρα $L - \lambda \mathbf{I}_V$ δεν είναι ενεικόνιση.

□

# Πολυώνυμα και τελεστές

Θεωρούμε ένα πολυώνυμο $p$ με συντελεστές στο $\mathbb{K}$,

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k \,.$$

Εάν $L : V \to V$ είναι γραμμικός τελεστής στο $V$, τότε οι δυνάμεις $L^i = L \circ \cdots \circ L$ είναι επίσης γραμμικοί τελεστές στο $V$. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον τελεστή $L$ στη θέση της μεταβλητής του πολυωνύμου, και το αποτέλεσμα είναι πάλι ένας γραμμικός τελεστής στο $V$,

$$p(L) = a_0 \mathbf{I}_V + a_1 L + \cdots + a_k L^k$$

$$p(L) \,:\, V \to V \,:\, v \mapsto a_0 v + a_1 L(v) + \cdots + a_k L^k(v) \,.$$

Παρατηρούμε οτι εάν $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα, οι τελεστές $p(L)$ και $q(L)$ μετατίθενται:

$$p(L)q(L) = (pq)(L) = (qp)(L) = q(L)p(L) \,.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα από τη θεωρία των πολυωνύμων.

**Θεώρημα 6.5** *Εάν $\mathbb{K}$ είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών (ή οποιοδήποτε αλγεβρικά κλειστό σώμα) κάθε πολυώνυμο βαθμού $n$ παραγοντοποιείται σε γινόμενο $n$ διωνύμων. Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ τέτοιοι ώστε:*

$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = a_n (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n) \,.$$

$\square$

Οι αριθμοί $\lambda_1$, $\lambda_2$, …, $\lambda_n$ είναι οι **ρίζες** του πολυωνύμου. **Πολλαπλότητα** μίας ρίζας $\lambda_i$ είναι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος $k$ για τον οποίο $(t - \lambda_i)^k$ διαιρεί το πολυώνυμο.

# Ύπαρξη ιδιοτιμών

**Θεώρημα 6.6** *Κάθε τελεστής σε ένα μη μηδενικό διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, πάνω από το $\mathbb{C}$, έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε διανυσματικό χώρο $V$, $\dim V = n$, ένα γραμμικό τελεστή $L : V \to V$, και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$. Τότε η συλλογή $v$, $L(v)$, $L^2(v)$, …, $L^n(v)$ έχει $n+1$ στοιχεία, και συνεπώς είναι γραμμικά εξαρτημένη. Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί $a_i \in \mathbb{C}$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε

$$a_0 v + a_1 L(v) + \cdots + a_n L^n(v) = 0$$

Παρατηρούμε οτι, αφού $v \neq 0$, κάποιο από τα $a_i$ για $i \geq 1$ είναι διαφορετικό από μηδέν. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$. Αυτό είναι πολυώνυμο βαθμού $k$, για $1 \leq k \leq n$. Δηλαδή υπάρχει θετικός ακέραιος $k \leq n$, τέτοιος ώστε $a_k \neq 0$ και

$a_i = 0$ για κάθε $i = k+1, \ldots, n$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.5 αυτό παραγοντοποιείται σε γινόμενο $k$ διωνύμων, δηλαδή υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_k$ τέτοιοι ώστε

$$p(x) = a_k(x - c_1) \cdots (x - c_k)\,.$$

Συνεπώς ο τελεστής $p(L)$ είναι ίσος με τον τελεστή $a_k(L - c_1\mathbf{I}_V) \circ \cdots \circ (L - c_k\mathbf{I}_V)$, και

$$a_k(L - c_1\mathbf{I}_V) \circ \cdots \circ (L - c_k\mathbf{I}_V)(v) = 0\,.$$

Αφού $v \neq 0$, ο τελεστής $(L - c_1\mathbf{I}_V) \circ \cdots \circ (L - c_k\mathbf{I}_V)$ δεν είναι ενεικονικός, και συμπεραίνουμε οτι υπάρχει τουλάχιστον ένα $i$, $1 \leq i \leq k$, για το οποίο η απεικόνιση $L - c_i\mathbf{I}_V$ δεν είναι ενεικονική. Συνεπώς υπάρχει $w \in V$ τέτοιο ώστε $(L - c_i\mathbf{I}_V)(w) = 0$, δηλαδή $L(w) = c_i w$, και $\lambda = c_i$ είναι ιδιοτιμή του $L$.

$\square$

# Ιδιοτιμές και πίνακες

Εάν $A$ είναι $n \times n$ πίνακας στο $\mathcal{M}(n,\, \mathbb{K})$, ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in \mathbb{K}^n$ λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** του πίνακα $A$ εάν

$$Av = \lambda v$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$. Ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{K}$ λέγεται **ιδιοτιμή** του πίνακα $A$ εάν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $v \in \mathbb{K}^n$ τέτοιο ώστε

$$Av = \lambda v\,.$$

**Πρόταση 6.7** *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, βάση $\mathcal{B}$ του $V$, και γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Τότε $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή $L$ εάν και μόνον εάν $\lambda$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ που παριστάνει τον $L$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.*

**Απόδειξη.** Εάν $v_{\mathcal{B}}$ συμβολίζει το διάνυσμα συντεταγμένων του διανύσματος $v \in V$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, τότε, από τον ορισμό του ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ έχουμε

$$(L(v))_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}\, v_{\mathcal{B}}\,.$$

Συνεπώς $L(v) = \lambda v$ εάν και μόνον εάν ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}\, v_{\mathcal{B}} = (\lambda v)_{\mathcal{B}} = \lambda v_{\mathcal{B}}$.

$\square$

Δύο πίνακες $A$ και $B$ λέγονται **όμοιοι** εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $S$ τέτοιος ώστε $A = S^{-1}BS$. Από την Πρόταση 6.1 και την Πρόταση 6.7 έχουμε το ακόλουθο συμπέρασμα.

**Πρόταση 6.8** *Δύο όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*

□

Από τη Γραμμική Άλγεβρα I γνωρίζουμε πώς να υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ όταν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου** $\det(A - \lambda \mathbf{I}_n)$, ο ιδιόχωρος του $A$ για την ιδιοτιμή $\lambda_i$ είναι ο μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A - \lambda_i \mathbf{I}_n)$, ενώ τα ιδιοδιανύσματα του $A$ για την ιδιοτιμή $\lambda_i$ είναι τα μη μηδενικά διανύσματα του $\mathcal{N}(A - \lambda_i \mathbf{I}_n)$. Υπενθυμίζουμε οτι **αλγεβρική πολλαπλότητα** μίας ιδιοτιμής είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής ως ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, ενώ **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής είναι η διάσταση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή.

Εάν $V$ είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $L$ είναι ένας γραμμικός τελεστής στον $V$, θεωρούμε πίνακες $A$ και $B$ που αντιστοιχούν στον $L$ ως προς διαφορετικές βάσεις του $V$. Γνωρίζουμε από το Κεφάλαιο 5, 5.15, οτι οι πίνακες $A$ και $B$ είναι όμοιοι, και συνεπώς οτι $\det A = \det B$. Εύκολα βλέπουμε οτι οι πίνακες πολυωνύμων $A - \lambda \mathbf{I}_n$ και $B - \lambda \mathbf{I}_n$ είναι επίσης όμοιοι, και συνεπώς τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των δύο πινάκων είναι ίσα

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}_n) = \det(B - \lambda \mathbf{I}_n)\,.$$

Συμπεραίνουμε οτι μπορούμε να ορίσουμε το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** $\chi_L(\lambda)$ του τελεστή $L$, να είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα του $L$ ως προς οποιαδήποτε βάση του $V$.

**Παράδειγμα 6.4** Θα υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k \end{bmatrix},$$

δηλαδή του $k \times k$ πίνακα $[b_{ij}]$, με $b_{ij} = 0$ όταν $j \neq k$ και $i \neq j+1$, $b_{(j+1)\,j} = 1$ για $j = 1, \dots, k-1$ και $b_{ik} = a_i$. Αυτό είναι ίσο με την ορίζουσα

$$\det(B - x\mathbf{I}_k) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -x & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x & a_{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k - x \end{vmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα $\det(B - x\mathbf{I}_n)$ θα χρησιμοποιήσουμε απαλοιφή από κάτω προς τα επάνω, για να απαλείψουμε τα $-x$ στη διαγώνιο. Αφαιρώντας $-x$ φορές την τελευταία γραμμή στην προτελευταία, έχουμε

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -x & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1} + a_k x - x^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k - x \end{vmatrix}.$$

Συνεχίζουμε, αφαιρώντας $-x$ φορές τη γραμμή $i$ από τη γραμμή $i-1$, για $i = k-1, k-2, \dots, 2$, και καταλήγουμε με την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 + a_2 x + \cdots + a_k x^{k-1} - x^k \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & a_2 + a_3 x + \cdots + a_k x^{k-2} - x^{k-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1} + a_k x - x^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_k - x \end{vmatrix},$$

την οποία αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη γραμμή και βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \det(B - x\mathbf{I}) \\ &= (-1)^{k+1}(a_1 + a_2 x + \cdots + a_k x^{k-1} - x^k) \\ &= (-1)^k (x^k - a_k x^{k-1} - \cdots - a_2 x - a_1)\,. \end{aligned}$$

## Διαγώνιοι και τριγωνικοί πίνακες

**Πρόταση 6.9** *Εάν $L : V \to V$ είναι γραμμικός τελεστής, και ο διανυσματικός χώρος $V$ έχει μία πεπερασμένη βάση από ιδιοδιανύσματα του $L$, τότε ο πίνακας του $L$ ως προς αυτήν τη βάση είναι διαγώνιος, με τις ιδιοτιμές του τελεστή στη διαγώνιο.*

**Απόδειξη.** Έστω $\{v_1, \dots, v_n\}$ μία βάση από ιδιοδιανύσματα, και $\lambda_1, \dots \lambda_n$ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Τότε

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i = \lambda_j v_j\,.$$

Αφού τα $v_1, \dots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οι συντελεστές είναι μοναδικοί, και

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad i \neq j \\ \lambda_j & \text{εάν} \quad i = j\,. \end{cases}$$

Συνεπώς ο πίνακας $[a_{ij}]$ είναι διαγώνιος.

□

Είναι προφανές οτι ισχύει και το αντίστροφο: εάν ο πίνακας του τελεστή $L$ ως προς κάποια βάση είναι διαγώνιος, τότε τα στοιχεία της βάσης είναι ιδιοδιανύσματα του $L$.

Εάν $\dim V = n$ και ο $L$ έχει $n$ διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε υπάρχει μία βάση του $V$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του $L$, και ως προς την οποία ο πίνακας του $L$ είναι διαγώνιος. Έχουμε δει όμως στη Γραμμική Άλγεβρα Ι οτι ακόμη και πάνω από το $\mathbb{C}$ μπορεί να υπάρχουν λιγότερα από $n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, και να μην υπάρχει βάση ως προς την οποία ο πίνακας του $L$ είναι διαγώνιος.

**Πρόταση 6.10** *Η γεωμετρική πολλαπλότητα μίας ιδιοτιμής είναι μικρότερη ή ίση προς την αλγεβρική πολλαπλότητα.*

**Απόδειξη.** Εάν ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\lambda_1$ του τελεστή $L$ έχει διάσταση $k$, μπορούμε να επιλέξουμε βάση με $v_1, \ldots, v_k$ τα ιδιοδιανύσματα της $\lambda_1$. Ο πίνακας του $L$ ως προς αυτή τη βάση περιέχει ένα διαγώνιο μπλοκ $\lambda_1 \mathbf{I}_k$, και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_L(\lambda)$ διαιρείται από το $(\lambda - \lambda_1)^k$. Συνεπώς $k$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από την πολλαπλότητα της ρίζας $\lambda_1$ στο $\chi_L$.

□

**Άσκηση 6.2** Συμπληρώστε πιο αναλυτικά την προηγούμενη απόδειξη.

Στη συνέχεια θα δούμε οτι πάνω από το $\mathbb{C}$ μπορούμε πάντα να βρούμε βάση ως προς την οποία ο πίνακας του $L$ είναι *άνω τριγωνικός*.

**Πρόταση 6.11** *Θεωρούμε γραμμικό τελεστή $L : V \to V$, και βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ του $V$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο πίνακας $A$ της $L$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι άνω τριγωνικός*
2. *$L(v_j) \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$ για $j = 1, \ldots, n$.*
3. *Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ ο υπόχωρος $\langle v_1, \ldots, v_j \rangle$ είναι αναλλοίωτος από τον $L$.*

**Απόδειξη.** Το 2 σημαίνει οτι το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ έχει μηδενικά στις τελευταίες $n - j$ θέσεις, που είναι ακριβώς το ίδιο με το 1. Είναι προφανές οτι το 3 συνεπάγεται το 2. Θα δείξουμε οτι το 2 συνεπάγεται το 3. Εάν $v \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$, τότε $v = a_1 v_1 + \cdots + a_j v_j$. Εάν ισχύει το 2, για κάθε $i = 1, \ldots, j$

$$L(v_i) \in \langle v_1, \ldots, v_i \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_j \rangle .$$

Συνεπώς

$$L(v) = a_1 L(v_1) + \cdots + a_j L(v_j) \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle .$$

□

**Πρόταση 6.12** *Υποθέτουμε οτι ο τελεστής $L : V \to V$ έχει άνω τριγωνικό πίνακα ως προς κάποια πεπερασμένη βάση του διανυσματικού χώρου $V$. Τότε οι ιδιοτιμές του $L$ είναι ακριβώς τα στοιχεία της διαγωνίου αυτού του πίνακα.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε τον άνω τριγωνικό πίνακα $A$ της $L$, ως προς τη βάση $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Τότε η απεικόνιση $L - \lambda \mathbf{I}_V$, για $\lambda \in \mathbb{K}$, έχει πίνακα ως προς τη βάση $\mathcal{B}$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν $\lambda$ είναι ίσο με κάποιο από τα στοιχεία της διαγωνίου, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Άρα οι ιδιοτιμές του $L$ είναι ακριβώς $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

□

**Θεώρημα 6.13** *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο $V$ πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{C}$, και γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Τότε υπάρχει βάση του $V$ ως προς την οποία ο $L$ έχει άνω τριγωνικό πίνακα.*

**Απόδειξη.** Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στη διάσταση του $V$. Εάν $\dim V = 1$, αρκεί να παρατηρήσουμε οτι κάθε $1 \times 1$ πίνακας είναι άνω τριγωνικός.

Υποθέτουμε οτι $\dim V = n \geq 2$. Αφού βρισκόμαστε πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς, από το Θεώρημα 6.6, ο $L$ έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή $\lambda_1$. Έστω $u_1$ ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda_1$. Συμπληρώνουμε το $\{u_1\}$ σε βάση $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ του $V$, και θεωρούμε τον πίνακα του $L$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, $A = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$. Η πρώτη στήλη του $A$ περιέχει το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(u_1) = \lambda_1 u_1$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$. Συνεπώς ο $A$ έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε το $V$ ως ευθύ άθροισμα των $V_1 = \langle u_1 \rangle$ και $U = \langle u_2, \ldots, u_n \rangle$. Υπενθυμίζουμε τις απεικονίσεις $j_2 : U \to V_1 \oplus U$ και $p_2 : V_1 \oplus U \to U$, σελ. 55, και ορίζουμε

$$M = p_2 \circ L \circ j_2 : U \to U .$$

Για $i = 2, \ldots, n$, $M(u_i) = a_{2i}u_2 + \cdots + a_{ni}u_n$, όπου $(a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ είναι η $i$ στήλη του πίνακα $D$. Συνεπώς $D$ είναι ο πίνακας που παριστάνει την απεικόνιση $M$ ως προς τη βάση $\{u_2, \ldots, u_n\}$. Αφού $\dim U = n - 1$, από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει βάση $\mathcal{W} = \{w_2, \ldots, w_n\}$, ως προς την οποία ο πίνακας της απεικόνισης $M$

είναι άνω τριγωνικός. Εξετάζουμε τώρα τον πίνακα του $L$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}' = \{u_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Αυτός έχει τη μορφή

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

όπου $T$ είναι ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας ο οποίος παριστάνει την απεικόνιση $M$ ως προς τη βάση $\mathcal{W}$. Συνεπώς ο $T$ είναι άνω τριγωνικός. Συμπεραίνουμε οτι ο πίνακας $B$ του τελεστή $L$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}'$ είναι άνω τριγωνικός.

□

# Θεώρημα Cayley - Hamilton

**Θεώρημα 6.14 (Cayley - Hamilton)** *Εάν $\chi_L(x)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή $L$, σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης $V$, τότε*

$$\chi_L(L) = 0\,.$$

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε οτι $\chi_L(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$. Θα δείξουμε οτι ο τελεστής $\chi_L(L) = b_n L^n + \cdots + b_1 L + b_0 \mathbf{I}_V$ παίρνει την τιμή $0$ σε κάθε $v \in V$, και συνεπώς οτι είναι ο μηδενικός τελεστής.

Εάν $v = 0$ τότε προφανώς $\chi_L(L)(v) = 0$. Υποθέτουμε οτι $v \neq 0$. Εάν $\dim V = n$, θεωρούμε τη συλλογή των διανυσμάτων

$$v_1 = v,\, v_2 = L(v),\, v_3 = L^2(v),\, \ldots,\, v_{n+1} = L^n(v)\,.$$

Αφού αυτή περιέχει $n+1$ διανύσματα, είναι γραμμικά εξαρτημένη. Από το Λήμμα 2.6 υπάρχει φυσικός αριθμός $k$ τέτοιος ώστε η συλλογή $v_1, \ldots, v_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη, ενώ η συλλογή $v_1, \ldots, v_{k+1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένη και υπάρχουν $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ τέτοια ώστε

$$v_{k+1} = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k\,.$$

Επεκτείνουμε το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_k\}$ σε βάση του $V$, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n\}$. Παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned} L(v_1) &= v_2 \\ L(v_2) &= v_3 \\ &\vdots \\ L(v_{k-1}) &= v_k \\ L(v_k) &= v_{k+1} = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει οτι ο υπόχωρος $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ είναι αναλλοίωτος από τον $L$ και συνεπώς οτι ο πίνακας του $L$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ έχει τη μορφή

$$_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

ενώ το $k \times k$ μπλόκ $A$ έχει στη στήλη $j$ τις $k$ πρώτες συντεταγμένες του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, δηλαδή

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & a_{k-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & a_k \end{bmatrix}.$$

Γνωρίζουμε οτι

$$\begin{aligned} \chi_L(x) &= \det(_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}} - x\mathbf{I}_n) \\ &= \det(A - x\mathbf{I}_k)\det(D - x\mathbf{I}_{n-k}) \\ &= \chi_A(x)\chi_D(x) \end{aligned}$$

ενώ από το Παράδειγμα 6.4 έχουμε οτι

$$\chi_A(x) = (-1)^k(x^k - a_k x^{k-1} - \cdots - a_2 x - a_1).$$

Αντικαθιστούμε $L$ για το $x$ και υπολογίζουμε την τιμή του τελεστή $\chi_A(L)$ στο $v$:

$$\begin{aligned} \chi_A(L)(v) &= (-1)^k(L^k(v) - a_k L^{k-1}(v) - \cdots - a_2 L(v) - a_1 v) \\ &= (-1)^k(v_{k+1} - a_k v_k - \cdots - a_2 v_2 - a_1 v_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Αφού οι τελεστές $\chi_A(L)$ και $\chi_D(L)$ μετατίθενται,

$$\chi_L(L)(v) = \chi_D(L)\chi_A(L)(v) = 0.$$

Τέλος, αφού αυτό ισχύει για κάθε $v \in V$, $\chi_L(L)$ είναι ο μηδενικός τελεστής.

□

**Παράδειγμα 6.5** Θεωρούμε τον τελεστή $L(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$. Ο πίνακας του $L$ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_L(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα, ο τελεστής $\chi_L(L)$ είναι ο μηδενικός τελεστής και ο πίνακας $\chi_A(A) = 0$. Πράγματι

$$\chi_A(A) = A^2 - 3A - 4I_2 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Το Θεώρημα Cayley - Hamilton επιτρέπει να απλοποιούμε παραστάσεις με πίνακες, ή να εκφράζουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα ως πολυώνυμο. Αφού $A^2 - 3A = 4I_2$, έχουμε $A(A - 3I_2) = 4I_2$ και συνεπώς $4A^{-1} = A - 3I_2$.

**Άσκηση 6.3** Δίδεται γραμμικός τελεστής $L : V \to V$, και $X$, $Y$ γραμμικοί υπόχωροι του $V$ αναλλοίωτοι από τον $L$. Να εξετάσετε εάν οι γραμμικοί υπόχωροι $X + Y$ και $X \cap Y$ είναι αναλλοίωτοι.

**Άσκηση 6.4** Αποδείξτε οτι μία γραμμική απεικόνιση $L : V \to V$ είναι ενεικονική εάν και μόνον εάν το μηδέν δεν είναι ιδιότιμη της $L$.

**Άσκηση 6.5** Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή $u \mapsto Au$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

α′. στο $\mathbb{R}^3$

β′. στο $\mathbb{C}^3$

**Άσκηση 6.6** Βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή shift στο $\mathbb{R}^\infty$,

$$s(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, \ldots)$$

**Άσκηση 6.7** Δίδονται οι πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

και

$$A_2 = \begin{bmatrix} 15 & 7 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 13 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

α′. Για κάθε πίνακα, βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές.

β′. Για κάθε ιδιοτιμή, βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα, και τον ιδιόχωρο.

γ′. Εάν χρειάζεται συμπληρώσετε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο ιδιοδιανυσμάτων, ώστε να κατασκευάσετε μία βάση του $\mathbb{R}^3$, και βρείτε τον πίνακα της απεικόνισης $x \mapsto A_i x$ ως προς αυτήν τη βάση.

**Άσκηση 6.8** Θεωρούμε διανυσματικό χώρο $V$ πάνω από το σώμα των μιγαδικών αριθμών, με πεπερασμένη διάσταση, γραμμική απεικόνιση $L : V \to V$, και γραμμικό υπόχωρο $X$ του $V$, αναλλοίωτο από την $L$. Δείξτε οτι ο $X$ περιέχει ένα ιδιοδιάνυσμα της $L$.

**Άσκηση 6.9** Έστω $L$ και $M$ δύο γραμμικοί τελεστές στον $V$, οι οποίοι αντιμετατίθενται: $L \circ M = M \circ L$. Δείξτε οτι τότε κάθε ιδιοχώρος του $M$ είναι αναλλοίωτος από τον $L$.

Συμπεράνετε οτι οι $L$ και $M$ έχουν ένα κοινό ιδιοδιάνυσμα.

**Άσκηση 6.10** Βρείτε τις ιδιοτιμές ενός άνω τριγωνικού $n \times n$ πίνακα.

**Άσκηση 6.11** Θεωρούμε τον $3 \times 3$ άνω τριγωνικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τα ιδιοδιανυσματικά του τελεστή $T_A : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α'. $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ είναι ανα δύο διαφορετικοί.

β'. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_2 = \lambda_3$.

γ'. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

**Άσκηση 6.12** Θεωρούμε τον $2 \times 2$ πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Έχει ο τελεστής $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ιδιοτιμές; Συγκρίνετε αυτόν τον τελεστή με τον αντίστοιχο $T_A : \mathbb{C}^2 \to C^2$.

**Άσκηση 6.13** Δείξτε οτι, αν ο τετραγωνικός πίνακας $A$ με πραγματικούς συντελεστές, ικανοποιεί τη σχέση $A^2 + I = 0$ αυτός δεν επιδέχεται πραγματικές ιδιοτιμές. Συμπεράνετε οτι δεν υπάρχει $3 \times 3$ πίνακας με πραγματικούς συντελεστές ο οποίος να ικανοποιεί τη σχέση $A^2 + I = 0$.

**Άσκηση 6.14** Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

α'. Δείξτε οτι $A^3 - aA^2 + 2A - I = 0$.

β'. Δείξτε οτι ο $A$ είναι αντιστρέψιμος και συμπεράνετε από το α' τον αντίστροφο πίνακα $A^{-1}$.

γ'. Υπολογίστε τον πίνακα $A^5 - aA^4 + A^3 - (1-a)A^2 - A + I$.

**Άσκηση 6.15** Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, του οποίου ο πίνακας ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

α′. Διαγωνιοποιήστε τον τελεστή $L$.

β′. Βρείτε τον πίνακα ως προς την κανονική βάση, του τελεστή $L^6-8L^4+L^3-9L+I$.

**Άσκηση 6.16** Δίδεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$ και οι ακολουθίες $u_n$ και $v_n$ οι οποίες ορίζονται αναδρομικά:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}.$$

α′. Εξετάστε εάν είναι ο $A$ διαγωνιοποιήσιμος

β′. Υπολογίστε τα $u_n$ και $v_n$ ως συναρτήσεις του $n$.

γ′. Βρείτε ακολουθία $w_n$ τέτοια ώστε $w_1=1$, $w_2=4$ και $w_{n+2}-15w_{n+1}+50w_n=0$.

**Άσκηση 6.17** Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 4 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

και διαγωνιοποιήστε τον $A$.

**Άσκηση 6.18** Ένας $n\times n$ πίνακας $A$ ονομάζεται **μηδενοδύναμος** εάν υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός $k$ τέτοιος ώστε $A^k=0$. Δείξτε οτι εάν $\lambda\in\mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή ενός μηδενοδύναμου πίνακα, τότε $\lambda=0$. Συμπεράνετε οτι $k\le n$.

# Κεφάλαιο 7

# Νόρμα και εσωτερικό γινόμενο

Μέχρι τώρα, οι ιδιότητες των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ τις οποίες γενικεύσαμε σε διανυσματικούς χώρους, βασίζονται στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό. Δεν έχουμε αναφερθεί σε εσωτερικό γινόμενο.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε εσωτερικό γινόμενο σε γενικούς διανυσματικούς χώρους, και θα μελετήσουμε κάποιες ιδιότητές του στην περίπτωση που το σώμα $\mathbb{K}$ είναι οι πραγματικοί ή οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$\text{Σε αυτό το κεφάλαιο, } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}\,.$$

## Νόρμα

Για το $\mathbb{R}^n$, έχουμε δει το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x,\, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

και τη νόρμα

$$||x|| = \sqrt{\langle x,\, y\rangle}\,.$$

Στο $\mathbb{C}$, θα θέλαμε η νόρμα $||z||$ να συμπίπτει με το μέτρο $|z|$ και, εάν $z = x + \mathrm{i}y$ με τη νόρμα του $(x,\, y)$:

$$||z|| = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = ||(x,\, y)||\,.$$

Ανάλογα, στο $\mathbb{C}^n$, εάν θέλουμε $||(z_1, \ldots, z_n)||$ να συμπίπτει με τη νόρμα του διανύσματος $(x_1,\, y_1,\, x_2,\, y_2, \ldots, x_n,\, y_n)$ στο $\mathbb{R}^{2n}$, όπου $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$, πρέπει να ορίσουμε τη νόρμα

$$||z|| = \sqrt{z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_n\bar{z}_n}$$

και το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle z,\, w\rangle = z_1\bar{w}_1 + \cdots + z_n\bar{w}_n\,.$$

Μετά από αυτές τις παρατηρήσεις, δίδουμε τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός.** $V$ διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C})$. Μια απεικόνιση $V \to \mathbb{R} : v \mapsto ||v||$ ονομάζεται **νόρμα** (ή **στάθμη**) εάν

N 1. $||v|| = 0$ εάν και μόνον εάν $v = 0$

N 2. Για κάθε $v \in V$ και $a \in \mathbb{K}$, $||av|| = |a|\,||v||$

N 3. Για κάθε $v$, $w \in V$, $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (τριγωνική ανισότητα)

**Λήμμα 7.1** *Σε ένα διανυσματικό χώρο $V$ με νόρμα,*

1. *Για κάθε $v \in V$, $||v|| \geq 0$.*
2. *Για κάθε $v$, $w \in V$, $||v - w|| \geq |\ ||v|| - ||w||\ |$*

**Απόδειξη.**

1. Για κάθε $v \in V$,

$$\begin{aligned} ||v|| &= \frac{1}{2}(||v|| + ||v||) = \frac{1}{2}(||v|| + ||-v||) \\ &\geq \frac{1}{2}||v + (-v)|| = \frac{1}{2}||0|| = 0\,. \end{aligned}$$

2. Για κάθε $v$, $w \in V$,

$$||v|| = ||(v - w) + w|| \leq ||v - w|| + ||w||\,,$$

και συνεπώς

$$||v - w|| \geq ||v|| - ||w||\,.$$

Ανάλογα

$$||v - w|| = ||w - v|| \geq ||w|| - ||v||\,.$$

□

**Παράδειγμα 7.1** Στο $\mathbb{R}^n$ και στο $\mathbb{C}^n$ η ευκλείδεια νόρμα ( ή $\ell_2$-νόρμα) είναι η συνήθης νόρμα

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

και

$$||z|| = \sqrt{z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_n\bar{z}_n}\,.$$

**Παράδειγμα 7.2** Η $\ell_1$-νόρμα στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως

$$||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|\,.$$

Ελέγχουμε τα αξιώματα:

N 1.

$$\begin{aligned} ||x||_1 = 0 &\Leftrightarrow |x_1| = \cdots = |x_n| = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \,. \end{aligned}$$

N 2.

$$||ax||_1 = \sum_{i=1}^{n} |ax_i| = |a| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |a| \, ||x||_1 \,.$$

N 3.

$$||x+y||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| = ||x||_1 + ||y||_1 \,.$$

**Παράδειγμα 7.3** Η $\ell_\infty$-νόρμα στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως

$$||x||_\infty = \max\{|x_i| \ : \ i = 1, \ldots, n\} \,.$$

**Άσκηση 7.1** Δείξτε οτι $||x||_\infty$ ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας.

**Παράδειγμα 7.4** Στο χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{K}[x]$, με $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, ορίζουμε τη νόρμα

$$||p(x)|| = \left( \int_0^1 |p(t)|^2 dt \right)^{1/2} .$$

Ο έλεγχος των αξιωμάτων N 1 και N 2 είναι εύκολος. Για το N 3 παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned} ||p(x) + q(x)||^2 &= \int_0^1 |p(t) + q(t)|^2 dt \\ &= \int_0^1 |p(t)|^2 dt + \int_0^1 |q(t)|^2 dt + 2\mathrm{Re} \int_0^1 p(t)\overline{q(t)} dt \end{aligned}$$

ενώ

$$(||p(x)|| + ||q(x)||)^2 = ||p(x)||^2 + ||q(x)||^2 + 2||p(x)|| \, ||q(x)|| \,.$$

Άρα για να ισχύει η τριγωνική ανισότητα, αρκεί να ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{Re} \int_0^1 p(t)\overline{q(t)} dt \le ||p(x)|| \; ||q(x)|| \,,$$

την οποία θα αποδείξουμε στην Πρόταση 7.3.

**Παράδειγμα 7.5** Στο χώρο $C[a, b]$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$ (με πραγματικές ή μιγαδικές τιμές) ορίζουμε την $\ell_2$-νόρμα

$$||f|| = \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

και την $\ell_\infty$-νόρμα
$$||f||_\infty = \max\{|f(x)| \ : \ x \in [a,\, b]\}\,.$$

**Άσκηση 7.2** Δείξτε οτι $||f||_\infty$ ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας.

# Εσωτερικό γινόμενο

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό του συζυγούς, $\bar{a}$, κατανοώντας οτι εάν το σώμα $\mathbb{K}$ είναι οι πραγματικοί αριθμοί, τότε $\bar{a} = a$.

**Ορισμός.** Θεωρούμε διανυσματικό χώρο $V$ πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Μια απεικόνιση
$$V \times V \to \mathbb{K} \, : \, (v,\, w) \mapsto \langle v,\, w\rangle$$
ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** εάν

ΕΓ 1. Είναι γραμμική στην πρώτη μεταβλητή, δηλαδή εάν για κάθε $u,\, v,\, w \in V$ και $a \in \mathbb{K}$,
$$\langle u + v,\, w\rangle = \langle u,\, w\rangle + \langle v,\, w\rangle$$
και
$$\langle av,\, w\rangle = a\langle v,\, w\rangle\,.$$

ΕΓ 2. Για κάθε $v,\, w \in V$,
$$\langle v,\, w\rangle = \overline{\langle w,\, v\rangle}$$

ΕΓ 3. Για κάθε $v \in V$, εάν $v \neq 0$, τότε $\langle v,\, v\rangle > 0$.

Εάν $\langle v,\, w\rangle = 0$, λέμε οτι τα διανύσματα $v$ και $w$ είναι **ορθογώνια**.

Παρατηρούμε οτι εάν το σώμα $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, τότε η ιδιότητα ΕΓ 2 σημαίνει οτι το εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό, και μαζί με την ΕΓ 1, οτι είναι γραμμικό και στη δεύτερη μεταβλητή.

Αντιθέτως, εάν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, για τη δεύτερη μεταβλητή έχουμε
$$\begin{aligned} \langle v,\, aw\rangle &= \overline{\langle aw,\, v\rangle} \\ &= \overline{a\langle w,\, v\rangle} \\ &= \bar{a}\langle v,\, w\rangle\,. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 7.6** Στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο: εάν $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$,
$$\langle x,\, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,.$$

Τα διανύσματα $(x_1,\, x_2)$ και $(-x_2,\, x_1)$ είναι ορθογώνια διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$ με το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

**Παράδειγμα 7.7** Στο $\mathbb{C}^n$ ορίζεται εσωτερικό γινόμενο για $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$,

$$\langle z,\, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i\,.$$

**Άσκηση 7.3** Τα διανύσματα $(z_1,\, z_2)$ και $(-z_2,\, z_1)$ *δεν* είναι ορθογώνια στο $\mathbb{C}^2$ με αυτό το εσωτερικό γινόμενο. Βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα ορθογώνιο στο $(z_1,\, z_2)$

**Παράδειγμα 7.8** Στο χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{K}[x]$ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle p(x),\, q(x)\rangle = \int_0^1 p(t)\,\overline{q(t)}\,dt \tag{7.1}$$

**Άσκηση 7.4** Ελέγξτε οτι η 7.1 πράγματι ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.

Τα πολυώνυμα $p(x) = (x - \frac{1}{2})^2$ και $q(x) = (x - \frac{1}{2})^3$ είναι ορθογώνια:

$$\begin{aligned} \langle p(x),\, q(x)\rangle &= \int_0^1 (t-\tfrac{1}{2})^2 (t-\tfrac{1}{2})^3 dt \\ &= \int_0^1 (t-\tfrac{1}{2})^5 dt \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 7.9** Στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,\, b]$, με πραγματικές τιμές, $C[a,\, b]$, ή με μιγαδικές τιμές , $C_{\mathbb{C}}[a,\, b]$, ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(s)\,\overline{g(s)}\,ds \tag{7.2}$$

**Άσκηση 7.5** Ελέγξτε οτι η 7.2 πράγματι ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.

**Άσκηση 7.6** Δείξτε οτι οι συναρτήσεις sin και cos είναι ορθογώνιες στο $C[0,\, \pi]$.

**Θεώρημα 7.2 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)** *Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει, για κάθε $v$, $w$:*

$$|\langle v,\, w\rangle| \leq \sqrt{\langle v,\, v\rangle}\sqrt{\langle w,\, w\rangle}\,.$$

**Απόδειξη.** Εάν $w = 0$, τότε και οι δύο πλευρές μηδενίζονται και η σχέση επαληθεύεται.

Υποθέτουμε οτι $w \neq 0$ και θεωρούμε, για $a \in \mathbb{K}$, το διάνυσμα $v - aw$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle v - aw,\, v - aw\rangle \\ &= \langle v,\, v\rangle - \langle v,\, aw\rangle - \langle aw,\, v\rangle + \langle aw,\, aw\rangle \\ &= \langle v,\, v\rangle - \bar{a}\langle v,\, w\rangle - a\overline{\langle v,\, w\rangle} + a\bar{a}\langle w,\, w\rangle\,. \end{aligned}$$

Ειδικότερα, για $a = \frac{\langle v,\, w\rangle}{\langle w,\, w\rangle}$ έχουμε

$$\langle v,\, v\rangle \geq \frac{\langle v,\, w\rangle\overline{\langle v,\, w\rangle}}{\langle w,\, w\rangle}$$

ή

$$|\langle v,\, w\rangle|^2 \leq \langle v,\, v\rangle\langle w,\, w\rangle\,,$$

και αφού οι πραγματικοί αριθμοί $\langle v,\, v\rangle$, $\langle w,\, w\rangle$ και $|\langle v,\, w\rangle|$ είναι θετικοί ή μηδέν, έχουμε

$$|\langle v,\, w\rangle| \leq \sqrt{\langle v,\, v\rangle}\sqrt{\langle w,\, w\rangle}\,.$$

□

Ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Cauchy-Schwarz είναι οι ακόλουθες ανισότητες.

Στο χώρο $\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$, με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο $\langle x,\, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i$,

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\right)^{1/2}\,.$$

Στο χώρο $C[a,\, b]$, με εσωτερικό γινόμενο $\langle f,\, g\rangle = \int_a^b f(s)g(s)ds\,$,

$$\left|\int_a^b f(s)g(s)ds\right| \leq \left(\int_a^b (f(s))^2\, ds\right)^{1/2}\left(\int_a^b (g(s))^2\, ds\right)^{1/2}\,.$$

**Πρόταση 7.3** *Εάν $V$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε ορίζεται μία νόρμα στο $V$:*

$$||v|| = \sqrt{\langle v,\, v\rangle}\,.$$

**Απόδειξη.** Η απόδειξη των Ν 1 και Ν 2 είναι απλή. Για να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα Ν 3, παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned} ||v + w||^2 &= \langle v + w,\, v + w\rangle \\ &= ||v||^2 + ||w||^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle v,\, w\rangle\,, \end{aligned}$$

και οτι

$$(||v|| + ||w||)^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2||v||\,||w||\,.$$

Αλλά από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, $\langle v, w\rangle \leq ||v||\,||w||$ και συνεπώς

$$||v+w||^2 \leq (||v|| + ||w||)^2\,.$$

Αφού οι πραγματικοί αριθμοί $||v+w||$, $||v||$ και $||w||$ είναι θετικοί ή μηδέν, έχουμε

$$||v+w|| \leq ||v|| + ||w||\,.$$

□

Με τον συμβολισμό της νόρμας, η ανισότητα Cauchy-Schwarz γράφεται στη μορφή

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v||\,||w||\,.$$

Στην ευκλείδεια γεωμετρία, ο 'νόμος του παραλληλογράμμου' λέει οτι σε ένα παραλληλόγραμμο, το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων πλευρών ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων. Όταν το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο, αυτό είναι ισοδύναμο με το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Θα δούμε οτι ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει σε κάθε διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

**Πρόταση 7.4** *Έστω $V$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο.*

1. ***Νόμος του Παραλληλογράμμου***. *Για κάθε $v, w \in V$ ισχύει η ισότητα*

$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2\,.$$

2. ***Πυθαγόρειο Θεώρημα***. *Εάν $v_1, \ldots, v_k \in V$ και $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ όταν $i \neq j$, τότε*

$$||v_1 + \cdots + v_k||^2 = ||v_1||^2 + \cdots + ||v_k||^2\,.$$

**Απόδειξη.** Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο έχουμε $||v||^2 = \langle v, v\rangle$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} ||v+w||^2 &= \langle v+w, v+w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle\,, &(7.3)\\ ||v-w||^2 &= \langle v-w, v-w\rangle = \langle v, v\rangle - \langle v, w\rangle - \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle\,. &(7.4)\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις (7.3) και (7.4) έχουμε τον 'νόμος του παραλληλογράμμου'.

$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2\langle v, v\rangle + 2\langle w, w\rangle\,.$$

Για $k=2$ το 'Πυθαγόρειο Θεώρημα' προκύπτει από την (7.3, αφού $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται με επαγωγή στο $k$. Αφού $\langle v_1 + \cdots + v_{k-1}, v_k\rangle = 0$,

$$\begin{aligned} ||v_1 + \cdots + v_k||^2 &= ||v_1 + \cdots + v_{k-1}||^2 + ||v_k||^2\\ &= ||v_1||^2 + \cdots + ||v_{k-1}||^2 + ||v_k||^2\,.\end{aligned}$$

□

**Παράδειγμα 7.10** Θα δείξουμε οτι η $\ell_1$ νόρμα στο $\mathbb{R}^2$ δεν ικανοποιεί το νόμο του παραλληλογράμμου. Συμπεραίνουμε οτι η $\ell_1$ νόρμα δεν προκύπτει από κάποιο εσωτερικό γινόμενο.

Θεωρούμε τα διανύσματα $v = (1, 0)$ και $w = (0, 1)$. Τότε $||v||_1 = |1| + |0| = 1$, $||w||_1 = 1$, και $||v+w||_1 = 2$, $||v-w||_1 = 2$. Άρα $2||v||^2 + 2||w||^2 = 4$ ενώ $||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 8$.

# Ορθοκανονικά σύνολα διανυσμάτων

Ένα σύνολο διανυσμάτων $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ονομάζεται **ορθογώνιο** εάν τα στοιχεία του είναι ορθογώνια ανά δύο, δηλαδή εάν για κάθε $i,\, j = 1, \ldots, n, i \neq j$ ,

$$\langle v_i,\, v_j \rangle = 0\,.$$

Εάν επί πλέον, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, $||v_i|| = 1$, το σύνολο ονομάζεται **ορθοκανονικό**. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $\delta$ του Kronecker, βλέπουμε οτι το σύνολο $S$ είναι ορθοκανονικό εάν και μόνον εάν, για κάθε $i,\, j = 1, \ldots, n$ ,

$$\langle v_i,\, v_j \rangle = \delta_{ij}\,.$$

**Λήμμα 7.5** *Ένα ορθοκανονικό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε οτι $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο, και οι αριθμοί $a_1, \ldots, a_n$ είναι τέτοιοι ώστε

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0\,.$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, n$, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0,\, v_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,\, v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i,\, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} \\ &= a_j\,. \end{aligned}$$

Συνεπώς $a_j = 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$, και το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

□

Ένα ορθοκανονικό σύνολο αποτελεί μία ιδιαίτερα χρήσιμη βάση για το χώρο τον οποίο παράγει. Οι συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς μία ορθοκανονική βάση δίδονται απλώς από τα εσωτερικά γινόμενα του διανύσματος με τα διανύσματα της βάσης. Πράγματι, εάν $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση, και

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

τότε

$$\langle v,\, v_j \rangle \;=\; \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\,,\, v_j \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i,\, v_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} \\
&= a_j \,.
\end{aligned}
$$

Σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση, εφαρμόζοντας τη διαδικασία **ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt**.

**Θεώρημα 7.6 (Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt)** *Θεωρούμε χώρο $V$ με εσωτερικό γινόμενο, και ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Τότε υπάρχει ορθοκανονικό σύνολο $\{e_1, \ldots, e_n\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, n$*

$$e_i \in \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$$

*και*

$$\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \,.$$

Στην απόδειξη του Θεωρήματος ο συμβολισμός $\langle \ldots \rangle$ χρησιμοποιείται για να δηλώσει τόσο το εσωτερικό γινόμενο όσο και τον παραγόμενο υπόχωρο, αλλά η διάκριση είναι συνήθως εύκολη από τα συμφραζόμενα.

**Απόδειξη.** Θα ορίσουμε πρώτα ένα σύνολο μη μηδενικών ορθογωνίων διανυσμάτων $e'_1, \ldots, e'_n$, και στη συνέχεια θα ορίσουμε τα μοναδιαία διανύσματα

$$e_i = \frac{1}{||e'_i||}\, e'_i \,.$$

Αφού τα $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $v_1 \neq 0$, και ορίζουμε

$$
\begin{aligned}
e'_1 &= v_1 \,, \\
e'_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2,\, e'_1 \rangle}{\langle e'_1, e'_1 \rangle}\, e'_1 \,.
\end{aligned}
$$

Το $e'_2$ προκύπτει από το $v_2$ αφαιρώντας κατάλληλο πολλαπλάσιο του $e'_1$ ώστε $e'_2$ να είναι ορθογώνιο προς το $e'_1$. Πράγματι

$$
\begin{aligned}
\langle e'_2, e'_1 \rangle &= \left\langle v_2 - \frac{\langle v_2,\, e'_1 \rangle}{\langle e'_1, e'_1 \rangle}\, e'_1,\, e'_1 \right\rangle \\
&= \langle v_2,\, e'_1 \rangle - \frac{\langle v_2,\, e'_1 \rangle}{\langle e'_1, e'_1 \rangle} \langle e'_1,\, e'_1 \rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε οτι αφού τα $e'_1$, $v_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $e'_2 \neq 0$ και τα $e'_1$, $e'_2$ παράγουν τον ίδιο υπόχωρο που παράγουν τα $v_1$, $v_2$.

Στη συνέχεια, για $j = 3, \ldots, n$, ορίζουμε αναδρομικά τα μη μηδενικά διανύσματα

$$e'_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j,\, e'_i \rangle}{\langle e'_i, e'_i \rangle}\, e'_i\,, \tag{7.5}$$

τα οποία ικανοποιούν $\langle e'_i,\, e'_j \rangle = 0$ για $i = 1, \ldots, j-1$.

Τέλος για κάθε $j = 1, \ldots, n$ ορίζουμε

$$e_j = \frac{1}{||e_j||}\, e'_j\,.$$

Από την 7.5 είναι φανερό οτι

$$e_j \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$$

και οτι

$$v_j \in \langle e_1, \ldots, e_j \rangle$$

Συνεπώς, για κάθε $j = 1, \ldots, n$

$$\langle e_1, \ldots, e_j \rangle = \langle v_1, \ldots, v_j \rangle\,.$$

$\square$

**Άσκηση 7.7** Θεωρούμε διανύσματα $v = (v_1, v_2)$ και $w = (w_1, w_2)$ στο $\mathbb{R}^2$.

α′. Δείξτε οτι η συνάρτηση

$$(v, w) = 4v_1w_1 + 9v_2w_2$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$.

β′. Δείξτε οτι η συνάρτηση

$$(v, w) = 2v_1w_1 - v_2w_2$$

δεν ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

**Άσκηση 7.8** Θεωρούμε το χώρο $C[0, 1]$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 1]$, με εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

α′. Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x - 2$.

β′. Δείξτε οτι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = 4x - 3$ είναι ορθογώνιες.

γ′. Βρείτε μία συνάρτηση ορθογώνια προς την $f(x) = 6x + 12$

**Άσκηση 7.9** Θεωρούμε το μιγαδικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^2$, με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Βρείτε τα $(u, v)$, $||u||$, $||v||$ και την απόσταση $d(u, v) = ||u - v||$ για τα διανύσματα:

α′. $u = (2 - \mathrm{i}, 3 + 2\mathrm{i}), \quad v = (3 - 2\mathrm{i}, 2 + \mathrm{i})$.

β′. $u = (2 - 3\mathrm{i}, -2 + 3\mathrm{i}), \quad v = (1, 1)$.

**Άσκηση 7.10** Στο χώρο $\mathbb{R}^3$, με το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο, βρείτε την ορθοκανονική βάση που προκύπτει από την εφαρμογή της διαδικασίας Gram-Schmidt στη βάση

$$\{(1, 1, 0), (2, 1, 0), (0, 1, 2)\}.$$

**Άσκηση 7.11** Θεωρήστε θετική συνεχή συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Δείξτε οτι εάν $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα, τότε

$$\langle p, q\rangle_f = \int_0^1 f(t)p(t)q(t)dt\,,$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στο χώρο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές.

Εάν $f(x) = x+1$, βρείτε ορθοκανονική βάση για το χώρο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 1, με το εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle_f$.

**Άσκηση 7.12** Βρείτε όλα τα διαφορετικά εσωτερικά γινόμενα που ορίζονται σε ένα διανυσματικό χώρο διάστασης 2 πάνω από το $\mathbb{R}$.

**Άσκηση 7.13** Θεωρούμε διανυσματικό χώρο $V$ πάνω από το $\mathbb{R}$, με εσωτερικό γινόμενο, και δύο διαφορετικά διανύσματα $a,\, b \in V$. Αποδείξτε οτι εάν $x \in V$ και $||x-a|| + ||x-b|| = ||a-b||$, τότε $x = \lambda a + \mu b$, με $\lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$ και $\lambda + \mu = 1$.

**Άσκηση 7.14** Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$, με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο.

α΄. Επαληθεύστε οτι τα διανύσματα

$$v_1 = (1,\, 1,\, 1),\; v_2 = (1,\, 2,\, -3),\; v_3 = (5,\, -4,\, -1)$$

είναι ανά δύο ορθογώνια, και βρείτε μία ορθοκανονική βάση του $V$, διαφορετική από την κανονική.

β΄. Βρείτε τα μοναδιαία διανύσματα τα οποία είναι ταυτόχρονα ορθογώνια με τα $v_1 - v_2$ και $v_1 + v_3$.

γ΄. Βρείτε τα διανύσματα τα οποία είναι ορθογώνια στο $2v_2 + v_3$ και ανήκουν στον γραμμικό υπόχωρο που παράγεται από τα $v_1 - v_2,\, v_1 + v_3$.

**Άσκηση 7.15** Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο, και τον υπόχωρο $X$ που παράγεται από τα διανύσματα $u_1 = (1,\, 1,\, 0,\, 0)$ και $u_2 = (0,\, 1,\, -1,\, 1)$.

Βρείτε μία ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $X^{\perp}$, και συμπληρώστε την σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$.

# Κεφάλαιο 8

# Τελεστές σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο

## Ερμιτιανοί τελεστές

Για έναν τελεστή $L$ σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, έχουμε δει οτι εάν υπάρχει βάση του $V$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του $L$ τότε ο πίνακας του $L$ ως προς αυτή τη βάση είναι διαγώνιος. Τώρα θα δούμε οτι σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να δώσουμε συγκεκριμένα κριτήρια για να συμβαίνει αυτό.

Σε αυτό το κεφάλαιο όλοι οι διανυσματικοί χώροι είναι πάνω από το σώμα $\mathbb{C}$ ή το σώμα $\mathbb{R}$.

**Ορισμός.** Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο $V$ με εσωτερικό γινόμενο και ένα γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Ο τελεστής $L$ ονομάζεται **ερμιτιανός** εάν για κάθε $u,\, v \in V$,

$$\langle L(u),\, v\rangle = \langle u,\, L(v)\rangle\,.$$

Ένας ερμιτιανός τελεστής σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο ονομάζεται **συμμετρικός**.

**Παράδειγμα 8.1** Θεωρούμε τον τελεστή $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x,\, y) = (x + 2y,\, 2x)$. Ως προς το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο έχουμε

$$\langle L(u_1,\, u_2),\, (v_1,\, v_2)\rangle = \langle (u_1 + 2u_2, 2u_1),\, (v_1,\, v_2)\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_1 + 2u_1v_2$$

και

$$\langle (u_1,\, u_2),\, L(v_1,\, v_2)\rangle = \langle (u_1,\, u_2),\, (v_1 + 2v_2,\, 2v_1)\rangle = u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1\,.$$

Ο τελεστής $L$ είναι συμμετρικός.

**Παράδειγμα 8.2** Θεωρούμε τον τελεστή $M : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $L(z,\, w) = (z + \mathrm{i}w,\, -\mathrm{i}z)$. Ως προς το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^2$ έχουμε

$$\langle L(u_1,\, u_2),\, (v_1,\, v_2)\rangle = \langle (u_1 + \mathrm{i}u_2, -\mathrm{i}u_1),\, (v_1,\, v_2)\rangle = u_1\bar{v}_1 + \mathrm{i}u_2\bar{v}_1\mathrm{i}u_1\bar{v}_2$$

και

$$\langle (u_1,\, u_2),\, L(v_1,\, v_2)\rangle = \langle (u_1,\, u_2),\, (v_1 + \mathrm{i}v_2,\, -\mathrm{i}v_1)\rangle = u_1\bar{v}_1 + u_1(-\mathrm{i})\bar{v}_2 - u_2\bar{\mathrm{i}}\bar{v}_1\,.$$

**Ορισμός.** Θεωρούμε έναν τετραγωνικό μιγαδικό πίνακα $A = [a_{ij}]$. O **συζυγής** (ή **αναστροφοσυζυγής**) του πίνακα $A$ είναι ο πίνακας $A^* = [b_{ij}]$, όπου

$$b_{ij} = \bar{a}_{ji}\,.$$

Δηλαδή οι όροι του πίνακα $A^*$ είναι οι μιγαδικοί συζυγείς των όρων του ανάστροφου του $A$. Εάν ο πίνακας $A$ είναι πραγματικός, τότε $A^* = A^T$.

**Παράδειγμα 8.3** Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 2 & 3+\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 2 & 3-\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

και

$$A^* = (\overline{A})^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\mathrm{i} & 3-\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

**Ορισμός.** Ένας τετραγωνικός μιγαδικός πίνακας $A$ ονομάζεται **ερμιτιανός** εάν είναι ίσος με τον συζυγή του, $A^* = A$.
Ένας ερμιτιανός πίνακας του οποίου όλοι οι όροι είναι πραγματικοί αριθμοί είναι **συμμετρικός**.

Παρατηρούμε οτι τα διαγώνια στοιχεία ενός ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί.

**Λήμμα 8.1** *Θεωρούμε ερμιτιανό τελεστή $L : V \to V$ σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, και ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του $V$. Τότε ο πίνακας $A = [a_{ij}]$ του $L$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι ερμιτιανός,*

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}\,.$$

**Απόδειξη.** Θεωρούμε την ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{u_1,\, \ldots,\, u_n\}$. Εάν $A = [a_{ij}]$ είναι ο πίνακας του $L$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, τότε για κάθε $j = 1,\, \ldots,\, n$,

$$L(u_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} u_k\,.$$

Αλλά τότε

$$\begin{aligned}\langle L(u_j),\, u_i\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{kj}u_k,\, u_i \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle a_{kj}u_k,\, u_i\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\langle u_k,\, u_i\rangle \\ &= a_{ij}\,,\end{aligned}$$

αφού η βάση είναι ορθοκανονική. Εξ άλλου,

$$\begin{aligned}\langle u_j,\, L(u_i)\rangle &= \left\langle u_j,\, \sum_{k=1}^{n} a_{ki}u_k \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle u_j,\, a_{ki}u_k\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ki}\langle u_j,\, u_k\rangle \\ &= \bar{a}_{ji}\,.\end{aligned}$$

Αφού ο $L$ είναι ερμιτιανός, $a_{ij} = \langle L(u_j),\, u_i\rangle = \langle u_j,\, L(u_i)\rangle = \bar{a}_{ji}$ και ο πίνακας $A$ είναι ίσος με τον συζυγή του.

□

**Πρόταση 8.2** *Θεωρούμε μιγαδικό διανυσματικό χώρο $V$ και τελεστή $L : V \to V$. Εάν ο $L$ είναι ερμιτιανός, τότε οι ιδιοτιμές του $L$ είναι πραγματικοί αριθμοί.*

**Απόδειξη.** Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ μία ιδιοτιμή του $L$, και $v \in V$ ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda$, $L(v) = \lambda v$. Τότε

$$\langle L(v),\, v\rangle = \langle \lambda v,\, v\rangle = \lambda\langle v,\, v\rangle\,,$$

και

$$\langle v,\, L(v)\rangle = \langle v,\, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v,\, v\rangle\,.$$

Αφού $\langle v,\, v\rangle \neq 0$ και ο $L$ είναι ερμιτιανός, $\lambda = \bar{\lambda}$. Άρα η ιδιοτιμή $\lambda$ είναι πραγματικός αριθμός.

□

**Λήμμα 8.3** *Εάν $L : V \to V$ είναι ερμιτιανός τελεστής, τότε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.*

**Απόδειξη.** Θεωρούμε ιδιοτιμές $\lambda$ και $\mu$ του $L$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $u$ και $v$. Τότε

$$\lambda\langle u,\, v\rangle = \langle L(u),\, v\rangle = \langle u,\, L(v)\rangle = \bar{\mu}\langle u,\, v\rangle\,.$$

Αφού οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές, $\lambda\langle u,\, v\rangle = \mu\langle u,\, v\rangle$, και εάν $\lambda \neq \mu$, $\langle u,\, v\rangle = 0$.

□

# Μοναδιαίοι τελεστές

**Ορισμός.** Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο $V$ με εσωτερικό γινόμενο και ένα γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Ο τελεστής $L$ ονομάζεται **μοναδιαίος** (ή **ορθομοναδιαίος**) εάν διατηρεί το εσωτερικό γινομενο, δηλαδή εάν για κάθε $u,\, v \in V$,

$$\langle L(u),\, L(v) \rangle = \langle u,\, v \rangle \,.$$

Ένας μοναδιαίος τελεστής σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο ονομάζεται **ορθογώνιος**.

**Παράδειγμα 8.4** Ο τελεστής $L(x,\, y) = (x \cos\vartheta - y \sin\vartheta,\, x \sin\vartheta + y \cos\vartheta)$ είναι ορθογώνιος. Ο τελεστής $M(z,\, w) = (e^{\mathrm{i}\vartheta} z,\, e^{-\mathrm{i}\vartheta} w)$ είναι μοναδιαίος. Ελέγξτε οτι διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$ και στο $\mathbb{C}^2$ αντίστοιχα.

**Ορισμός.** Ένας τετραγωνικός μιγαδικός πίνακας $A$ ονομάζεται **ορθομοναδιαίος** εάν $A^* A = \mathbf{I}_n$.
Ένας ορθομοναδιαίος πίνακας του οποίου όλοι οι όροι είναι πραγματικοί αριθμοί ονομάζεται **ορθογώνιος**.

**Παράδειγμα 8.5** Ένας $2 \times 2$ πραγματικός πίνακας είναι ορθογώνιος εάν και μόνον εάν είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{bmatrix}$$

για κάποιο $\vartheta$.

**Λήμμα 8.4** *Θεωρούμε μοναδιαίο τελεστή $L : V \to V$ σε χώρο πεπερασμένης διάστασης $n$, και ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}$ του $V$. Τότε ο πίνακας $A = [a_{ij}]$ του $L$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι ορθομοναδιαίος,*

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \,.$$

**Απόδειξη.** Θεωρούμε την ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{u_1,\, \ldots,\, u_n\}$. Εάν $A = [a_{ij}]$ είναι ο πίνακας του $L$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, τότε για κάθε $j = 1,\, \ldots,\, n$,

$$L(u_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} u_k \,.$$

Αφού ο $L$ είναι μοναδιαίος και η βάση $\mathcal{B}$ είναι ορθοκανονική, $\langle L(u_i),\, L(u_j) \rangle = \langle u_i,\, u_j \rangle = \delta_{ij}$. Εξ άλλου

$$\langle L(u_i),\, L(u_j) \rangle \;=\; \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} u_k,\, \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j} u_\ell \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{\ell j}\langle u_k,\, u_\ell\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{\ell j}\delta_{k\ell} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{kj} \\
&= (A^*A)_{ji}\,.
\end{aligned}
$$

Συμπεραίνουμε οτι $A^*A = \mathbf{I}_n$ και ο πίνακας $A$ είναι ορθομοναδιαίος.

□

**Πρόταση 8.5** *Θεωρούμε μιγαδικό διανυσματικό χώρο $V$ και τελεστή $L : V \to V$. Εάν ο $L$ είναι μοναδιαίος, τότε οι ιδιοτιμές του $L$ είναι μιγαδικοί αριθμοί μέτρου $1$.*

**Απόδειξη.** Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ μία ιδιοτιμή του $L$, και $v \in V$ ένα ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda$, $L(v) = \lambda v$. Τότε

$$\langle v,\, v\rangle = \langle L(v),\, L(v)\rangle = \langle \lambda v,\, \lambda v\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle v,\, v\rangle\,.$$

Αφού $\langle v,\, v\rangle \neq 0$, $\lambda\bar{\lambda} = 1$.

□

# Διαγωνιοποίηση ερμιτιανών τελεστών.

**Λήμμα 8.6 (Λήμμα Schur.)** *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο $V$ πεπερασμένης διάστασης, με εσωτερικό γινόμενο πάνω απ το $\mathbb{C}$, και γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση του $V$ ως προς την οποία ο $L$ έχει άνω τριγωνικό πίνακα.*

**Απόδειξη.** Η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα του Θεωρήματος Τριγωνοποίησης, Θεώρημα 6.13. Πρέπει να δείξουμε οτι εάν $V$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε να επιλέξουμε τη βάση $\mathcal{B}'$ να είναι ορθοκανονική.

Υποθέτουμε οτι $\dim V = n \geq 2$. Ο τελεστής $L$ έχει μία ιδιοτιμή $\lambda_1$. Έστω $u_1$ ένα ιδιοδιάνυσμα με $||u_1|| = 1$. Συμπληρώνουμε σε ορθοκανονική βάση του $V$, $\mathcal{B} = \{u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n\}$ και θεωρούμε τον πίνακα $A = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$. Η πρώτη στήλη του $A$ είναι το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(u_1) = \lambda_1 u_1$, και συνεπώς ο $A$ έχει τη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Θεωρούμε το $V$ ως ευθύ άθροισμα των $V_1 = \langle u_1\rangle$ και $U = \langle u_2,\, \ldots,\, u_n\rangle$ και τις κανονικές απεικονίσεις $j_2 : U \to V_1 \oplus U$ και $p_2 : V_1 \oplus U \to U$, σελ. 55. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$M = p_2 \circ L \circ j_2 \,:\, U \to U$$

και παρατηρούμε οτι ο πίνακας που παριστάνει την απεικόνιση $M$ ως προς τη βάση $\{u_2, \ldots, u_n\}$ είναι ο $D$.

Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει βάση $\mathcal{W} = \{w_2, \ldots, w_n\}$, ως προς την οποία ο πίνακας $T$ της απεικόνισης $M$ είναι άνω τριγωνικός. Παρατηρούμε οτι ο πίνακας του $L$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}' = \{u_1, w_2, \ldots, w_n\}$ έχει τη μορφή

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

δηλαδή είναι άνω τριγωνικός.

□

**Πόρισμα 8.7** *Εάν $V$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_L$ του τελεστή $L : V \to V$ αναλύεται σε παράγοντες πρώτου βαθμού πάνω από το $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση ως προς την οποία ο $L$ έχει άνω τριγωνικό πίνακα.*

**Απόδειξη.** Αφού $\chi_L(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)\cdots(x - \lambda_n)$, οι ιδιοτιμές του $L$ είναι οι πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, και υπάρχει τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα $u_1 \in V$, με $||u_1|| = 1$, έστω για την ιδιοτιμή $\lambda_1$.

Για να εφαρμόσουμε την επαγωγή όπως στο Θεώρημα, αρκεί να παρατηρήσουμε οτι $\chi_L(x) = -(x - \lambda_1)\chi_M(x)$, και συνεπώς $\chi_M$ επίσης αναλύεται σε παραγόντες πρώτου βαθμού.

□

**Θεώρημα 8.8 (Φασματικό Θεώρημα)** *Κάθε ερμιτιανός τελεστής σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο έχει μία βάση από ορθογώνια ιδιοδιανύσματα. Ο πίνακας του τελεστή ως προς αυτή τη βάση είναι διαγώνιος, με τις (πραγματικές) ιδιοτιμές στη διαγώνιο.*

**Απόδειξη.** Αφού ο τελεστής $L$ είναι ερμιτιανός, οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί, και συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι γινόμενο παραγόντων πρώτου βαθμού και στην περίπτωση που το σώμα είναι οι πραγματικοί αριθμοί.

Από το Λήμμα του Schur, υπάρχει ορθοκανονική βάση ως προς την οποία ο πίνακας $A$ του $L$ είναι άνω τριγωνικός. Τότε ο πίνακας $A^*$ είναι κάτω τριγωνικός. Αλλά αφού ο $L$ είναι ερμιτιανός, $A^* = A$, και συνεπώς ο πίνακας $A$ είναι διαγώνιος. Τότε τα διαγώνια στοιχεία είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή, ενώ η βάση αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του τελεστή.

□

**Πρόταση 8.9** *Για κάθε ερμιτιανό πίνακα $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας $U$ τέτοιος ώστε $\Lambda = U^{-1}AU$ είναι πραγματικός διαγώνιος πίνακας.*
*Για κάθε συμμετρικό πίνακα $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $Q$ τέτοιος ώστε $\Lambda = Q^{-1}AQ$ είναι πραγματικός διαγώνιος πίνακας.*

**Θεώρημα 8.10 (Θεώρημα Φασματικής Ανάλυσης.)** *Κάθε ερμιτιανός πίνακας $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ με $k$ διαφορετικές ιδιοτιμές εκφράζεται ως άθροισμα*

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k \,,$$

*όπου $\lambda_i$, για $i = 1, \ldots, k$, είναι οι ιδιοτιμές και $P_i$ είναι ο πίνακας ορθογώνιας προβολής στον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής $\lambda_i$.*

**Απόδειξη.** Υπενθυμίζουμε οτι ένας τρόπος να περιγράψουμε το γινόμενο δύο πινάκων, $AB$ είναι ως άθροισμα πινάκων που προκύπτουν από το γινόμενο της $i$-στήλης του $A$ με την $i$-γραμμή του $B$. Συγκεκριμένα,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nk} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{i1} & \ldots & b_{ik} \end{bmatrix} .$$

Αναλύουμε με αυτό τον τρόπο το γινόμενο $A = U(\Lambda U^*)$.

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \bar{u}_{11} & \ldots & \lambda_1 \bar{u}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n \bar{u}_{1n} & \ldots & \lambda_n \bar{u}_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{11} & \ldots & \bar{u}_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{bmatrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{1n} & \ldots & \bar{u}_{nn} \end{bmatrix} .$$

Παρατηρούμε οτι

$$\begin{bmatrix} u_{1i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{1i} & \ldots & \bar{u}_{ni} \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας ορθογώνιας προβολής στον υπόχωρο που παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $(u_{1i}, \ldots, u_{ni})$.

Εάν η ιδιοτιμή $\lambda_j$ έχει πολλαπλότητα $k$ και ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $w_1, \ldots, w_k$, τότε ο πίνακας ορθογώνιας προβολής στον ιδιόχωρο της $\lambda_j$ είναι το άθροισμα των ορθογωνίων προβολών σε κάθε ένα από τα $w_1, \ldots, w_k$,

$$P_j = w_1 w_1^* + \cdots + w_k w_k^* .$$

□

Οι ερμιτιανοί δεν είναι οι μόνοι διαγωνιοποιήσιμοι τελεστές. Για τελεστές σε μιγαδικούς διανυσματικούς χώρους, μπορούμε να διατυπώσουμε (αλλά δεν θα αποδείξουμε σε αυτό το μάθημα) ένα απλό κριτήριο που χαρακτηρίζει τους διαγωνιοποιήσιμους τελεστές.

**Θεώρημα 8.11** *Ένας τελεστής $L : V \to V$ σε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο πάνω από το $\mathbb{C}$ έχει μία βάση από ορθογώνια διανύσματα εάν και μόνον εάν*

$$L \circ L^* = L^* \circ L\,.$$

Τελεστές με την ιδιότητα $L \circ L^* = L^* \circ L$ ονομάζονται **κανονικοί** τελεστές.