

1. Δίνονται τέσσερα διαφορετικά διανύσματα x_1, x_2, x_3, x_4 του \mathbb{R}^3 . Από τις έξι διαφορετικές προτάσεις παρακάτω, μόνο μία είναι (πάντα) αληθής. Να δικαιολογήσετε γιατί οι υπόλοιπες δεν είναι πάντα αληθείς. Μετά να βρείτε ποιές από αυτές είναι (πάντα) ψευδείς.

- A. Το $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
- B. Το $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, αλλά ένα υποσύνολό του με τρία διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
- Γ. Το $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, αλλά ένα υποσύνολό του με δύο διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
- Δ. Το $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ παράγει τον \mathbb{R}^3 , αλλά κανένα υποσύνολό του με δύο διανύσματα δεν παράγει τον \mathbb{R}^3 .
- Ε. Το $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ δεν παράγει τον \mathbb{R}^3 , αλλά κάποιο υποσύνολό του με τρία διανύσματα παράγει τον \mathbb{R}^3 .
- Z. Το $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

2. Έστω V ο διανυσματικός χώρος όλων των τριωνύμων με πραγματικούς συντελεστές, και x, y διανύσματα του V . Από τις έξι διαφορετικές προτάσεις παρακάτω, μόνο μία είναι (πάντα) αληθής. Να δικαιολογήσετε γιατί οι υπόλοιπες δεν είναι πάντα αληθείς. Μετά να βρείτε ποιές από αυτές είναι (πάντα) ψευδείς.

- A. Το $\{x, y\}$ παράγει τον V .
- B. Το $\{x, y\}$ δεν παράγει τον V , αλλά για οποιοδήποτε τριώνυμο $z \in V$ το σύνολο $\{x, y, z\}$ παράγει τον V , αρκεί το z να είναι διάφορο των $x, y, 0$.
- Γ. Το $\{x, y\}$ δεν παράγει τον V , αλλά για οποιοδήποτε τριώνυμο $z, w \in V$ το σύνολο $\{x, y, z, w\}$ παράγει τον V , αρκεί τα z, w να είναι διάφορα μεταξύ τους και των $x, y, 0$.
- Δ. Το $\{x, y\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, αλλά για οποιοδήποτε τριώνυμο $z, w \in V$ το σύνολο $\{x, y, z, w\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.
- Ε. Το $\{x, y\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, αλλά για κάποιο $z \in V$ το σύνολο $\{x, y, z\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
- Z. Το $\{x, y\}$ δεν παράγει τον V .

Στις ασκήσεις 3–8, να βρείτε ένα σύνολο διανυσμάτων όπως ζητείται στην άσκηση, ή να εξηγήσετε γιατί ένα τέτοιο σύνολο δεν υπάρχει.

- 3. Ένα σύνολο τεσσάρων διανυσμάτων στον \mathbb{R}^3 που κάθε τρία από αυτά παράγουν τον \mathbb{R}^3 .
- 4. Ένα σύνολο δύο διανυσμάτων στον \mathbb{R}^3 που δεν παράγουν τον \mathbb{R}^3 αλλά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
- 5. Ένα σύνολο τριών διανυσμάτων στον \mathbb{R}^3 που δεν παράγουν τον \mathbb{R}^3 αλλά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
- 6. Ένα σύνολο τεσσάρων διανυσμάτων στον \mathbb{R}^3 που παράγουν τον \mathbb{R}^3 αλλά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
- 7. Ένα σύνολο τριών διανυσμάτων στον \mathbb{R}^3 που παράγουν τον \mathbb{R}^3 αλλά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
- 8. Ένα σύνολο τριών διανυσμάτων στον \mathbb{R}^3 που παράγουν τον \mathbb{R}^3 και δύο από αυτά παράγουν το επίπεδο κάθετο στο $(1, 1, 1)$.