Γραμμική Άλγεβρα Ι **Σύνολο Ασκήσεων 6**

---

1. Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε αν $L(x) = 0$ τότε $x_1 = x_2 = x_3$ και $x_4 = x_5$;

---

2. Έστω $V = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$. Υπάρχει επί γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^5 \to V$ τέτοια ώστε $L(1, 2, 3, 4, 5) = L(2, 3, 4, 5, 6) = 0$;

---

3. Δίνονται γραμμικές απεικονίσεις $L_1 : V_1 \to V_2$ και $L_2 : V_2 \to V_3$ τέτοιες ώστε $\operatorname{Im} L_1 = \ker L_2$. Αν η L_1 είναι ένα-προς-ένα και η L_2 είναι επί, να αποδείξετε ότι $\dim V_2 = \dim V_1 + \dim V_3$.

---

4. Δίνονται διανυσματικοί χώροι V και W. Να ελέγξετε ότι το $\mathcal{L}(V, W)$ είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό.

---

5. Δίνεται ένας διανυσματικός χώρος W και ένα διάνυσμα $x \in W$. Να ελέγξετε ότι η απεικόνιση $L_x : \mathbb{R} \to W$ με $L_x(\alpha) = \alpha x$ είναι γραμμική.

---

6. Δίνεται $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, W)$. Να γράψετε την L ως $L = L_x$ όπου η L_x είναι όπως στο πρόβλημα 5. (Με άλλα λόγια, να βρείτε $x \in W$ τέτοιο ώστε $L = L_x$.)