---

1. Να χρησιμοποιήσετε τις ασκήσεις 5 και 6 από το προηγούμενο σύνολο ασκήσεων για να αποδείξετε ότι $\mathcal{L}(\mathbb{R}, V) \cong V$.

Στις ασκήσεις 2–4, ο n είναι κάποιος θετικός ακέραιος, ο V είναι κάποιος διανυσματικός χώρος, και τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι διανύσματα του V.

---

2. Να ελέγξετε ότι η απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \to V$ με $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ είναι γραμμική.

---

3. Να ελέγξετε ότι η παραπάνω L είναι επί αν και μόνο αν το $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ παράγει τον V.

---

4. Να ελέγξετε ότι η παραπάνω L είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν το $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

---

5. Έστω V ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ που είναι κάθετα στο $(1, 1, 1)$. Έστω $x_1 = (-1, 1, 0)$ και $x_2 = (-1, 0, 1)$. Έχουμε δει ότι τα x_1, x_2 αποτελούν (διατεταγμένη) βάση του V.

Αν $x = (2, 3, -5)$, ανήκει το x στο V; Αν ναι, βρείτε το διάνυσμα συντεταγμένων του x ως προς την παραπάνω βάση.

---

6. Να επαναλάβετε την άσκηση 5 με $x = (4, 5, 6)$.

---

7. Να επαναλάβετε την άσκηση 5 με V τον χώρο των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του ένα, $x_1 = 2t + 1$, $x_2 = 3t - 4$, και $x = t$.

Στις ασκήσεις 8–10, $x_1 = (1, 2, 3, 4)$, $x_2 = (0, 2, 4, 7)$, $x_3 = (1, 1, 1, 1)$, και $V = < x_1, x_2, x_3 >$.

---

8. Να ελέγξετε ότι τα x_1, x_2, x_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

---

9. Να ελέγξετε ότι τα x_1, x_2, x_3 αποτελούν (διατεταγμένη) βάση του V.

---

10. Αν το διάνυσμα συντεταγμένων του x ως προς την παραπάνω βάση X είναι $x_X = (2, 3, -5)$, να βρείτε το x.