Γραμμική Άλγεβρα Ι **Σύνολο Ασκήσεων 8**

---

1. Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμου μικρότερου ή ίσου του 3 και έστω $L : V \to V$ η γραμμική απεικόνιση με $L(x) = x'$ όπου x' είναι η παράγωγος του x. Να βρείτε τον πίνακα της L ως προς την βάση X που αποτελείται από τα $x_1 = 1, x_2 = t, x_3 = t^2, x_4 = t^3$ (δηλαδή να βρείτε τον ${}_XL_X$).

Στις Ασκήσεις 2–5, $V = \mathbb{R}^2$, Y είναι η βάση του V με $y_1 = (1, 1)$ και $y_2 = (2, 1)$, και Z είναι η βάση του V με $z_1 = (1, -2)$ και $z_2 = (1, -3)$.

---

2. Έστω X η κανονική βάση του $V = \mathbb{R}^2$, δηλαδή $x_1 = (1, 0)$ και $x_2 = (0, 1)$. Να υπολογίσετε τους πίνακες ${}_XI_Y$ και ${}_XI_Z$.

---

3. Να υπολογίσετε τον πίνακα ${}_ZI_X$.

---

4. Να υπολογίσετε τον πίνακα ${}_ZI_Y$.

---

5. Έστω $x = 3y_1 + 5y_2$. Με A τον πίνακα της άσκησης 4, να επαληθεύσετε ότι πολλαπλασιασμός με A μας πάει από τις συντεταγμένες του x ως προς Y στις συντεταγμένες του x ως προς Z.

---

6. Δίνονται δύο βάσεις του $\mathbb{R}^3$, η $y_1 = (1, 0, 1), y_2 = (-1, 2, 0), y_3 = (1, 1, 1)$, και η $z_1 = (1, 0, 2), z_2 = (1, 1, 2), z_3 = (1, 0, 3)$. Να βρείτε τον πίνακα ${}_ZI_Y$. Μετά να εκφράσετε κάθε y_j ως γραμμικό συνδυασμό των z_j.

---

7. Έστω V ο διανυσματικός χώρος των τριωνύμων και $L : V \to V$ η γραμμική απεικόνιση με $L(t+1) = 2$, $L(t + 2) = t^2 + 1$, και $L(t^2 + t + 1) = t + 1$. Να υπολογίσετε τον πίνακα της L ως προς την βάση $x_1 = 1, x_2 = t, x_3 = t^2$, και μετα να υπολογίσετε το $L(t^2 + t)$.

Στις Ασκήσεις 8 και 9, V είναι ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού ≤ 1, X είναι η βάση του V με $x_1(t) = 2$ και $x_2(t) = 1 + t$, και Y είναι η βάση του V με $y_1(t) = 1$ και $y_2(t) = t$.

---

8. Υπολογίστε τον $A = {}_YI_X$.

---

9. Έστω $x(t) = 7 + 3t = 2 \cdot 2 + 3(1 + t)$. Με A όπως παραπάνω, να επαληθεύσετε το θεώρημα που λέει $\beta = A\alpha$, όπου $\alpha = x_X$ και $\beta = x_Y$.