
1. Δίνεται ότι $V = \mathbb{R}^3$ με το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο. Βρείτε τα ορθοκανονικά διανύσματα x_1, x_2, x_3 που προκύπτουν αν εφαρμόσουμε τον Αλγόριθμο Gram-Schmidt στα παρακάτω γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα:

$$y_1 = (1, 1, 1), \quad y_2 = (1, -1, 1), \quad y_3 = (1, 2, 4).$$

2. Επαναλάβετε την άσκηση 1, αλλάζοντας όμως το V να είναι το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων από το $[-1, 1]$ στο \mathbb{R} , αλλάζοντας το εσωτερικό γινόμενο να είναι το

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t)y(t) dt,$$

και αλλάζοντας τα y_1, y_2, y_3 ως εξής:

$$y_1(t) = 1, \quad y_2(t) = t, \quad y_3(t) = t^2.$$

Προαιρετικό σχόλιο: Τα x_1, x_2, x_3 που θα βρείτε είναι τα πρώτα τρία πολυώνυμα του Legendre. Για να βρείτε και το τέταρτο, πάρτε $y_4(t) = t^3$ (και ούτω καθεξής για το πέμπτο και τα υπόλοιπα).