Πανεπιστημιο Κρητης — Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Γραμμικη Αλγεβρα Ι — Εαρινο Εξαμηνο 2014–15

Μάνος Λυδάκης 19 Μαΐου 2015

Διάλεξη 1: Πότε ένα σύνολο V λέγεται διανυσματικός χώρος (πάνω από το $\mathbb{R}$), παραδείγματα, μοναδικότητα του μηδενικού διανύσματος, μοναδικότητα του προσθετικού αντιστρόφου, ο νόμος της διαγραφής.

Διάλεξη 2: Πολλαπλασιασμός με το βαθμωτό $\alpha = 0$, πολλαπλασιασμός με το μηδενικό διάνυσμα, πολλαπλασιασμός με το βαθμωτό $\alpha = -1$. Πότε ένα υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου V λέγεται κλειστό ως προς την πρόσθεση, κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό, και πότε υπόχωρος του V, παραδείγματα.

Διάλεξη 3: Πότε, για σταθερά $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$, ένα διάνυσμα λέγεται γραμμικός συνδυασμός των $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ιδιότητες του

$$W := \{\, x : \text{το } x \text{ είναι γραμμικός συνδυασμός των } x_1, x_2, \ldots, x_n \}$$

(αυτό το W συμβολίζεται με $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$ και λέγεται **ο χώρος που παράγουν τα** $x_1, x_2, \ldots, x_n$) ειδικότερα ότι αυτό το W είναι ο μικρότερος υπόχωρος του V που περιέχει τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Διάλεξη 4: Αν τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ παράγουν τον V τότε και τα $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_m$ παράγουν τον V. Πότε τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα και πότε γραμμικώς εξαρτημένα. Τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα ακριβώς όταν κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Διάλεξη 5: Τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ακριβώς όταν κάθε διάνυσμα γράφεται με το-πολύ-ένα τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Αν τα $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Βάση και διάσταση του V, γεωμετρική και διαισθητική σημασία για $V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}$.

Διάλεξη 6: Βάση και διάσταση, παραδείγματα (συνέχεια από την προηγούμενη διάλεξη): παραδείγματα με $V = \mathbb{R}^n$ και V να αποτελείται από συναρτήσεις. Σημαντικές ιδιότητες της διάστασης.

Διάλεξη 7: Το Θεώρημα Επέκτασης σε Βάση, το Θεώρημα Περιορισμού σε Βάση, χώροι πεπερασμένης διάστασης.

Διάλεξη 8: Οι συνεπαγωγές (για υπόχωρους W_1, W_2 ενός χώρου πεπερασμένης διάστασης V)

$$W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow \dim W_1 \leq \dim W_2 \quad \text{και} \quad W_1 \subset W_2 \Rightarrow \dim W_1 < \dim W_2.$$

Γραμμικές απεικονίσεις: ορισμός και παραδείγματα.

Διάλεξη 9: Γραμμικές απεικονίσεις: στοιχειώδεις ιδιότητες. Υπόχωροι και γραμμικές απεικονίσεις.

Διάλεξη 10: Πυρήνας και εικόνα μιας γραμμικής απεικόνισης, η σχέση με τον μηδενόχωρο και τον χώρο στηλών ενός πίνακα. Αν η L είναι γραμμική, τότε είναι ένα-προς-ένα ακριβώς όταν $\ker L = \{0\}$. Αν τα $x_1, \ldots, x_n$ παράγουν το πεδίο ορισμού της γραμμικής απεικόνισης L τότε τα $L(x_1), \ldots, L(x_n)$ παράγουν την εικόνα της L.

Διάλεξη 11: Η ανισότητα $\dim L(W) \leq \dim W$, που ισχύει για κάθε γραμμική απεικόνιση L και για κάθε W που είναι υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του πεδίου ορισμού της L. Το Θεώρημα Βαθμίδας και Μηδενικότητας.

Διάλεξη 12: Εφαρμογές του Θεωρήματος Βαθμίδας και Μηδενικότητας στην ύπαρξη ένα-προς-ένα και επί γραμμικών απεικονίσεων. Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(V, W)$.

Διάλεξη 13: Ισομορφισμοί, πότε λέμε ότι οι διανυσματικοί χώροι V_1 και V_2 είναι ισόμορφοι (με σύμβολα: $V_1 \cong V_2$). Δυο διανυσματικοί χώροι είναι ισόμορφοι αν και μόνο αν έχουν ίδια διάσταση. Το διάνυσμα συντεταγμένων x_X του διανύσματος x ως προς την (διατεταγμένη) βάση X.

Διάλεξη 14: Ο πίνακας ${}_Y L_X$ της γραμμικής απεικόνισης $L : V \to W$ από τη βάση X του V στη βάση Y του W. Η ισοδυναμία των $L(x) = y$ και $A \cdot \alpha = \beta$ (όπου $A = {}_Y L_X$, $\alpha = x_X$, και $\beta = y_Y$).

Διάλεξη 15: Οι ισότητες ${}_Z(L_2 \circ L_1)_X = {}_Z(L_2)_Y \cdot {}_Y(L_1)_X$ («ο πίνακας της σύνθεσης είναι το γινόμενο των πινάκων»), ${}_X(I_V)_X = I_n$ («ο πίνακας της ταυτοτικής είναι ο ταυτοτικός»), και ${}_X(L^{-1})_Y = ({}_Y L_X)^{-1}$ («ο πίνακας της αντίστροφης συνάρτησης είναι ο αντίστροφος του πίνακα της συνάρτησης»). Ο πίνακας μετάβασης από τη βάση X στη βάση Y, που είναι η ειδική περίπτωση του ${}_Y L_X$ με $L = I =$ ταυτοτική.

Διάλεξη 16: Οι ισότητες ${}_Z I_X = {}_Z I_Y \cdot {}_Y I_X$ και ${}_X I_Y = ({}_Y I_X)^{-1}$. Ο διανυσματικός χώρος $V = \mathbb{R}^{m\times n}$ που αποτελείται από όλους τους $m \times n$ πίνακες. Η ισότητα $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = mn$. Ο ισομορφισμός $f : \mathcal{L}(V, W) \to \mathbb{R}^{m\times n}$ που ορίζεται με $f(L) = {}_Y L_X$. Μια γραμμική απεικόνιση καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της σε μια βάση.

Διάλεξη 17: Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του $n \times n$ πίνακα A, παραδείγματα. Η χαρακτηριστική εξίσωση $\det(A - \lambda I) = 0$ του $n \times n$ πίνακα A, που είναι πολυωνυμική βαθμού n ως προς τον άγνωστο λ, και έχει λύσεις ακριβώς τις ιδιοτιμές του A.

Διάλεξη 18: Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα τελεστών, και η σχέση τους με ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων. Πότε οι $n \times n$ πίνακες A και $\widetilde{A}$ λέγονται όμοιοι, και γιατί αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν είναι πίνακες του ίδιου τελεστή $L : V \to V$, δηλαδή ακριβώς όταν ο A γράφεται ως $A = L_X := {}_X L_X$ και ο $\widetilde{A}$ ως $\widetilde{A} = L_Y$ (εννοείται X και Y είναι βάσεις του V). Τι σημαίνει η ειδική περίπτωση όπου $V = \mathbb{R}^n$ και X είναι η κανονική βάση, δηλαδή ότι, ταυτίζοντας τη βάση $Y = B$ που αποτελείται από τα $b_1, \ldots, b_n$ με τον $n \times n$ πίνακα B που έχει i-στήλη το b_i, τότε ο πίνακας της $L(u) = Au$ ως προς την B είναι ο $\widetilde{A}$ όπου $A = B\widetilde{A}B^{-1}$.

Διάλεξη 19: Δεδομένου ότι $A = B\widetilde{A}B^{-1}$ (ισοδύναμα, ότι $\widetilde{A} = B^{-1}AB$), είδαμε ότι η σχέση των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων των A και $\widetilde{A}$ είναι η παρακάτω: οι A και $\widetilde{A}$ έχουν ίδιες ιδιοτιμές, και κάθε ιδιοδιάνυσμα u του $\widetilde{A}$ δίνει ένα ιδιοδιάνυσμα $x = Bu$ του A (τα u και x αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή). Διαγώνιοι πίνακες, και γιατί αυτοί είναι ακριβώς οι $n \times n$ πίνακες που έχουν όλα τα $e_1, \ldots, e_n$ ως ιδιοδιανύσματα, και μάλιστα η ιδιοτιμή λ_i που αντιστοιχεί στο e_i είναι το i-οστό στοιχείο της διαγωνίου. Διαγωνιοποιήσιμοι πίνακες, και γιατί αυτοί είναι ακριβώς οι $n \times n$ πίνακες που έχουν όλα τα διανύσματα $b_1, \ldots, b_n$ μιας βάσης ως ιδιοδιανύσματα, και μάλιστα $A = B\widetilde{A}B^{-1}$ όπου $\widetilde{A}$ είναι ο $n \times n$ διαγώνιος πίνακας με i-οστό στοιχείο της διαγωνίου την ιδιοτιμή λ_i που αντιστοιχεί στο b_i και B είναι ο $n \times n$ πίνακας που έχει i-στήλη το b_i. Ένας $n \times n$ πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος ακριβώς όταν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή οι διαγωνιοποιήσιμοι πίνακες είναι ακριβώς αυτοί με πλήθος γραμμικώς ανεξαρτήτων ιδιοδιανυσμάτων που είναι όσο πιο μεγάλο γίνεται.

Διάλεξη 20: Αν ένας $n \times n$ πίνακας έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές τότε είναι διαγωνιοποιήσιμος. Για δεδομένο πολυώνυμο, τι είναι η πολλαπλότητα που έχει κάθε ρίζα του. Για δεδομένο πίνακα A, τι είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα α_j που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_j του A. Η ισότητα $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$ που ισχύει για κάθε διαγωνιοποιήσιμο $n \times n$ πίνακα που έχει ακριβώς k διαφορετικές ιδιοτιμές, και η ερμηνεία του α_j ως το «πόσες φορές βλέπουμε το λ_j» στον αντίστοιχο διαγώνιο πίνακα.

Διάλεξη 21: Τι είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα γ_j που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_j του A. Οι ανισότητες $\alpha_1 \leq \gamma_1, \ldots, \alpha_k \leq \gamma_k$ που ισχύουν για κάθε $n \times n$ πίνακα που έχει ακριβώς k διαφορετικές ιδιοτιμές, μάλιστα αυτές οι ανισότητες είναι **όλες** ισότητες ακριβώς όταν ο αντίστοιχος πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος. Ίχνος, ορίζουσα, και ιδιοτιμές. Τριγωνικοί πίνακες και ιδιοτιμές, το Θεώρημα Cayley-Hamilton.

Διάλεξη 22: Νόρμες και εσωτερικά γινόμενα σε αφηρημένους διανυσματικούς χώρους: Παραδείγματα και στοιχειώδεις ιδιότητες.

Διάλεξη 23: Η νόρμα που καθορίζεται από ένα δεδομένο εσωτερικό γινόμενο. Η Ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz. Ο νόμος του παραλληλογράμμου.

Διάλεξη 24: Ορθοκανονικά διανύσματα και η σχέση τους με γραμμικούς συνδυασμούς και γραμμική ανεξαρτησία. Το «Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα» (ή: Ταυτότητα του Parseval), ότι δηλαδή το $||x||^2$ ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των συντεταγμένων του x.