Μάνος Λυδάκης 16 Δεκεμβρίου 2014

Διάλεξη 1: Διαισθητική εισαγωγή στις εξής έννοιες, για υποσύνολα του επιπέδου: Σύνορο, ανοιχτά και κλειστά σύνολα, κοντινά και εσωτερικά σημεία. Τοπολογικοί χώροι: προς το παρόν, μόνο ο ορισμός, και λίγα σχόλια. Βασικά ανοιχτά.

Διάλεξη 2: Οι ανοιχτοί δίσκοι στον $\mathbb{R}^n$ έχουν τις ιδιότητες των βασικών ανοιχτών. Τα ανοιχτά που προκύπτουν από δεδομένα βασικά ανοιχτά.

Διάλεξη 3: Τα ανοιχτά που προκύπτουν από δεδομένα βασικά ανοιχτά. Το λεγόμενο εσωτερικό του A, που είναι το σύνολο A^o των εσωτερικών σημείων του A. Το A είναι ανοιχτό $\Leftrightarrow A^o = A$. Η γεωμετρική σημασία της απόδειξης είναι ενδιαφέρουσα, ακόμη και στο επίπεδο, αφού δείχνει ότι «πάρα πολλα σχήματα στο επίπεδο» (όλα τα ανοιχτά υποσύνολα) μπορούν να φτιαχτούν «κολλώντας» (παίρνοντας μια ένωση από) ανοιχτούς δίσκους, κάτι που δείχνει την τεράστια διαφορά μεταξύ πεπερασμένων και άπειρων ενώσεων. Το A^o είναι ανοιχτό. Το A^o είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό υποσύνολο του A. Το εσωτερικό του $A \cap B$ και του $A \cup B$.

Διάλεξη 4: Άπειρες ενώσεις και άπειρες τομές. Επανάληψη του πως «παίρνοντας συμπληρωματικό σύνολο» επιρεάζει ενώσεις, τομές, το κενό σύνολο, όλο το χώρο, και τις ανισώσεις συνόλων, καθώς και επανάληψη της ισοδυναμίας B$\subseteq A \Leftrightarrow B \cap A^c = \varnothing$. Κοντινά σημεία, διαισθητική σημασία, παραδείγματα.

Διάλεξη 5: Το σύνολο $\overline{F}$ των κοντινών σημείων του F (λέγεται «κλειστότητα» ή «κλειστή θήκη» του F). Η σχέση μεταξύ κοντινού σημείου ενός συνόλου και εσωτερικού σημείου του συμπληρωματικού («είσαι το ένα $\Leftrightarrow$ δεν είσαι το άλλο»). Τα κλειστά (υπο)σύνολα F (του τ.χ. X), που είναι αυτά με $F = \overline{F}$, ισοδύναμα, τα συμπληρωματικά των ανοιχτών. Το σύνορο του F. Μετρικές, νόρμες, μετρικοί χώροι (μ.χ.), ισομετρίες, οι ℓ_p-νόρμες στον $\mathbb{R}^n$.

Διάλεξη 6: Η διακριτή μετρική στο X και πως την βλέπουμε «γεωμετρικά» αν το X έχει «λίγα» σημεία. Η φραγμένη μετρική. Τα ανοιχτά που καθορίζονται από μια δεδομένη μετρική. Μετρικοποιήσιμοι χώροι, και πως δυο διαφορετικοί μ.χ. μπορεί να καθορίζουν τον ίδιο (μετρικοποιήσιμο) τ.χ. Διακριτοί χώροι και γιατί είναι μετρικοποιήσιμοι.

Διάλεξη 7: Το πιο απλό παράδειγμα χώρου που δεν είναι μετρικοποιήσιμος: ο τετριμμένος χώρος που καθορίζεται από ένα δεδομένο σύνολο X. Τοπολογίες, τοπολογίες σε ένα σύνολο με n σημεία για $n = 0, 1, 2, 3$. Επανάληψη της εικόνας $f(V) =: fV$ και της αντίστροφης εικόνας $f^{-1}(W) =: f^{-1}W$, δεδομένης συνάρτησης $f : X \to Y$, δεδομένου υποσυνόλου V του X, και δεδομένου υποσυνόλου W του Y. Συνέχεια στο σημείο a του X μιας συνάρτησης $f : X \to Y$, αν X και Y είναι μ.χ: απόδειξη ότι «ο τοπολογικός ορισμός συνεπάγεται τον ε-δ-ορισμό».

Διάλεξη 8: Συνέχεια στο σημείο a του X μιας συνάρτησης $f : X \to Y$, αν X και Y είναι μ.χ: απόδειξη ότι ο «ε-δ-ορισμός» συνεπάγεται τον «τοπολογικό ορισμό». Δόσαμε το ορισμό του τι σημαίνει «συνέχεια στο σημείο a του X μιας συνάρτησης $f : X \to Y$», αν X και Y είναι (όχι απλώς μ.χ. αλλά) τ.χ. (Αυτό τον ορισμό ήταν εύκολο να τον μαντέψουμε, ήταν απλώς ο «τοπολογικός ορισμός».) Δόσαμε το ορισμό του τι σημαίνει «συνέχεια» μιας συνάρτησης μεταξύ τ.χ. (Και αυτό τον ορισμό ήταν εύκολο να τον μαντέψουμε, «συνεχής» απλώς σημαίνει «συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού».) Αποδείξαμε: ότι «συνεχής» $\Leftrightarrow$ «η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοιχτού είναι ανοιχτή» $\Leftrightarrow$ «η αντίστροφη εικόνα κάθε κλειστού είναι κλειστή» — ότι «με διακριτό πεδίο ορισμού, όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς» — ότι «με τετριμμένο πεδίο τιμών, όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς» — και, τέλος, ότι όλες οι ταυτοτικές συναρτήσεις και όλες οι σταθερές συναρτήσεις είναι συνεχείς. Αποδείξαμε ότι η σύνθεση συνεχών είναι συνεχής. Αποδείξαμε ότι «συνεχής» $\Leftrightarrow$ «κοντινά σημεία πάνε σε κοντινά σημεία». Τέλος, είδαμε ένα παράδειγμα των ℓ_p-μετρικών σε άπειρες διαστάσεις, ειδικότερα ότι αυτές οι μετρικές δεν καθορίζουν πια τον ίδιο τ.χ.

Διάλεξη 9: (Τοπολογικοί) υπόχωροι, η ένθεση i, συνέχεια της $f \circ i$ και της $i \circ f$ αν i είναι η ένθεση ενός υποχώρου σε ένα δεδομένο χώρο, λήμμα της επικόλλησης, μετρικοί υπόχωροι και η «συμβατότητά τους» με τους τοπολογικούς.

Διάλεξη 10: Βάση τοπολογίας, πως ορίζονται βάσεις για τον χώρο-γινόμενο.

Διάλεξη 11: Ο χώρος-γινόμενο $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ταυτίζεται με τον (συνήθη χώρο) $\mathbb{R}^{m+n}$, συντεταγμένες συναρτήσεις, η Θεμελιώδης Ιδιότητα του Χώρου-Γινόμενο, ο χώρος γινόμενο δεν εξαρτάται από τις βάσεις των παραγόντων (εξαρτάται μόνο από την τοπολογία τους), γινόμενα με περισσότερους από δύο παράγοντες.

Διάλεξη 12: Γινόμενα με άπειρους παράγοντες, πως «βλέπουμε» γεωμετρικά τον χώρο γινόμενο. Η ιδιότητα Hausdorff και η σχέση της με μετρικοποιησιμότητα, τετριμμένη τοπολογία, υποχώρους, και γινόμενα.

Διάλεξη 13: Η συμπεπερασμένη τοπολογία και η σχέση της με την ιδιότητα Hausdorff για πεπερασμένα και άπειρα σύνολα, ειδικότερα ότι για πεπερασμένα σύνολα όλες οι παρακάτω τοπολογίες ταυτίζονται: οι μετρικοποιήσιμες, οι Hausdorff, η διακριτή, και η συμπεπερασμένη. Σύγκλιση ακολουθιών σε τοπολογικούς χώρους, αν η $a_n \in A$ συγκλίνει στο ℓ τότε $\ell \in \overline{A}$, αν η a_n συγκλίνει στο ℓ τότε (για συνεχή f) η $f(a_n)$ συγκλίνει στο $f(\ell)$.

Διάλεξη 14: Ακολουθίες στο χώρο-γινόμενο, ακολουθίες σε χώρους Hausdorff, βάση περιοχών, πρώτοι αριθμήσιμοι και δεύτεροι αριθμήσιμοι χώροι, δεύτερος αριθμήσιμος $\Rightarrow$ πρώτος αριθμήσιμος, μετρικοποιήσιμος $\Rightarrow$ πρώτος αριθμήσιμος, ο $\mathbb{R}$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος, πυκνά υποσύνολα.

Διάλεξη 15: Διαχωρίσιμοι Χώροι, δεύτερος-αριθμήσιμος $\Rightarrow$ διαχωρίσιμος, και το αντίστροφο για μετρικοποιήσιμους χώρους. Ακολουθίες και κοντινά σημεία σε πρώτους-αριθμήσιμους χώρους, ακολουθίες και συνεχείς συναρτήσεις σε πρώτους-αριθμήσιμους χώρους.

Διάλεξη 16: Πότε τα W_i καλύπτουν το V, πότε το V είναι συμπαγές, πεπερασμένο $\Rightarrow$ συμπαγές και το αντίστροφο για διακριτούς χώρους, το $f(V)$ είναι συμπαγές για V συμπαγές και f συνεχή, το V ειναι συμπαγές (ως υποσύνολο του X) $\Leftrightarrow$ ο χώρος V ειναι συμπαγής (ως υπόχωρος του X), κλειστό $\Rightarrow$ συμπαγές σε συμπαγείς χώρους, συμπαγές $\Rightarrow$ κλειστό σε χώρους Hausdorff. Πότε ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι φραγμένο, συμπαγές $\Rightarrow$ φραγμένο σε μετρικούς χώρους.

Διάλεξη 17: Το Θεώρημα του Tychonoff (χωρίς απόδειξη), το Θεώρημα των Heine και Borel. Επανάληψη των max και sup για υποσύνολα του $\mathbb{R}$, το Θεώρημα της Μέγιστης Τιμής. Σύντομη περιγραφή (για μετρικούς χώρους) της ακολουθιακής συμπάγειας, του Αριθμού του Lebesgue, και της ομοιόμορφης συνέχειας.

Διάλεξη 18: Ανοιχτές και κλειστές συναρτήσεις, ομοιομορφισμοί, παραδείγματα.

Διάλεξη 19: Πως χρησιμοποιούμε τις λεγόμενες Τοπολογικές Ιδιότητες για να απαντήσουμε ερωτήσεις της μορφής «ισχύει ότι $X \cong Y$;». Πότε λέμε ότι τα σημεία a και a' του X είναι διαχωρισμένα στον X. Πότε λέμε ότι τα ανοιχτά υποσύνολα A και A' του X είναι διαχώριση του X. Συμφωνήσαμε να λέμε «το A είναι clopen» και να εννοούμε «το A είναι και κλειστό (closed) και ανοιχτό (open). Ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί της διαχώρισης.

Διάλεξη 20: Ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί των συνεκτικών χώρων. Διαχωρισμένα στο πεδίο τιμών προέρχονται από διαχωρισμένα στο πεδίο ορισμού, συνεχής εικόνα συνεκτικού είναι συνεκτικό, διαχωρισμένα στο χώρο είναι διαχωρισμένα σε οποιοδήποτε υπόχωρο. Κυρτά υποσύνολα ενός διανυσματικού χώρου, χαρακτηρισμός των συνεκτικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ως εξής: ταυτίζονται με τα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, δηλαδή τα (πιθανώς άπειρα ή «ημι-άπειρα») διαστήματα. Το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής.

Διάλεξη 21: Αν οι X_1 και X_2 είναι συνεκτικοί τότε το ίδιο ισχύει για τον $X_1 \cup X_2$, αρκεί $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$. Αν οι X_1 και X_2 είναι συνεκτικοί τότε το ίδιο ισχύει για τον $X_1 \times X_2$, και αντιστρόφως, αρκεί $X_1 \neq \varnothing$ και $X_2 \neq \varnothing$. Αν $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \overline{X_1}$ και ο X_1 είναι συνεκτικός τότε το ίδιο ισχύει για τον X_2. Τι είναι δρόμος στον X από το a στο b, τι είναι Κατά-Δρόμους-Συνεκτικός (ΚΔΣ) χώρος, η σχέση «συνδέονται με δρόμο» είναι σχέση ισοδυναμίας, ο $\mathbb{R}^n$ είναι ΚΔΣ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, ο $\mathbb{R}^n - 0$ είναι ΚΔΣ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$, ΚΔΣ $\Rightarrow$ συνεκτικός.

Διάλεξη 22: Σύντομα σχόλια στο Θεώρημα «Τοπολογικό Αναλλοίωτο της Διάστασης», δηλαδή ότι $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \Rightarrow n = m$, και απόδειξη για $n = 1$. Το αντίστροφο του «X ΚΔΣ $\Rightarrow$ X συνεκτικός» για X ανοιχτό σε Ευκλείδειο Χώρο, και, γενικότερα, για X Τοπικά ΚΔΣ. Διαισθητική εισαγωγή στους χώρους-πηλίκο.

Διάλεξη 23: Απεικονίσεις-πηλίκο, γιατί αυτές περιλαμβάνουν τις ανοιχτές και κλειστές απεικονίσεις, η Θεμελιώδης Ιδιότητα του Χώρου-Πηλίκο, σύνολο-πηλίκο, ο χώρος-πηλίκο που καθορίζεται από μία σχέση ισοδυναμίας, παραδείγματα.