Μάνος Λυδάκης Χειμερινό Εξάμηνο 2014–15

Άσκ. 4: Σας θυμίζω παρακάτω τις ιδιότητες ② και ③ του ορισμού του τοπολογικού χώρου (τ.χ.), που θα τις λέω και «οι ιδιότητες ② και ③ των ανοιχτών συνόλων».

②: αυθαίρετες (δηλαδή: ακόμη και άπειρες) ενώσεις διατηρούν τα ανοιχτά

③: πεπερασμένες τομές διατηρούν τα ανοιχτά

ΝΔΟ δεν ισχύει (εννοείται: δεν ισχύει πάντα) ότι οι άπειρες τομές διατηρούν τα ανοιχτά.

Λύση: Θεωρώ τον τ.χ. $\mathbb{R}^n$ (αυτός προκύπτει από τα Θ1 και Θ2). Θεωρώ την ειδική περίπτωση $n = 1$.

Για $i = 1, 2, 3, \dots$ θέτω $A_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$.

Κάθε A_i είναι ανοιχτό διάστημα, δηλ. ανοιχτός δίσκος στον $X = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ δηλ. βασικό ανοιχτό (β.α) στον X, ειδικότερα ανοιχτό στον X.

Έστω $A = \{0\}$.

Ισχ. 1: Το A δεν είναι ανοιχτό στον X.

Απ. Ισχ. 1: Με άτοπο, έστω λοιπόν ότι το A είναι ανοιχτό στον X. Από τον ορισμό του πως τα β.α. καθορίζουν τα ανοιχτά, αυτό σημαίνει ότι $\exists$ β.α. B που «παρεμβάλλεται στην ανισότητα $0 \in A$». Ειδικότερα $B \subseteq A$.

Μα το B είναι β.α. στον $X = \mathbb{R}$, δηλ. ανοιχτό διάστημα, ειδικότερα έχει άπειρα σημεία ($*$) ενώ $A = \{0\}$, άτοπο.

(Σπίτι: Καταλήξτε σε άτοπο με πιο στοιχειώδη τρόπο από ότι στο ($*$).) ■(Ισχ. 1)

Ισχ. 2: $\bigcap A_i = A$

[Παρενθετικό Σχόλιο: Συνηθισμένο «λάθος του αρχαρίου»: Αν του ζητήσουν να αποδείξει τον Ισχ. 2 θα πει κάτι σαν αυτό:

«$\bigcap A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}) = [\lim_{i\to\infty} -\frac{1}{i}, \quad \lim_{i\to\infty} \frac{1}{i}] = [0, 0] = \{0\}$»

Αυτό είναι τεράστιο λάθος και τέτοια λάθη σε ένα πρόβλημα στο διαγώνισμα πρακτικά μηδενίζουν αυτό το πρόβλημα.

Τα σύνολα είναι πολύ διαφορετικά από τους αριθμούς και ουσιαστικό μέρος του μαθήματος είναι να μάθετε να τα χειρίζεστε. Μια μεγάλη διαφορά είναι:

αν
$a_1, a_2, \dots$ είναι ακολουθία αριθμών
$A_1, A_2, \dots$ είναι ακολουθία συνόλων

τότε:
το $\lim a_i$ δεν υπάρχει πάντα
τα $\bigcup A_i$, $\bigcap A_i$ πάντα υπάρχουν.

Τέλος, προτείνω στο σπίτι να υπολογίσετε το $\bigcap B_i$, αν $B_i = (\frac{1}{i}, \infty)$ και $i = 1, 2, \dots$

με δύο τρόπους:
① με τον σωστό τρόπο

② με τον «λάθος τρόπο του αρχαρίου» ■(Παρενθ. Σχόλιο)]

Απ. Ισχ. 2: Ζητείται η ισότητα συνόλων $A \overset{?}{=} \bigcap A_i$.
Κατά κανόνα μια ισότητα συνόλων αποδεικνύεται με δυο ανισότητες:

$\boxed{\subseteq}$ Κατά κανόνα, ο τρόπος απόδειξης του '$B \subseteq C$' είναι:

Δεδ: $a \overset{\checkmark}{\in} B$ Ζητώ: $a \overset{?}{\in} C$

Εδώ:
Δεδ: $\boxed{a \in A \quad (*)}$ Ζητώ: $\boxed{a \in \bigcap A_i \quad (?)}$

Το (*) σημαίνει: $a \in \{0\}$, δηλ. $a = 0$
προφανώς $0 \in (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$ $(\forall i = 1, 2, \ldots)$
δηλ. το a ζει σε όλα τα A_i
δηλ. $a \in \bigcap A_i$ ■($\subseteq$)

$\boxed{\supseteq}$ (Αυτό είναι πιο δύσκολο—θα επισημάνω το «δύσκολο» βήμα)

Δεδ: $\boxed{a \in \bigcap A_i \quad (\mathrm{I})}$
Ζητώ: $a \in A$ δηλ. $a \in \{0\}$ δηλ. $\boxed{a = 0 \quad (?)}$

Το (I) σημαίνει: $a \in A_i$ $(\forall i)$
δηλ. $a \in (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$
δηλ. $-\frac{1}{i} < a < \frac{1}{i}$

Ιδού το «δύσκολο» μέρος. Μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Επιλέγω τον «τρόπο του λυκείου». (Όπως μαθαίνω από τον γιο μου, το «κριτήριο της παρεμβολής» είναι πολύ δημοφιλές στην τρίτη λυκείου. Ένας άλλος τρόπος είναι χρησιμοποιώντας την αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{R}$.) Έχω τις ακολουθίες $b_i = -\frac{1}{i}$, $c_i = a$ (σταθερή), και $d_i = \frac{1}{i}$, για τις οποίες ισχύει $b_i < c_i < d_i$. Το «κριτήριο της παρεμβολής» δίνει $\lim c_i = 0$, αλλά προφανώς $\lim c_i = a$, άρα $a = 0$. ■(Ισχ. 2)

<u>Θ49</u>
Το αντίστροφο του Θ48 ισχύει, <u>αν</u> ο X είναι μετρικοποιήσιμος.

<u>Απ</u>
Δεδ: $D = \{a_1, a_2, \ldots\}$ πυκνό.
Ζητ: να βρω αριθμήσιμη βάση του X. (?)

Όπως στο Θ46 θέτω $\mathcal{S} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$
όπου το $\mathcal{S}_n$ είναι η αριθμήσιμη βάση περιοχών του a_n που δίνεται με
$\mathcal{S}_n = \{B_{n1}, B_{n2}, \ldots\}$, όπου B_{nm} είναι το $B(a_n, \frac{1}{m})$, δηλ. η μπάλλα κέντρου a_n ακτίνας $\frac{1}{m}$.
Ζητ: το $\mathcal{S}$ είναι βάση του X. (?)

Δεδ: $A \overset{o}{\subseteq} X$ και $a \in A$.
Ζητ: να βρώ $B \in \mathcal{S}$ ανάμεσα a και A. (?)

Βρίσκω m τ.ω. $B(a, \frac{1}{m}) \subseteq A$.
Βρίσκω a_n τ.ω. $a_n \in B(a, \frac{1}{2m})$.
Ελέγχω ότι το $B := B(a_n, \frac{1}{2m})$ «δουλεύει». ■