Μάνος Λυδάκης Φυλλάδιο Ασκήσεων 1, Προθεσμία 8.10

---

1. Δίνονται συνεχείς $g, h : X \to Y$ και $g', h' : Y \to Z$. Να αποδείξετε:

Α. Αν οι g, h είναι ομοτοπικές τότε και οι $g' \circ g, g' \circ h$ είναι ομοτοπικές.

Β. Αν οι g', h' είναι ομοτοπικές τότε και οι $g' \circ g, h' \circ g$ είναι ομοτοπικές.

Γ. Αν οι g, h είναι ομοτοπικές και αν οι g', h' είναι επίσης ομοτοπικές τότε και οι $g' \circ g, h' \circ h$ είναι ομοτοπικές.

Υπόδειξη: Είτε δείτε τα **Α** και **Β** ως ειδική περίπτωση του **Γ**, είτε, ακόμη πιο «κομψά», δείτε το **Γ** ως εύκολη συνέπεια των ειδικών περιπτώσεων.

---

2. Μια συνεχής $f : X \to Y$ λέγεται **μηδενοομοτοπική** (nullhomotopic) αν είναι ομοτοπική με μια σταθερή συνάρτηση. Ένας χώρος $X \neq \varnothing$ λέγεται **συσταλτός** (contractible) αν η ταυτοτική συνάρτηση του X είναι μηδενοομοτοπική.

Δίνεται ένας συσταλτός χώρος X. Να αποδείξετε:

Α. Ο X είναι κατά δρόμους συνεκτικός.

Β. Για κάθε χώρο Y, κάθε συνεχείς $g, h : Y \to X$ είναι ομοτοπικές.

Γ. Για κάθε κατά δρόμους συνεκτικό χώρο Y, κάθε συνεχείς $g, h : X \to Y$ είναι ομοτοπικές.

Υποδείξεις: Για τα **Β** και **Γ** δείτε την άσκηση 1. Για το **Γ**, δείξτε πρώτα ότι κάθε συνεχής $\phi : X \to Y$ είναι ομοτοπική με κάποια σταθερή $\hat{\phi}$. Τι σημαίνει «οι σταθερές $\hat{g}, \hat{h}$ είναι ομοτοπικές»;

---

3. Μια συνεχής $f : S^{n-1} \to X$ λέγεται **επουσιώδης** (inessential) αν υπαρχει συνεχής $g : D^n \to X$ τέτοια ώστε ο περιορισμός της g στην S^{n-1} να ισούται με την f.

Να αποδείξετε ότι, για τις συνεχείς συναρτήσεις της μορφής $f : S^{n-1} \to X$, οι έννοιες «επουσιώδης» και «μηδενοομοτοπική» ταυτίζονται.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την $q : S^{n-1} \times I \to D^n$ με τύπο $q(x, t) = tx$. Θεωρήστε γνωστό από τη γενική τοπολογία ότι αυτή είναι απεικόνιση πηλίκου (δηλαδή τυχαία $\phi : D^n \to X$ είναι συνεχής ανν η $\phi \circ q$ είναι συνεχής).

---

4. Μια συνεχής $f : S^{n-1} \to X$ λέγεται **ουσιώδης** (essential) αν δεν είναι επουσιώδης. Μπορεί να δειχθεί ότι αυτό ισχύει για την f με $f(x) = x$ και $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Α. Ποιό θεώρημα είναι αυτό αν $n = 1$;

Β. Τι συμπεραίνετε για μια συνεχή $g : D^n \to \mathbb{R}^n$ που έχει τη «συνοριακή τιμή» $g(x) = x$ σε κάθε x που ανήκει στο σύνορο του D^n;

Γ. Είναι ο $\mathbb{R}^n - \{0\}$ συσταλτός;