Μάνος Λυδάκης

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2, Προθεσμία 15.10

---

**1. Α.** «Μαντέψτε» τον ορισμό του ισομορφισμού ΧΣΒ.

**Β.** Να δείξετε ότι, αν $X$ και $Y$ είναι ΧΣΒ και $f : X \to Y$ είναι ισομορφισμός ΧΣΒ, τότε η $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ είναι ισομορφισμός ομάδων.

**Γ.** Να αποδείξετε την εξής ειδική περίπτωση του «Τοπολογικού Αναλλοίωτου της Διάστασης»:

Αν $n > 2$ τότε οι $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^2$ δεν είναι ομοιομορφικοί («ομοιομορφικοί» σημαίνει «ισόμορφοι ως χώροι»).

Θεωρήστε γνωστό ότι, αν $n > 2$ και $x \in \mathbb{R}^n - 0$, τότε $\pi_1(\mathbb{R}^n - 0, x) = 0$, και ότι αν $y \in \mathbb{R}^2 - 0$ τότε $\pi_1(\mathbb{R}^2 - 0, y) \cong \mathbb{Z}$.

---

**2.** Σε αυτή την άσκηση να θεωρήσετε γνωστό το παρακάτω εύκολο θεώρημα, που θα αποδείξουμε αργότερα: Αν $X$ και $Y$ είναι χώροι, $x_0 \in X$, και αν $f_0, f_1 : X \to Y$ είναι ομοτοπικές, τότε: Θέτοντας, για $j = 0, 1$, $y_j = f_j(x_0)$ και $\phi_j = (f_j)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_j)$, ισχύει ότι ο $\phi_0$ είναι ισομορφισμός ανν ο $\phi_1$ είναι ισομορφισμός.

Έστω $M$ η ταινία του Möbius και $M_0$ το σύνορό της. Θεωρούμε τους $M$ και $M_0$ σαν ΧΣΒ επιλέγοντας ένα σημείο βάσης στο $M_0$ και για τους δυο. Έτσι η ένθεση $i : M_0 \hookrightarrow M$ γίνεται απεικόνιση ΧΣΒ.

**Α.** Να δείξετε ότι $\pi_1(M_0) \cong \pi_1(M)$, όμως ο $i_*$ δεν είναι ισομορφισμός.

**Β.** Να δείξετε ότι το $M_0$ δεν είναι retract του $M$.

**Υπόδειξη:** Μπορείτε να θεωρήσετε το $M$ ως χώρο πηλίκου του $X = D^1 \times D^1$, δηλαδή να πάρετε $M = X/\sim$, όπου $(s,t) \sim (s',t') \Leftrightarrow [(s,t) = (s',t')$ ή $s = -1, s' = 1, t' = -t]$. Τότε $M_0 = q(Y)$, όπου $q : X \to M$ είναι η απεικόνιση πηλίκου και $Y$ είναι ο υπόχωρος του $X$ με $Y = D^1 \times S^0$. Ένας άλλος χρήσιμος χώρος είναι ο $q(D^1 \times 0)$.

---