Μάνος Λυδάκης Φυλλάδιο Ασκήσεων 4, Προθεσμία 29.10

---

1. Χρειάζομαι πρώτα ένα ορισμό: Υποθέστε δεδομένο ένα σύνολο S και δυο πράξεις στο S, που τις συμβολίζω, αντίστοιχα, με $*$ και $\odot$. Υποθέστε επίσης ότι η $*$ έχει ουδέτερο στοιχείο το $\varepsilon \in S$ και ότι η $\odot$ έχει ουδέτερο στοιχείο το $\varepsilon' \in S$. (Επιτρέπονται και πράξεις που δεν είναι προσεταιριστικές ή/και αντιμεταθετικές.)

Τότε το ζεύγος $(*, \odot)$ θα το λέω *συμβατό*, ανν

$$(a * b) \odot (a' * b') = (a \odot a') * (b \odot b')$$

για κάθε $a, a', b, b' \in S$. (Αυτός ήταν ο ορισμός.)

A. Να δείξετε ότι, δεδομένης αντιμεταθετικής και προσεταιριστικής πράξης $\cdot$ στο S, που έχει ουδέτερο στοιχείο, θέτοντας $* = \cdot$ και $\odot = \cdot$ παίρνω συμβατό ζεύγος.

B. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν άλλα συμβατά ζεύγη, εκτός από αυτά του μέρους A. (Άρα μια πράξη $*$ που είναι μέρος κάποιου συμβατού ζεύγους είναι απαραίτητα προσεταιριστική και αντιμεταθετική.)

---

2. Να δείξετε ότι κάθε τοπολογική ομάδα έχει αβελιανή θεμελιώδη ομάδα $\pi_1(G, e)$, όπου e είναι το ουδέτερο στοιχείο της G.

Εξηγώ: Τοπολογική ομάδα είναι μια ομάδα G, που είναι συγχρόνως και τοπολογικός χώρος, και αυτές οι δυο δομές σχετίζονται ως εξής: Η «συνάρτηση αντίστροφο» $\phi : G \to G$ (εννοώ ότι η ϕ είναι η συνάρτηση $\phi(g) = g^{-1}$) και η «συνάρτηση πράξη» $\psi : G \times G \to G$ (εννοώ ότι η ψ είναι η συνάρτηση $\psi(g, h) = gh$) είναι συνεχείς. Ενδιαφέροντα παραδείγματα είναι οι διάφορες πολλαπλασιαστικές ομάδες πινάκων πάνω από τα $F = \mathbb{R}$ ή $F = \mathbb{C}$ που, για να ορίσουμε την τοπολογία τους, τις βλέπουμε ως υποχώρους όλων των $n \times n$ πινάκων πάνω από το F, δηλαδή του Ευκλείδειου χώρου F^m με $m = n^2$ (όπου ταυτίσαμε όλους τους $n \times n$ πίνακες πάνω από το F με αυτό τον Ευκλείδειο χώρο). Άλλο ενδιαφέρον παράδειγμα είναι $G = S^1$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{C}$. Λιγότερο ενδιαφέροντα παραδείγματα για τη θεωρία ομοτοπίας είναι $G = \mathbb{R}^n$ ή G διακριτή, όπου η θεμελιώδης ομάδα είναι τετριμμένη.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την άσκηση 1 με $S = \pi(G, e, e)$. Θα χρειαστεί να ορίσετε μια «προφανή» πράξη στο S.
