Μάνος Λυδάκης Φυλλάδιο Ασκήσεων 5, Προθεσμία 5.11

---

1. Αποδείξτε προσεκτικά ότι η $A = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ είναι το «άθροισμα των αβελιανών ομάδων» $A_1 = \mathbb{Z}$ και $A_2 = \mathbb{Z}$. Αποδείξτε δηλαδή την «ανάλογη Θεμελιώδη Ιδιότητα» αυτής που αποδείξαμε για το $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ και απεικονίσεις ομάδων, αλλά για το $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ και απεικονίσεις αβελιανών ομάδων.

(Σχόλιο: Με «θεμελιώδη ιδιότητα» μεταφράζω πρόχειρα τον όρο universal mapping property.)

---

2. Έστω G η ελεύθερη ομάδα στους γεννήτορες a και b.

Α. Δείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός $\phi : G \to G$ με $\phi(a) = b$ και $\phi(b) = ab$.

Β. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ισομορφισμός $\psi : G \to G$ με $\psi(a) = bab^{-1}$ και $\psi(b) = ab$.

Γ. Έστω H η μικρότερη κανονική υποομάδα της G που περιέχει το a^2b^{-3} και K η μικρότερη κανονική υποομάδα της G που περιέχει το a^2b^{-5}. Δείξτε ότι οι G/H και G/K δεν είναι ισόμορφες.
