
1. Έστω X η «τρύπια σαμπρέλλα» (δηλαδή $X = S^1 \times S^1 - \{x\}$, όπου x τυχαίο σημείο του $S^1 \times S^1$). Να εξηγήσετε γιατί η θεμελιώδης ομάδα του X είναι ελεύθερη σε δύο γεννήτορες.

Υπόδειξη: Θεωρήσετε το $S^1 \times S^1$ ως χώρο πηλίκου του $D^1 \times D^1$ όπου «κολλούμε» απέναντι πλευρές. Πάρτε $x = (0, 0)$.

2. Έστω G η ελεύθερη ομάδα στους γεννήτορες a και b . Έστω H η μικρότερη κανονική υποομάδα της G που περιέχει το a^2b^{-2} . Τέλος, έστω K ο χώρος πηλίκου X/\sim όπου $X = D^1 \times D^1$, και η \sim παράγεται από τις σχέσεις $(-1, t) \sim (1, -t)$ και $(t, -1) \sim (t, 1)$. (Δηλαδή «κολλούμε» απέναντι πλευρές, αλλά το ένα ζεύγος το κολλούμε με την αντίθετη φορά. Δηλαδή το K είναι η φιάλη του Klein.) Να εξηγήσετε γιατί η θεμελιώδης ομάδα του K είναι ισόμορφη με την G/H .
