Μάνος Λυδάκης 17 Δεκεμβρίου 2015

Μέρος Α: Η Θεμελιώδης Ομάδα

Διάλεξη 1: Τι είναι δρόμος, στον (χώρο) X, πότε ο X είναι Κατά Δρόμους Συνεκτικός (ΚΔΣ), ο σταθερός δρόμος, ο αντίστροφος δρόμος, πολλαπλασιασμός δρόμων, η σχέση ισοδυναμίας $a \sim b$ («τα σημεία a και b του Xσυνδέονται με δρόμο»). Ομοτοπία, κλάσεις ομοτοπίας. Ομοτοπία δρόμων, το σύνολο $\pi(X, a, b)$ των κλάσεων ομοτοπίας δρόμων του X από το a στο b.

Διάλεξη 2: Η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X, a)$ του χώρου X στο «σημείο βάσης» $a \in X$, που ορίζεται ως $\pi_1(X, a) = \pi(X, a, a)$ χρησιμοποιώντας το γινόμενο της προηγούμενης διάλεξης. Αλλαγή σημείου βάσης.

Διάλεξη 3: Απλά συνεκτικοί χώροι. Χώροι με Σημείο Βάσης (ΧΣΒ) και οι απεικονίσεις τους, η επαγόμενη απεικόνιση. Χώροι πάνω από τον X, νήματα, διατύπωση του Θεωρήματος Υπολογισμού της Θεμελιώδους Ομάδας του Κύκλου (ΘΥΘΟΚ).

Διάλεξη 4: Retractions και sections για ομάδες, χώρους, ΧΣΒ, σύνολα, και διανυσματικούς χώρους. Το θεώρημα ότι ∂M δεν είναι retract του M αν το M είναι συμπαγής n-πολλαπλότητα, απόδειξη για $M = D^2$. Σταθερά σημεία, η Ιδιότητα του Σταθερού Σημείου (ΙΣΣ), το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brower, ότι δηλαδή ο D^n έχει την ΙΣΣ, απόδειξη για $n = 2$. Ομοτοπία και γινόμενα.

Διάλεξη 5: $i_* : \pi_1(S^{n-1}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n - 0)$ όπου $i : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n - 0$. Ο βαθμός $\deg f$ μιας συνεχούς $f : S^1 \to S^1$ και ο δείκτης στροφής μιας συνεχούς $f : S^1 \to \mathbb{R}^2 - 0$. Εφαρμογή στο Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.

Διάλεξη 6: Σχέση μεταξύ f_* και $\sigma_\sharp$. Ομοτοπίες με Σημείο Βάσης (ΟΣΒ) και οι αντίστοιχες κλάσεις $[X, Y]_*$, η «κανονική ταύτιση» $[S^1, X]_* \cong \pi_1(X)$, η «κανονική απεικόνιση» $\kappa : [X, Y]_* \to [X, Y]$, η ειδική περίπτωση $X = S^1$, η ειδική περίπτωση $X = Y = S^1$, οι $f, g : S^1 \to S^1$ είναι ομοτοπικές αν και μόνο αν $\deg f = \deg g$. Πότε μια $f : X \to Y$ λέγεται Ομοτοπική Ισοδυναμία (ΟΙ), πότε οι χώροι X και Y λέγονται ομοτοπικά ισοδυναμοι $(X \sim Y)$, σύντομα σχόλια στην Εικασία του Poincaré.

Διάλεξη 7 (πρώτο μέρος): Αν η f είναι ΟΙ τότε η f_* είναι ισομορφισμός, ομοτοπία rel A και strong deformation retracts.

Μέρος Β: Το Θεώρημα των Seifert-van Kampen

Διάλεξη 7 (δεύτερο μέρος): Λέξεις (words), reduced words, και το άθροισμα (ελεύθερο γινόμενο) $G = \ast_i G_i$ της οικογένειας ομάδων $(G_i)_{i \in J}$.

Διάλεξη 8: Η Θεμελιώδης Ιδιότητα του Αθροίσματος. Παράδειγμα: περιγραφή της ομάδας $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Ημιευθέα γινόμενα. Παράδειγμα: περιγραφή της ομάδας $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

Διάλεξη 9: Διατύπωση του Θεωρήματος των Seifert-van Kampen (ΘSvK). Μια πρώτη εφαρμογή του ΘSvK: Απλή συνεκτικότητα του χώρου, δεδομένης της απλής συνεκτικότητας των κομματιών. Αυτό με τη σειρά του μας δίνει την απλή συνεκτικότητα των S^n και $\mathbb{R}^{n+1} - 0$ για $n \geq 2$. Αθροίσματα συνόλων, χώρων, ΧΣΒ, και ομάδων: Τα αθροίσματα συνόλων και χώρων δίνονται από τη λεγόμενη «ξένη ένωση», το άθροισμα ομάδων το μελετήσαμε στις προηγούμενες δυο διαλέξεις, οπότε η «νέα» κατασκευή εδώ είναι το άθροισμα $\bigvee_\alpha X_\alpha$ όπου X_α είναι μια οικογένεια ΧΣΒ (το $\bigvee_\alpha X_\alpha$ δίνεται από την ξένη ένωση «κολλώντας» όλα τα σημεία βάσης).

Διάλεξη 10: Pairs (of spaces), NDR pairs, καλοί ΧΣΒ, $\pi_1(\bigvee_\alpha X_\alpha) \cong \ast_\alpha \pi_1(X_\alpha)$ (ισχύει αν οι X_α είναι καλοί), και, γενικότερα, πως μπορούμε να εφαρμόζουμε το ΘSvK σε όχι-απαραίτητα-ανοικτά κομμάτια, αν υπάρχουν κατάλληλα thickenings. Εφαρμογές: Η θεμελιώδης ομάδα του «ρόδου με n-πέταλλα», η θεμελιώδης ομάδα του «επιπέδου με n-τρύπες», η θεμελιώδης ομάδα του «σχήματος Θ». Graphs, trees, και χώροι που τα «πραγματώνουν».

Διάλεξη 11: Spanning trees, υπολογισμός της θεμελιώδους ομάδας ενός graph. Απόδειξη του ΘSvK (συνεχίζεται).

Διάλεξη 12: Ολοκλήρωση της απόδειξης του ΘSvK.

Διάλεξη 13: Κατηγορίες, (commutative) squares, pushout squares, παραδείγματα για σύνολα και χώρους, ΧΣΒ, ομάδες, και διανυσματικούς χώρους. Το ΘSvK για δυο κομμάτια λέει «το π_1 διατηρεί pushouts» (εννοείται, ανοιχτά κομμάτια, ΚΔΣ διπλές τομές). Η «στάνταρ απόδειξη» ότι «ορισμοί μέσω universal properties είναι πάντα μοναδικοί έως κανονικού ισομορφισμού». Mapping cylinders και mapping cones. Απλά παραδείγματα με δίσκους και σφαίρες. Πιο ενδιαφέρον παράδειγμα: η ταινία του Möbius.

Διάλεξη 14: Ο χώρος που προκύπτει από τον X by attaching n-cells, CW-structures, the skeleton filtration, CW-complexes, παραδείγματα. Presentation μιας ομάδας με generators και relations.

Διάλεξη 15: Κάθε ομάδα είναι θεμελιώδης ομάδα.

Μέρος Γ: Επικαλύπτοντες Χώροι

Διάλεξη 16: Άρτια Καλυμμένα (ΑΚ) υποσύνολα, Επικαλύπτοντες Χώροι (ΕΧ), παραδείγματα, τετριμμένοι ΕΧ, «ΕΧ = τοπικά τετριμμένοι ΕΧ», πλήθος των πτυχών. Η Ιδιότητα Ανύψωσης Ομοτοπίας.

Διάλεξη 17: Ορίσαμε, δεδομένου ΕΧ $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to (X, x_0)$, την αντίστοιχη υποομάδα $H = \operatorname{Im} p_*$ της $G = \pi_1(X, x_0)$ (εννοείται $p_* : \widetilde{G} \to G$, όπου $\widetilde{G} = \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$). Είδαμε ότι ο p_* είναι ένα-προς ένα (άρα $H \cong \widetilde{G}$) και ότι η H αποτελείται ακριβώς από τις κλάσεις των loops των οποίων οι ανυψώσεις είναι πάλι loops. Ορίσαμε, δεδομένου $g = [\gamma] \in G$, το αντίστοιχο σημείο $\widetilde{x}_g$ στο νήμα $F = p^{-1}(x_0)$ ως $\widetilde{x}_g = \widetilde{\gamma}(1)$, και είδαμε ότι εξαρτάται μόνο από το g και όχι από το loop γ που αντιπροσωπεύει το g. και υποθέτοντας τώρα ότι ο $\widetilde{X}$ είναι ΚΔΣ, τότε η απεικόνιση $g \mapsto \widetilde{x}_g$ δίνει ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση $H \backslash G \to F$, όπου το $H \backslash G$ συμβολίζει το σύνολο των δεξιών συμπλόκων της H στην G. Ειδικότερα τότε το πλήθος των πτυχών ταυτίζεται με το δείκτη $[G : H]$.

Διάλεξη 18: είδαμε ότι το «γεωμετρικό πρόβλημα» ύπαρξης ανύψωσης της $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ στο $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ είναι ισοδύναμο με το αντίστοιχο «αλγεβρικό πρόβλημα» που προκύπτει εφαρμόζοντας το π_1. (Αυτό χρειάζεται τον Y να είναι ΚΔΣ και τοπικά ΚΔΣ.) Το «αλγεβρικό πρόβλημα» επαναδιατυπώνεται πιο απλά, αφού η p_* είναι ένα-προς-ένα: είναι το «πρόβλημα» (του αν ισχύει ή όχι ότι) $\operatorname{Im} f_* \subseteq H$. Τέλος, είδαμε ότι τα «γεωμετρικά και αλγεβρικά προβλήματα» της μοναδικότητας ανύψωσης είναι πάλι ισοδύναμα (αυτό απλώς χρειάζεται τον Y συνεκτικό). Παρατηρήστε ότι αλγεβρικά η μοναδικότητα ισχύει πάντα (αντιστοιχεί στο ότι ο p_* είναι ένα-προς-ένα), οπότε αυτό που λέμε εδώ είναι απλά ότι (και γεωμετρικά) η ανύψωση είναι μοναδική (αν υπάρχει).

Διάλεξη 19: Ορίσαμε τον Universal ΕΧ και είδαμε το "universality" που έχει (ειδικότερα την μοναδικότητα έως μοναδικού κανονικού ισομορφισμού). Συμφωνήσαμε, μέχρι και τις επόμενες τρεις διαλέξεις, «καλός» να σημαίνει «συνεκτικός, τοπικά κατά δρόμους συνεκτικός, και ημιτοπικά απλά συνεκτικός». Κάθε «καλός» X έχει Universal ΕΧ. (συνεχίζεται)

Διάλεξη 20: Κάθε «καλός» X έχει Universal ΕΧ.

Διάλεξη 21: Κάθε υποομάδα H της θεμελιώδους ομάδας G ενός καλού ΧΣΒ (X, x) είναι αντίστοιχη υποομάδα ενός καλού ΕΧ $(X_H, x_H) \to (X, x)$. Ισομορφισμός ΚΔΣ-ΤΚΔΣ Επικαλυπτόντων Χώρων αντιστοιχεί με ισότητα αντίστοιχων υποομάδων. Η κατάταξη των καλών ΕΧ, με και χωρίς σημείο βάσης. Η κανονική δράση της G στο νήμα. Ο κανονικός ΕΧ με νήμα το G-σύνολο F.

Διάλεξη 22: Η κατάταξη των (όχι απαραίτητα συνεκτικών) ΕΧ πάνω από καλό χώρο X, παραδείγματα με $X = S^1$ και $X = S^1 \vee S^1$. Το Θεώρημα Nielsen-Schreier.

Διάλεξη 23: Επικαλύπτοντες Μετασχηματισμοί και η ομάδα $G(\widetilde{X})$ που σχηματίζουν. Κανονικοί ΕΧ. Η σχέση μεταξύ $G(\widetilde{X})$, G, και H. Ο Χώρος Τροχιών $X = \widetilde{X}/G$ ενός G-χώρου $\widetilde{X}$. Ελεύθερες δράσεις, Δράσεις ΕΧ (ΔΕΧ). Η σχέση μεταξύ κανονικών ΕΧ και ΔΕΧ.

Μέρος Δ: Οι Ανώτερες Ομάδες Ομοτοπίας

Διάλεξη 24: Ζεύγη χώρων, οι απεικονίσεις τους, και οι ομοτοπίες τους. Τα ζεύγη $(I^n, \partial I^n)$ και $(\partial I^n, J^{n-1})$, και τα σύνολα $\pi_n(X, x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Η πρόσθεση στα σύνολα $\pi_n(X, x)$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$, που κάνει αυτά τα σύνολα να είναι αβελιανές ομάδες. Ο κανονικός ισομορφισμός μεταξύ $\pi_n(X \times Y)$ και $\pi_n(X) \times \pi_n(Y)$. Αλλαγή σημείου βάσης, η δράση της $\pi_1(X)$ στις $\pi_n(X)$. Η ισοδύναμη περιγραφή της $\pi_n(X)$ ως $[S^n, X]_*$ και η αντίστοιχη περιγραφή της πρόσθεσης.

Διάλεξη 25: Ακριβείς ακολουθίες, σχετικές ομάδες ομοτοπίας, η «μακρά ακριβής ακολουθία» (long exact sequence) των ομάδων ομοτοπίας.