
Σε όλες τιςπαρακάτω ασκήσεις, οι αποδείξεις πρέπει να γίνουν με επαγωγή.

1: Δείξτε ότι, για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, $2^n < 3^n$.

2: Δείξτε ότι, για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, το 3 διαιρεί τον ακέραιο $n^3 - n$.

3: Δείξτε με πλήρη επαγωγή ότι, χρησιμοποιώντας μόνο γραμματόσημα των 3 και 5 λεπτών, μπορώ να πληρώσω ακριβώς κάθε ακέραιο ποσό που είναι τουλάχιστον 8 λεπτά.

4: Να ξαναλύσετε, αυτή τη φορά με συνήθη επαγωγή, την προηγούμενη άσκηση.

5: Δίνεται μια ακολουθία $b_1, b_2, \ldots$ τέτοια ώστε όλοι οι όροι της είναι μεταξύ 0 και 1. Ορίζω τώρα μια δεύτερη ακολουθία $a_1, a_2, \ldots$ ως εξής:

$a_1 = 1$, $a_2 = a_1 b_1$, $a_3 = a_1 b_1 + a_2 b_2$, $a_4 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \ldots$, $a_{n+1} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$. Να δείξετε ότι $a_n < 2^{n-1}$ για $n = 2, 3, \ldots$.

6: Δείξτε ότι κάθε ακέραιος $n \geq 1$ γράφεται ως άθροισμα διαφορετικών (ακεραίων)δυνάμεων του 2. (Παραδείγματα: $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $3 = 2^1 + 2^0$, $4 = 2^2$, $5 = 2^2 + 2^0$, $6 = 2^2 + 2^1$, $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$.)

Υποδείξεις: **Α.** Πλήρης επαγωγή. **Β.** Σημασία έχει το αν ο n είναι άρτιος ή όχι.

7: Βρείτε το λάθος στην παρακάτω απόδειξη, όπου θα αποδείξω ότι όλα τα άλογα έχουν το ίδιο χρώμα:

Αρκεί να δείξω ότι, για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, οποιοδήποτε σύνολο αλόγων $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ και αν διαλέξω, όλα τα άλογα στο A έχουν το ίδιο χρώμα. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n.

Βάση της επαγωγής: Πρέπει να αποδείξω ότι όλα τα άλογα στο $\{a_1\}$ έχουν το ίδιο χρώμα. Αυτό είναι προφανές.

Επαγωγική Υπόθεση: Για κάποιο ακέραιο $n \geq 1$, υποθέτω ότι, οποιοδήποτε σύνολο αλόγων $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ και αν διαλέξω, όλα τα άλογα στο A έχουν το ίδιο χρώμα.

Επαγωγικό Βήμα: Έστω $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ ένα σύνολο αλόγων. Αρκεί να δείξω ότι όλα τα άλογα στο A' έχουν το ίδιο χρώμα.

Έστω $A'' = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, και $A''' = \{a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}\}$. Από την επαγωγική υπόθεση, η πρώτη ομάδα αλόγων (τα άλογα στο A'') έχουν το ίδιο χρώμα. Παρομοίως, εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση στο A''', η δεύτερη ομάδα αλόγων αποτελείται και αυτή από άλογα ιδίου χρώματος. Αφού υπάρχουν άλογα που ανήκουν και στις δυο ομάδες, το χρώμα των αλόγων στην πρώτη ομάδα είναι το ίδιο με το χρώμα των αλόγων στην δεύτερη ομάδα, δηλαδή τα $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ έχουν ίδιο χρώμα, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.