Μάνος Λυδάκης 18 Δεκεμβρίου 2015

---

**Μέρος Α: Σύνολα.**

---

Διάλεξη 1: Ορολογία και συμβολισμός, πότε δεν ισχύει μια πρόταση της μορφής (I)⇒(II), πως χρησιμοποιούμε προτάσεις της μορφής (I)⇒(II) σε μια απόδειξη, πως αποδεικνύουμε προτάσεις της μορφής (I)⇒(II), υποσύνολα.

---

Διάλεξη 2: Ισότητα συνόλων και υποσύνολα. Η άρνηση $\neg$ (I) της πρότασης (I), οι $\neg[(\forall x)(\mathrm{I})]$ και $(\exists x)[\neg(\mathrm{I})]$ είναι ισοδύναμες, οι $\neg[(\exists x)(\mathrm{I})]$ και $(\forall x)[\neg(\mathrm{I})]$ είναι ισοδύναμες, το κενό σύνολο. Ενώσεις και τομές: παραδείγματα και ιδιότητες.

---

Διάλεξη 3: Το συμπληρωματικό σύνολο: παραδείγματα και ιδιότητες. Οι κανόνες του De Morgan.

---

**Μέρος Β: Σχέσεις.**

---

Διάλεξη 4: Το Καρτεσιανό Γινόμενο $A \times B$ των συνόλων $A$ και $B$, παραδείγματα και ιδιότητες. Παραδείγματα σχέσεων στο $S = \mathbb{R}$, ανακλαστικές, συμμετρικές, και μεταβατικές σχέσεις στο τυχαίο σύνολο $S$.

---

Διάλεξη 5: Αν $S$ είναι τυχαία σύνολο, και $\sim$ τυχαία σχέση ισοδυναμίας στο $S$, ορίσαμε την αντίστοιχη *κλάση* (ισοδυναμίας) $\overline{x}$ με αντιπρόσωπο το $x \in S$. Αποδείξαμε τις παρακάτω σημαντικές ιδιότητες των κλάσεων: Ότι δυό στοιχεία είναι ισοδύναμα ακριβώς όταν ισούνται οι κλάσεις τους, και ότι τα στοιχεία μιας κλάσης είναι ακριβώς οι αντιπρόσωποί της. Είπαμε πότε κάποια δεδομένα υποσύνολα του $S$ σχηματίζουν διαμέριση του $S$. Εξηγήσαμε γιατί αυτό συμβαίνει αν αυτά τα υποσύνολα είναι οι κλάσεις κάποιας $\sim$.

---

Διάλεξη 6: Είδαμε παραδείγματα, κυρίως με $n = 3$, της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού $\bmod n$. Ας συμβολίσουμε, όπως στην αίθουσα, με $a$ την κλάση του $a \bmod n$ (ο συνήθης συμβολισμός του $a$ είναι $\overline{a}$). Είδαμε τις εξής τρεις ιδιότητες (όπου «κλάση» σημαίνει «κλάση $\bmod n$»):

**1.** Υπάρχουν ακριβώς $n$ διαφορετικές κλάσεις. Αυτές είναι οι $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

**2.** Αν $a$ είναι τυχαίος ακέραιος, και αν $b$ είναι το υπόλοιπο του $a$ δια $n$, τότε $a = b$.

**3.** Αν $a + b = c$ τότε $a + b = c$. Αν $a \cdot b = c$ τότε $a \cdot b = c$.

---

Διάλεξη 7: Αποδείξαμε τρεις ιδιότητες των κλάσεων $\bmod n$ (για την ακρίβεια, η πρώτη είναι ειδική περίπτωση της δεύτερης, και η δεύτερη είναι ειδική περίπτωση της τρίτης): Πρώτη ιδιότητα: $\overline{n} = \overline{0}$. Δεύτερη ιδιότητα: $\overline{a} = \overline{0}$ αν και μόνο αν το $n$ διαιρεί το $a$. Τρίτη ιδιότητα: $\overline{a} = \overline{b}$ αν και μόνο αν το $n$ διαιρεί το $b - a$.

Μιλήσαμε για τη σχέση ισοδυναμίας «ισοτιμία $\bmod n$» (της οποίας οι κλάσεις είναι ακριβώς οι κλάσεις $\bmod n$).

Κάναμε μερικούς υπολογισμούς $\bmod n$, με έμφαση στα $n = 3, 9, 10, 100$.

---

**Μέρος Γ: Συναρτήσεις.**

---

Διάλεξη 8: Τι σημαίνει η φράση «η $f$ είναι συνάρτηση από το $A$ στο $B$», παραδείγματα και αντιπαραδείγματα. Τι σημαίνουν οι φράσεις «η συνάρτηση $f$ είναι επί», και «η συνάρτηση $f$ είναι ένα-προς-ένα». Παραδείγματα και αντιπαραδείγματα με άπειρα και πεπερασμένα σύνολα.

---

Διάλεξη 9: Η αντίστροφη συνάρτηση $g = f^{-1}$ της $f$, γιατί αυτή υπάρχει ακριβώς όταν η $f$ είναι επί και ένα-προς-ένα, και γιατί τότε $f = g^{-1}$.

---

Διάλεξη 10: Σύνθεση συναρτήσεων, ταυτοτικές συναρτήσεις, και αντίστροφες συναρτήσεις. Η εικόνα ενός υποσυνόλου του πεδίου ορισμού και η αντίστροφη εικόνα ενός υποσυνόλου του πεδίου τιμών.

---

Διάλεξη 11: Εικόνα και αντίστροφη εικόνα: παραδείγματα και ιδιότητες.

**Μέρος Δ: Μαθηματική Λογική.**

Διάλεξη 12: Η λογική τιμή μιας πρότασης $P$, πίνακες αληθείας για τις «όχι $P$» ($\neg P$), «$P$ ή $Q$» ($P \vee Q$), «$P$ και $Q$» ($P \wedge Q$), «$P$ συνεπάγεται $Q$» ($P \Rightarrow Q$), «$P$ ισοδύναμη της $Q$» ($P \Leftrightarrow Q$). Υπολογισμός πιο σύνθετων πινάκων αληθείας και η σχέση τους με ισοδύναμες εκφράσεις.

Διάλεξη 13: Παραδείγματα πιο σύνθετων πινάκων αληθείας. Ταυτολογίες. Ταυτολογίες της μορφής «κάτι»$\Rightarrow$«κάτι άλλο» και η σχέση τους με «μεθόδους απόδειξης». Ταυτολογίες της μορφής «κάτι»$\Leftrightarrow$«κάτι άλλο» και η σχέση τους με λογικές ισοδυναμίες.

**Μέρος Ε: Αποδείξεις, Επαγωγή, Διαιρετότητα.**

Διάλεξη 14: Η διαισθητική ιδέα πίσω από τη μαθηματική επαγωγή, η συνήθης μαθηματική επαγωγή και η πλήρης μαθηματική επαγωγή, παραδείγματα.

Διάλεξη 15: Διαιρετότητα, πρώτοι αριθμοί, κάθε ακέραιος $n \geq 2$ έχει κάποιο πρώτο παράγοντα, υπάρχουν άπειροι πρώτοι.

Διάλεξη 16: Είδαμε το κόσκινο του Ερατοσθένη: είναι ένας αλγόριθμος που, ξεκινώντας από τους πρώτους μέχρι κάποιο πρώτο $p$, βρίσκει τους πρώτους μέχρι το $p^2$. Θυμηθήκαμε ότι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) διαιρείται από κάθε άλλο Κοινό Διαιρέτη (ΚΔ), και αρχίσαμε να «εξηγούμε αυτό το φαινόμενο»: (Ας χρησιμοποιούμε τα αρχικά «ΓΣ» να σημαίνουν (ακέραιο) Γραμμικό Συνδυασμό.) Είδαμε ότι «ΚΔ και ΓΣ $\Rightarrow$ ΜΚΔ» και ότι σε αυτή την περίπτωση (δηλαδή στην περίπτωση «ΚΔ και ΓΣ») ο ΜΚΔ πράγματι διαιρείται από κάθε ΚΔ. Περιγράψαμε τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο, που εξηγεί το γιατί, αντιστρόφως, «ΜΚΔ $\Rightarrow$ ΚΔ και ΓΣ».

Διάλεξη 17: Είδαμε πιο αναλυτικά ένα παράδειγμα του Ευκλειδείου Αλγορίθμου. Εξηγήσαμε γιατί πάντα, μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων, αυτός ο αλγόριθμος πράγματι υπολογίζει τον ΜΚΔ. Είπαμε και «επίσημα» ότι «ΜΚΔ $\Leftrightarrow$ ΚΔ και ΓΣ». Είδαμε ότι, για θετικούς ακεραίους $d$ και $n$ και για τυχαίους ακεραίους $a$ και $b$ που δεν είναι και οι δύο μηδέν, $d =$ΜΚΔ$(a, b) \Leftrightarrow nd =$ΜΚΔ$(na, nb)$.

Διάλεξη 18: Σχετικά πρώτοι αριθμοί, το Λήμμα του Ευκλείδη, το Ελάχιστο (θετικό) Κοινό Πολλαπλάσιο (συνεχίζεται).

Διάλεξη 19: Το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο. Εισαγωγή στο Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής (ΘΘΑ), διατύπωση του ΘΘΑ, απόδειξη του ΘΘΑ.

Διάλεξη 20 (πρώτο μέρος): Ο εκθέτης ενός πρώτου αριθμού στον θετικό ακέραιο $a$.

**Μέρος Ζ: Συνδυαστική.**

Διάλεξη 20 (δεύτερο μέρος): Πλήθος των στοιχείων του $A_1 \cup A_2$, πλήθος των στοιχείων του $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Πλήθος των στοιχείων του $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ αν τα $A_1, A_2, \ldots A_k$ είναι ανά δύο ξένα (ο «Κανόνας του Αθροίσματος»).

Διάλεξη 21: Ο «Κανόνας του Γινομένου», διατάξεις με επανάληψη, διατάξεις χωρίς επανάληψη, συνδυασμοί χωρίς επανάληψη.

Διάλεξη 22: Οι διωνυμικοί συντελεστές, συνδυασμοί με επανάληψη.

**Μέρος Η: Το άπειρο.**

Διάλεξη 23: Το «Ξενοδοχείο του Hilbert» (συνεχίζεται).

Διάλεξη 24: (πρώτο μέρος) Οι πραγματικοί αριθμοί «δεν χωράνε στο Ξενοδοχείο του Hilbert». Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα, η μαθηματική διατύπωση των παρατηρήσεων μας σχετικά με το Ξενοδοχείο του Hilbert.

---

**Μέρος Θ: Μιγαδικοί αριθμοί.**

---

Διάλεξη 24: (δεύτερο μέρος) Η γωνία που αντιστοιχεί σε ένα μιγαδικό αριθμό. Ο «κανόνας ΠΑΠΓ» (Πολλαπλασιασμός Αριθμών αντιστοιχεί σε Πρόσθεση Γωνιών). Η πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού (λέγεται και τριγωνομετρική μορφή). Η «κλασσική διατύπωση» του τι σημαίνει ότι «η γωνία $\theta$ αντιστοιχεί στον $z$» [σημαίνει $z = |z|\cdot\operatorname{cis}(\theta)$].

---

Διάλεξη 25: Η «κλασσική διατύπωση» του «κανόνα ΠΑΠΓ», που είναι

$(|z_1|\cdot\operatorname{cis}(\theta_1))(|z_2|\cdot\operatorname{cis}(\theta_2)) = |z_1 z_2|\cdot\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$,

και η απόδειξη. Ο τύπος του de Moivre. Ο τύπος του Euler.