Μέρος Α: Ανοιχτά Σύνολα

Διάλεξη 1: Τα σύνολα με τα οποία ασχοληθήκαμε σε αυτή τη διάλεξη ήταν, ουσιαστικά, υποσύνολα του επιπέδου (δηλαδή του $X = \mathbb{R}^2$) και της ευθείας (δηλαδή του $X = \mathbb{R}$).

Η αυστηρή και η γεωμετρική προσέγγιση στα σύνολα (και οι δυο είναι απολύτως απαραίτητες για το μάθημα). Ειδικότερα πως οι αυστηρές έννοιες «σύνολο», «στοιχείο», «$\cup$», «$\cap$» αντιστοιχούν σε πολύ βασικές γεωμετρικές έννοιες, αντίστοιχα «σχήμα», «σημείο», «ένωση», «τομή». Οικογένειες συνόλων, οι ενώσεις και οι τομές τους, άπειρες ενώσεις και άπειρες τομές.

Διάλεξη 2: Τα σύνολα με τα οποία ασχοληθήκαμε σε αυτή τη διάλεξη ήταν, ουσιαστικά, υποσύνολα του $X = \mathbb{R}^n$, αλλά, όπως στην προηγούμενη διάλεξη, αρκεί να καταλάβετε τις ειδικές περιπτώσεις $n = 1, 2$.

Η συνήθης απόσταση στον $\mathbb{R}^n$. Ανοιχτοί δίσκοι στον $\mathbb{R}^n$.

Θεωρήσαμε για λίγο ένα τυχαίο σύνολο X και ένα τυχαίο σύνολο σ που αποτελείται από υποσύνολα του X. Ορίσαμε, δεδομένου $D \subseteq X$, τι εννοούμε λέγοντας «το σ είναι κάλυψη του D». Ορίσαμε τι εννοούμε λέγοντας «το σ είναι βάση». (Η επίσημη ορολογία είναι: το σ είναι βάση για κάποια τοπολογία στο X. Θα δούμε σε λίγες διαλέξεις τι σημαίνει αυτό, προς το παρόν αγνοήστε το.)

Επιστρέφουμε στην ειδική περίπτωση $X = \mathbb{R}^n$. Πήραμε το σ να είναι το σύνολο όλων των ανοιχτών δίσκων του X. Ξεκινήσαμε την απόδειξη ότι το σ είναι βάση.

Διάλεξη 3: Ολοκλήρωση της απόδειξης του προηγουμένου θεωρήματος.

Εσωτερικά σημεία του D και το σύνολο $\mathrm{int}(D)$ που σχηματίζουν. Το $\mathrm{int}(D)$ συμβολίζεται και με D^o και λέγεται εσωτερικό του D.

Κοντινά σημεία του D και το σύνολο $\mathrm{cl}(D)$ που σχηματίζουν. Το $\mathrm{cl}(D)$ συμβολίζεται και με $\overline{D}$ και λέγεται περίβλημα (ή: κλειστή θήκη· ή: κλειστότητα) του D.

Διατυπώσαμε και εξηγήσαμε διαισθητικά το θεώρημα «η σχέση μεταξύ κοντινού σημείου ενός συνόλου και εσωτερικού σημείου του συμπληρωματικού» («είσαι το ένα $\Leftrightarrow$ δεν είσαι το άλλο»).

Διάλεξη 4: Σχόλια και απόδειξη του προηγουμένου θεωρήματος.

Ιδιότητες των εσωτερικών και κοντινών σημείων.

Ανοιχτά υποσύνολα του $X = \mathbb{R}^n$ και το σύνολο τ_X που σχηματίζουν. Το σύνολο τ_X λέγεται η (συνήθης) τοπολογία του $\mathbb{R}^n$ και συχνά το συμβολίζουμε απλώς με τ.

Διατυπώσαμε το θεώρημα «σημαντικές ιδιότητες των ανοιχτών»: Τα $D = \varnothing$ και $D = X$ είναι ανοιχτά, ενώσεις και πεπερασμένες τομές ανοιχτών είναι ανοιχτές.

Διάλεξη 5: Απόδειξη του προηγουμένου θεωρήματος.

Δείξαμε ότι το D^o είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό υποσύνολο του D.

Δείξαμε ότι κάθε $B \in \sigma$ είναι ανοιχτό. Αυτά τα B θα τα λέμε «βασικά ανοιχτά» (β.α.). (Ερώτηση: Γιατι τα λέω «βασικά ανοιχτά» αφού ήδη έχουν ένα όνομα (τα λέω και «ανοιχτούς δίσκους»); Απάντηση: Χρησιμοποιώ την ορολογία των «αφηρημένων τοπολογικών χώρων» για να κάνω τις αποδείξεις μας, τώρα που $X = \mathbb{R}^n$, να ισχύουν, σχεδόν χωρίς αλλαγή, και αργότερα που το X θα είναι ένας αφηρημένος τοπολογικός χώρος.)

Το θεώρημα «σχέση μεταξύ βασικών ανοιχτών και ανοιχτών» (λέει: τα ανοιχτά είναι ακριβώς οι ενώσεις βασικών ανοιχτών), και η αποδείξη.

Διάλεξη 6 (πρώτο μέρος): Συνεχίζουμε, προς το παρόν, με $X = \mathbb{R}^n$.

Κλειστά υποσύνολα του X. Κλειστά υποσύνολα και κοντινά σημεία. Η σχέση μεταξύ ανοιχτών και κλειστών υποσυνόλων. Σημαντικές ιδιότητες των κλειστών. Το $\overline{D}$ είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του X που περιέχει το D.

Το σύνορο ενός υποσυνόλου. Ιδιότητες. Διαισθητική σημασία.

Μέρος Β: Μετρικοί χώροι

Διάλεξη 6 (δεύτερο μέρος): Μετρικές και μετρικοί χώροι: ορισμοί.

Οι ℓ_p-νόρμες στον $\mathbb{R}^n$ με έμφαση στην ειδική περίπτωση $n = 2, p = 1$ (η «γεωμετρία του ταξί»).

Διάλεξη 7: Οι μετρικές d_p στον $X = \mathbb{R}^n$ που καθορίζονται από τις ℓ_p-νόρμες. Παραδείγματα: «κύκλοι» σε αυτές τις μετρικές στον $\mathbb{R}^2$. Η φραγμένη μετρική. Παραδείγματα: «κύκλοι» και «μπάλλες» στη φραγμένη μετρική στο επίπεδο. Η διακριτή μετρική. Η περιορισμένη μετρική. Παραδείγματα που αυτές οι δυο τελευταίες μετρικές ισούνται για υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

Διάλεξη 8: Δουλέψαμε σε ένα τυχαίο μετρικό χώρο (X, d) που, όποτε δεν υπήρχε κίνδυνος σύγχισης, τον συμβολίζαμε απλά με X.

Παρατηρήσαμε ότι υπάρχουν «προφανείς» γενικεύσεις ουσιαστικά όλων των ορισμών και θεωρημάτων του μέρους Α. Πιο αναλυτικά:

Υπάρχει η «μπάλλα» $B_X(a, \varepsilon)$, δεδομένου του κέντρου $a \in X$ και της ακτίνας $\varepsilon > 0$. Υπάρχει το σ_X που είναι το σύνολο από όλες τις παραπάνω μπάλλες. Υπάρχουν «προφανείς» ορισμοί του τι σημαίνουν τα παρακάτω: βασική περιοχή του $a \in X$, εσωτερικό σημείο του $D \subseteq X$, κοντινό σημείο του $D \subseteq X$, D^o, $\overline{D}$, ανοιχτό, τοπολογία $\mathcal{T}_X$, κλειστό, σύνορο. Τότε όλα τα θεωρήματα του μέρους Α εξακολουθούν να ισχύουν, ουσιαστικά με την ίδια διατύπωση και απόδειξη. (Για να είναι **ακριβώς** η ίδια διατύπωση, συμφωνούμε όταν το (X, d) είναι σταθερό και δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχισης, να απλοποιούμε το συμβολισμό παραλείποντας το «δείκτη» X, δηλαδή το $\mathcal{T}_X$ το συμβολίζουμε απλά με $\mathcal{T}$, το $B_X(a, \varepsilon)$ το συμβολίζουμε απλά με $B(a, \varepsilon)$, και το σ_X το συμβολίζουμε απλά με το σ.)

Μετρικοί υπόχωροι, και η σχέση «μπάλλας στον υπόχωρο και μπάλλας στο χώρο».

Παραδείγματα με τους εξής υποχώρους του $\mathbb{R}^n$: $X = [0, 1)$, $X =$ ο μοναδιαίος κύκλος, $X =$ η μοναδιαία σφαίρα.

Είπαμε τι σημαίνει για δυό μετρικές d' και d'' στο ίδιο X να είναι «τοπολογικά ισοδύναμες». (Σημαίνει: καθορίζουν τα ίδια ανοιχτά.) Παραδείγματα: Για $X = \mathbb{R}^2$ συγκρίναμε τη συνήθη μετρική με τις εξής: την μετρική «του ταξί», την (συνήθη) φραγμένη, και την διακριτή.

Διάλεξη 9: Είδαμε πως δυό ισοδύναμες μετρικές καθορίζουν ακριβώς τις ίδιες «τοπολογικές έννοιες» (ίδια τοπολογία, ίδιο D^o, ίδια εσωτερικά σημεία, ίδια κλειστά σύνολα, ίδιο $\overline{D}$, ίδια κοντινά σημεία, ίδιο σύνορο).

Θεωρήσαμε μια συνάρτηση f μεταξύ μετρικών χώρων και ένα σημείο a του πεδίου ορισμού της. Ορίσαμε (προσωρινά) τι σημαίνει «η f είναι μετρικά συνεχής στο a» και «η f είναι τοπολογικά συνεχής στο a». Διατυπώσαμε το θεώρημα που λέει ότι οι δύο αυτές έννοιες της συνέχειας είναι ισοδύναμες. Δώσαμε το (μόνιμο) ορισμό του «συνεχής στο a» (εννοείται, ο ορισμός είναι: «συνεχής στο a» σημαίνει «μετρικά συνεχής στο a», ισοδύναμα, «τοπολογικά συνεχής στο a»). Ξεκινήσαμε την απόδειξη του θεωρήματος.

Διάλεξη 10 (πρώτο μέρος): Ολοκλήρωση της απόδειξης του προηγουμένου θεωρήματος. Παραδείγματα.

Μέρος Γ: Τοπολογικοί χώροι

Διάλεξη 10 (δεύτερο μέρος): Είπαμε τι εννοούμε λέγοντας «το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός χώρος». Ισχύει η «αναμενόμενη» ορολογία, δηλαδή το $\mathcal{T}$ λέγεται «η τοπολογία του χώρου», και τα $D \in \mathcal{T}$ λέγονται «τα ανοιχτά του χώρου», ειδικότερα το $\mathcal{T}$ είναι σύνολο υποσυνόλων του X. (Ουσιαστικά, τοπολογικός χώρος είναι ένα σύνολο X, μαζί με κάποια δεδομένα υποσύνολα του X που τα λέμε «ανοιχτά», αρκεί να «ισχύουν οι τέσσερις σημαντικές ιδιότητες των ανοιχτών».)

Ο τοπολογικός χώρος που καθορίζεται από ένα μετρικό χώρο. Πολλοί διαφορετικοί μετρικοί χώροι μπορεί να καθορίζουν τον ίδιο τοπολογικό χώρο, και μάλιστα αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν θεωρούμε (διαφορετικές αλλά) τοπολογικά ισοδύναμες μετρικές.

Προς το παρόν, μόνο οι ορισμοί: Μετρικοποιήσιμοι, διακριτοί, και τετριμμένοι τοπολογικοί χώροι. (Η ορολογία «τετριμμένοι τοπολογικοί χώροι» είναι «ανεπίσημη». Η «επίσημη» ορολογία είναι «τοπολογικοί χώροι που έχουν την τετριμμένη τοπολογία».)

Διάλεξη 11: Σύγκριση των παραπάνω κλάσεων τοπολογικών χώρων. Παραδείγματα: Τοπολογικά διακριτοί και μετρικά διακριτοί χώροι. Παραδείγματα, προς το παρόν μόνο διαισθητικά: τοπολογικά «ισοδύναμοι» χώροι. Παραδείγματα: Πλήρης κατάταξη των τοπολογικών χώρων με $n \leq 3$ σημεία.

Διάλεξη 12: Σε αυτή τη διάλεξη, όπως κατά κανόνα και σε όλες τις επόμενες, μελετούμε «αφηρημένους» τοπολογικούς χώρους. (Το «αφηρημένος» το λέμε κυρίως για να μας θυμίζει ότι η τοπολογία ίσως να μην προέρχεται από κάποια μετρική.) Συνήθως (καταχρηστικά) όποτε μπορώ (στην πράξη: σχεδόν πάντα) απλοποιώ τον συμβολισμό για ένα τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$, με το να λέω απλά «ο χώρος X».

Η τοπολογία $\mathcal{T}_\sigma$ που παράγεται από ένα δεδομένο σ, όπου το σ είναι, ως συνήθως, βάση για το **σύνολο** X. Είπαμε τι εννοούμε λέγοντας «το σ είναι βάση του **χώρου** $(X, \mathcal{T})$» (εννοούμε: $\mathcal{T}_\sigma = \mathcal{T}$).

Αποδείξαμε πως κάθε τοπολογικός χώρος έχει τουλάχιστον μια βάση, την ίδια του την τοπολογία. Παρατηρήσαμε (για δεύτερη φορά) ότι υπάρχουν «προφανείς» γενικεύσεις ουσιαστικά όλων των ορισμών και θεωρημάτων του μέρους Α. Πιο αναλυτικά:

Υπάρχουν «προφανείς» ορισμοί του τι σημαίνουν τα παρακάτω: βασική περιοχή του $a \in X$, εσωτερικό σημείο του $D \subseteq X$, κοντινό σημείο του $D \subseteq X$, D^o, $\overline{D}$, κλειστό, σύνορο. Τότε όλα τα θεωρήματα του μέρους Α εξακολουθούν να ισχύουν, ουσιαστικά με την ίδια διατύπωση και απόδειξη. (Υπάρχουν μόνο λίγες μικρές διαφορές που τα θεωρήματα γίνονται ορισμοί, ή αντιστρόφως. Για παράδειγμα, το «D ανοιχτό ανν κάθε σημείο του είναι εσωτερικό σημείο του» ήταν ορισμός, τώρα είναι θεώρημα. Ενώ «οι σημαντικές ιδιότητες των ανοιχτών» ήταν θεώρημα, τώρα είναι ορισμός.)

Παρατηρήσαμε, όπως ακριβώς και στο ανάλογο κομμάτι του μέρους Β (βλ. τέλος της διάλεξης 8, αρχή της διάλεξης 9) πως αυτές οι «τοπολογικές έννοιες» εξαρτώνται μόνο από την τοπολογία $\mathcal{T}$ και όχι από την βάση σ (δηλαδή αν δύο διαφορετικές βάσεις καθορίζουν την ίδια τοπολογία, τότε καθορίζουν: ίδιο D^o, ίδια εσωτερικά σημεία, ίδια κλειστά σύνολα, ίδιο $\overline{D}$, ίδια κοντινά σημεία, ίδιο σύνορο).

Παράδειγμα: Υπολογισμός του $\mathcal{T}$ δεδομένου του σ για $X = \{0, 1, 2\}$.

Διάλεξη 13: Παράδειγμα: Εσωτερικά και κοντινά σημεία στο χώρο του Sierpinski.

Συνεχείς συναρτήσεις σε τοπολογικούς χώρους. Συνεχείς συναρτήσεις και ανοιχτά, συνεχείς συναρτήσεις και κλειστά, συνεχείς συναρτήσεις και διακριτοί χώροι, συνεχείς συναρτήσεις και τετριμμένοι χώροι, σταθερές και ταυτοτικές συναρτήσεις είναι συνεχείς, σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής. Το θεώρημα «συνεχής ανν κοντινά πάνε σε κοντινά»: διατύπωση και σχόλια.

Διάλεξη 14 (πρώτο μέρος): Απόδειξη του προηγουμένου θεωρήματος.

Μέρος Δ: Υπόχωροι, γινόμενα, χώροι Hausdorff

Διάλεξη 14 (δεύτερο μέρος): Υπόχωροι, παραδείγματα, κλειστά στον υπόχωρο. Η σχέση της συνέχειας με τον περιορισμό του πεδίου ορισμού και την επέκταση του πεδίου τιμών. Το Λήμμα της Επικόλλησης. Η συνέχεια είναι τοπική ιδιότητα.

Διάλεξη 15: Τοπολογικοί και μετρικοί υπόχωροι. Η κατασκευή του χώρου-γινόμενο. Οι Ευκλείδειοι χώροι είναι χώροι-γινόμενο.

Διάλεξη 16: Η «Θεμελιώδης Ιδιότητα του Χώρου-Γινόμενο» (ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής αν και μόνο αν οι συντεταγμένες της είναι συνεχείς). Ο χώρος-γινόμενο $X_1 \times X_2$ εξαρτάται μόνο από τους χώρους X_1 και X_2 (και όχι από το ποιές βάσεις των X_1 και X_2 θα χρησιμοποιήσουμε στην κατασκευή του).

Διαχωρίζουσες περιοχές, χώροι Hausdorff. Μετρικοποιήσιμος $\Rightarrow$ Hausdorff. Τετριμμένος και Hausdorff αν και μόνο αν πλήθος σημείων είναι ένα ή μηδέν. Τα πεπερασμένα υποσύνολα των χώρων Hausdorff είναι κλειστά. Για πεπερασμένους χώρους, διακριτός $\Leftrightarrow$ μετρικοποιήσιμος $\Leftrightarrow$ Hausdorff.

Διάλεξη 17 (πρώτο μέρος): Είδαμε ότι οι υπόχωροι χώρων Hausdorff είναι χώροι Hausdorff. Είδαμε ότι γινόμενα χώρων Hausdorff είναι χώροι Hausdorff, και ότι «πρακτικά» ισχύει και το αντίστροφο (η μόνη περίπτωση που δεν ισχύει είναι αν $X = \varnothing$). «Η διαγώνιος είναι κλειστή $\Leftrightarrow$ ο χώρος είναι Hausdorff». Συνεχείς συναρτήσεις με πεδία τιμών χώρους Hausdorff έχουν κλειστούς «εξισωτές» και κλειστά γραφήματα.

Μέρος Ε: Συμπάγεια

Διάλεξη 17 (δεύτερο μέρος): Ανοιχτές καλύψεις, πεπερασμένες υποκαλύψεις, συμπαγή υποσύνολα, συμπαγείς χώροι. Παράδειγμα: ο $X = \mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγής. Πεπερασμένο $\Rightarrow$ συμπαγές, και ότι το αντίστροφο ισχύει στην (πολύ) ειδική περίπτωση που ο χώρος είναι διακριτός.

Διάλεξη 18: Το $f(D)$ είναι συμπαγές για D συμπαγές και f συνεχή. Το D ειναι συμπαγές (ως υποσύνολο του X) $\Leftrightarrow$ ο χώρος D ειναι συμπαγής (ως υπόχωρος του X). Κλειστό $\Rightarrow$ συμπαγές σε συμπαγείς χώρους. Συμπαγές $\Rightarrow$ κλειστό σε χώρους Hausdorff. Φραγμένα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου, συμπαγές $\Rightarrow$ φραγμένο σε μετρικούς χώρους.

Διάλεξη 19: Το Θεώρημα των Heine-Borel στον $X = \mathbb{R}$. Σύντομα σχόλια στο Θεώρημα του Tychonoff (χωρίς απόδειξη), με έμφαση στο πεπερασμένο πλήθος παραγόντων. Το Θεώρημα των Heine-Borel στον $X = \mathbb{R}^n$. Επανάληψη των max και sup για υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Διάλεξη 20 (πρώτο μέρος): Τα μη-κενά, κλειστά, άνω-φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ έχουν μέγιστο στοιχείο. Τα μη-κενά, συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ έχουν μέγιστο στοιχείο. Το Θεώρημα της Μέγιστης Τιμής.

Μέρος Ζ: Συνεκτικότητα

Διάλεξη 20 (δεύτερο μέρος): Διαισθητική εισαγωγή στις τοπολογικές αναλλοίωτες, με έμφαση στη χαρακτηριστική του Euler και στο «πλήθος των κομματιών».

Διάλεξη 21: Διαισθητική εισαγωγή στις «ενώσεις κομματιών» (διαχωρίσεις), στα διαχωρισμένα σημεία, και στα clopen σύνολα. Ισοδύναμοι ορισμοί της συνεκτικότητας. Παραδείγματα: $\mathbb{R} - 0$, διακριτοί, και τετριμμένοι χώροι. Διαχωρισμένα στον χώρο $\Rightarrow$ διαχωρισμένα στον υπόχωρο, εικόνα συνεκτικού μέσω συνεχούς παραμένει συνεκτική.

Το ευθύγραμμο τμήμα $[a, b]$ στον διανυσματικό χώρο V, κυρτά υποσύνολα του V.

Διάλεξη 22: Κυρτότητα στο $\mathbb{R}$. Συνεκτικότητα στο $\mathbb{R}$. Το (γενικευμένο) θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής.

Διάλεξη 23: Δρόμοι στον χώρο X, η σχέση «τα σημεία a και b του X συνδέονται με δρόμο», και γιατί αυτή η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας.

Κατά Δρόμους Συνεκτικοί (ΚΔΣ) χώροι, κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ είναι ΚΔΣ, ειδικότερα ο ίδιος ο $\mathbb{R}^n$ είναι ΚΔΣ. ΚΔΣ $\Rightarrow$ συνεκτικός, ειδικότερα ο $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικός. Ο $\mathbb{R}^n - 0$ είναι ΚΔΣ, ειδικότερα συνεκτικός, αν $n \geq 2$. Σύντομα σχόλια στο Τοπολογικό Αναλλοίωτο της Διάστασης.

Διάλεξη 24: X συνεκτικός $\Rightarrow$ X ΚΔΣ, υπό την προϋπόθεση ότι ο X είναι ανοιχτός υπόχωρος κάποιου $\mathbb{R}^n$ (για μια πολύ πιο γενική προϋπόθεση βλέπε παρακάτω). Η απόδειξη αυτή μας μαθαίνει τον «κλασσικό τρόπο» να αποδεικνύουμε ότι μια πρόταση ισχύει για κάθε σημείο ενός συνεκτικού χώρου: Αποδεικνύουμε ότι το σύνολο των σημείων που ισχύει αυτή η πρόταση είναι μη-κενό και clopen.

Τοπικά σταθερές συναρτήσεις.

Σχόλια πάνω στις «τοπικές» ιδιότητες.

Τοπικά Κατά Δρόμους Συνεκτικοί (ΤΚΔΣ) χώροι. X συνεκτικός $\Rightarrow$ X ΚΔΣ, υπό την προϋπόθεση ότι ο X είναι ΤΚΔΣ.