

---

Θα χρειαστείτε τους χώρους  $S^{n-1} \subseteq D^n \subseteq \mathbb{R}^n$ , όπου  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$  και  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ .

---

1. Δίνονται συνεχείς  $g, h : X \rightarrow Y$  και  $g', h' : Y \rightarrow Z$ . Να αποδείξετε:

**A.** Αν οι  $g, h$  είναι ομοτοπικές τότε και οι  $g' \circ g, g' \circ h$  είναι ομοτοπικές.

**B.** Αν οι  $g', h'$  είναι ομοτοπικές τότε και οι  $g' \circ g, h' \circ g$  είναι ομοτοπικές.

**Γ.** Αν οι  $g, h$  είναι ομοτοπικές και αν οι  $g', h'$  είναι επίσης ομοτοπικές τότε και οι  $g' \circ g, h' \circ h$  είναι ομοτοπικές.

**Υπόδειξη:** Είτε δείτε τα **A** και **B** ως ειδική περίπτωση του **Γ**, είτε, ακόμη πιο «κομψά», δείτε το **Γ** ως εύκολη συνέπεια των ειδικών περιπτώσεων.

---

2. Μια συνεχής  $f : X \rightarrow Y$  λέγεται **μηδενοομοτοπική** (nullhomotopic) αν είναι ομοτοπική με μια σταθερή συνάρτηση. Ένας χώρος  $X \neq \emptyset$  λέγεται **συσταλτός** (contractible) αν η ταυτοτική συνάρτηση του  $X$  είναι μηδενοομοτοπική.

Δίνεται ένας συσταλτός χώρος  $X$ . Να αποδείξετε:

**A.** Ο  $X$  είναι κατά δρόμους συνεκτικός.

**B.** Για κάθε χώρο  $Y$ , κάθε συνεχείς  $g, h : Y \rightarrow X$  είναι ομοτοπικές.

**Γ.** Για κάθε κατά δρόμους συνεκτικό χώρο  $Y$ , κάθε συνεχείς  $g, h : X \rightarrow Y$  είναι ομοτοπικές.

**Υποδείξεις:** Για τα **B** και **Γ** δείτε την άσκηση 1. Για το **Γ**, δείξτε πρώτα ότι κάθε συνεχής  $\phi : X \rightarrow Y$  είναι ομοτοπική με κάποια σταθερή  $\hat{\phi}$ . Τι σημαίνει «οι σταθερές  $\hat{g}, \hat{h}$  είναι ομοτοπικές»;

---

3. Μια συνεχής  $f : S^{n-1} \rightarrow X$  λέγεται **επουσιώδης** (inessential) αν υπάρχει συνεχής  $g : D^n \rightarrow X$  τέτοια ώστε ο περιορισμός της  $g$  στην  $S^{n-1}$  να ισούται με την  $f$ .

Να αποδείξετε ότι, για τις συνεχείς συναρτήσεις της μορφής  $f : S^{n-1} \rightarrow X$ , οι έννοιες «επουσιώδης» και «μηδενοομοτοπική» ταυτίζονται.

**Υπόδειξη:** Θεωρήστε την  $q : S^{n-1} \times I \rightarrow D^n$  με τύπο  $q(x, t) = tx$ . Θεωρήστε γνωστό από τη γενική τοπολογία ότι αυτή είναι απεικόνιση πηλίκου (δηλαδή τυχαία  $\phi : D^n \rightarrow X$  είναι συνεχής αν η  $\phi \circ q$  είναι συνεχής).

---

4. Μια συνεχής  $f : S^{n-1} \rightarrow X$  λέγεται **ουσιώδης** (essential) αν δεν είναι επουσιώδης. Μπορεί ναδειχθεί ότι αυτό ισχύει για την  $f$  με  $f(x) = x$  και  $X = \mathbb{R}^n - \{0\}$ .

**A.** Ποιό θεώρημα είναι αυτό αν  $n = 1$ ;

**B.** Τι συμπεραίνετε για μια συνεχή  $g : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  που έχει τη «συνοριακή τιμή»  $g(x) = x$  σε κάθε  $x$  που ανήκει στο σύνορο του  $D^n$ ;

**Γ.** Είναι ο  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  συσταλτός;