
1. **A.** «Μαντέψτε» τον ορισμό του ισομορφισμού ΧΣΒ.

B. Να δείξετε ότι, αν X και Y είναι ΧΣΒ και $f : X \rightarrow Y$ είναι ισομορφισμός ΧΣΒ, τότε ο $f_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ είναι ισομορφισμός ομάδων.

Γ. Να αποδείξετε την εξής ειδική περίπτωση του «Τοπολογικού Αναλλοίωτου της Διάστασης»:

Αν $n > 2$ τότε οι \mathbb{R}^n και \mathbb{R}^2 δεν είναι ομοιομορφικοί.

Θεωρήστε γνωστό ότι, αν $n > 2$ και $x \in \mathbb{R}^n - 0$, τότε $\pi_1(\mathbb{R}^n - 0, x) = 0$, και ότι αν $y \in \mathbb{R}^2 - 0$ τότε $\pi_1(\mathbb{R}^2 - 0, y) \cong \mathbb{Z}$.

2. Σε αυτή την άσκηση να θεωρήσετε γνωστό το παρακάτω εύκολο θεώρημα, που θα αποδείξουμε αργότερα: Αν A και B είναι χώροι, $a_0 \in A$, και αν $f_0, f_1 : A \rightarrow B$ είναι ομοτοπικές, τότε: Θέτοντας, για $j = 0, 1$, $b_j = f_j(a_0)$ και $\phi_j = (f_j)_* : \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(B, b_j)$, ισχύει ότι ο ϕ_0 είναι ισομορφισμός αν ο ϕ_1 είναι ισομορφισμός.

Έστω M η ταινία του Möbius και M_0 το σύνορό της. Θεωρούμε τους M και M_0 σαν ΧΣΒ επιλέγοντας ένα σημείο βάσης στο M_0 και για τους δυο. Έτσι η ένθεση $i : M_0 \hookrightarrow M$ γίνεται μορφισμός ΧΣΒ.

A. Να δείξετε ότι $\pi_1(M_0) \cong \pi_1(M)$, όμως ο i_* δεν είναι ισομορφισμός.

B. Να δείξετε ότι το M_0 δεν είναι retract του M .

Υπόδειξη: Μπορείτε να θεωρήσετε το M ως χώρο πηλίκου του $X = D^1 \times D^1$, δηλαδή να πάρετε $M = X / \sim$, όπου $(s, t) \sim (s', t') \Leftrightarrow [(s, t) = (s', t') \text{ ή } s = -1, s' = 1, t' = -t]$. Τότε $M_0 = q(Y)$, όπου $q : X \rightarrow M$ είναι η απεικόνιση πηλίκου και Y είναι ο υπόχωρος του X με $Y = D^1 \times S^0$. Ένας άλλος χρήσιμος χώρος είναι ο $q(D^1 \times 0)$.
