Μάνος Λυδάκης Φυλλάδιο Ασκήσεων 7, Προθεσμία 4.12

---

1. Η αβελιανοποίηση (abelianization) μιας ομάδας G είναι η αβελιανή ομάδα G^{ab} που ορίζεται παρακάτω:

Πρώτα ορίζουμε, για $x, y \in G$, το commutator $[x, y]$ των x και y: Είναι το στοιχείο $xyx^{-1}y^{-1}$ της G. Μετά ορίζουμε το commutator subgroup της G. Είναι η μικρότερη υποομάδα της G που περιέχει όλα τα $[x, y]$. Την συμβολίζουμε με $[G, G]$. Τέλος ορίζουμε την G^{ab} ως G/H όπου $H = [G, G]$. (Δεν είναι δύσκολο να ελεγχθεί ότι η H είναι κανονική, χρησιμοποιώντας το ότι $[x^z, y^z] = [x, y]^z$, όπου $x^z := z^{-1}xz$.) Παρατηρήστε ότι η G^{ab} «έρχεται πακέτο» με ένα κανονικό μορφισμό $\kappa : G \to G^{ab}$.

Α. Να αποδείξετε ότι η G^{ab} έχει την εξής universal property: Για κάθε αβελιανή ομάδα G' και για κάθε μορφισμό $f : G \to G'$ υπάρχει μοναδικός $\overline{f} : G^{ab} \to G'$ τέτοιος ώστε $\overline{f} \circ \kappa = f$.

Β. Να αποδείξετε ότι $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z})^{ab} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. (Υπόδειξη: Συνδυάστε τρείς universal properties, αυτή του μέρους Α, αυτή του Φυλλαδίου 5, και αυτή του Θεωρήματος 1.)

---

2. Δεδομένου χώρου X, ο κώνος (cone) του X είναι ο χώρος $CX := X \times I / X \times 1$ (για παράδειγμα, $CS^n \cong D^{n+1}$). Το suspension του X είναι ο χώρος $\Sigma X := CX / X \times 0$ (για παράδειγμα, $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$). (Το ΣX το λένε καμιά φορά «ανάρτηση» του X, πιστεύω «αιώρηση» είναι πιό καλό, το CX είναι αυτό που αναρτά το X σε ένα καρφί ενώ στο ΣX το X αιωρείται μεταξύ δύο καρφιών.)

Α. Να αποδείξετε ότι ο CX είναι συσταλτός.

Β. Να αποδείξετε ότι ο ΣX είναι ΚΔΣ αν $X \neq \varnothing$.

Γ. Να αποδείξετε ότι ο ΣX είναι απλά συνεκτικός αν ο X είναι ΚΔΣ.

Δ. Να αποδείξετε ότι $\pi_1(\Sigma X) \cong \mathbb{Z}$ αν $|\pi_0(X)| = 2$.

Υπόδειξη: Το Δ είναι πιο δύσκολο. Η απόδειξη που έχω κατά νου είναι παρόμοια με την απόδειξη του ΘSvK.
