Πανεπιστημιο Κρητης — Τμημα Μαθηματικων
Θεωρια Ομοτοπιας — Χειμερινο Εξαμηνο 2013–14

Μάνος Λυδάκης 15 Ιανουαρίου 2014

Μέρος Α: Η Θεμελιώδης Ομάδα

Διάλεξη 1: Ομοτοπία, δρόμοι, κλάσεις ομοτοπίας και τα αντίστοιχα σύνολα $[X, Y]$ και $\pi_0(Y)$. Ομοτοπία δρόμων, το σύνολο $\pi(Y, a, b)$ των κλάσεων ομοτοπίας δρόμων του Y από το a στο b. Πολλαπλασιασμός δρόμων και το αντίστοιχο γινόμενο $[\sigma][\tau]$ στο $\pi(Y, a, c)$ δεδομένων $[\sigma] \in \pi(Y, a, b)$ και $[\tau] \in \pi(Y, b, c)$.

Διάλεξη 2: Η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X, a)$ του χώρου X στο «σημείο βάσης» $a \in X$, που ορίζεται ως $\pi_1(X, a) = \pi(X, a, a)$ χρησιμοποιώντας το γινόμενο της προηγούμενης διάλεξης. Αλλαγή σημείου βάσης. Απλά συνεκτικοί χώροι.

Διάλεξη 3: Χώροι με Σημείο Βάσης (ΧΣΒ) και οι μορφισμοί τους, ο επαγόμενος μορφισμός. Χώροι πάνω από το X, νήματα, ανυψώσεις, διατύπωση του Θεωρήματος Υπολογισμού της Θεμελιώδους Ομάδας του Κύκλου (ΘΥΘΟΚ).

Διάλεξη 4: Μορφισμοι, retractions, και sections, για ομάδες, χώρους, ΧΣΒ, σύνολα, και διανυσματικούς χώρους. Το θεώρημα ότι ∂M δεν είναι retract του M αν το M είναι συμπαγής n-πολλαπλότητα, απόδειξη για $M = D^2$. Σταθερά σημεία, η Ιδιότητα του Σταθερού Σημείου (ΙΣΣ), το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brower, ότι δηλαδή ο D^n έχει την ΙΣΣ, απόδειξη για $n = 2$. Ομοτοπία και γινόμενα.

Διάλεξη 5: $i_* : \pi_1(S^{n-1}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n - 0)$ όπου $i : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n - 0$. Ο βαθμός $\deg f$ μιας συνεχούς $f : S^1 \to S^1$ και ο δείκτης στροφής μιας συνεχούς $f : S^1 \to \mathbb{R}^2 - 0$. Εφαρμογή στο Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.

Διάλεξη 6: Ομοτοπίες με Σημείο Βάσης (ΟΣΒ) και οι αντίστοιχες κλάσεις $[X, Y]_*$, η «κανονική ταύτιση» $[S^1, X]_* \cong \pi_1(X)$, ο «κανονικός μορφισμός» $\kappa : [X, Y]_* \to [X, Y]$ για $X = S^1$. Σχέση μεταξύ f_* και $\sigma_\sharp$. Πότε μια $f : X \to Y$ λέγεται Ομοτοπική Ισοδυναμία (ΟΙ), πότε οι χώροι X και Y λέγονται ομοτοπικά ισοδυναμοι ($X \sim Y$), σύντομα σχόλια στην Εικασία του Poincaré, αν η f είναι ΟΙ τότε η f_* είναι ισομορφισμός, ομοτοπία $\operatorname{rel} A$ και strong deformation retracts.

Μέρος Β: Το Θεώρημα των Seifert-van Kampen

Διάλεξη 7: Λέξεις (words), reduced words, και το άθροισμα (ελεύθερο γινόμενο) $G = \ast_i G_i$ της οικογένειας ομάδων $(G_i)_{i \in J}$. Η Θεμελιώδης Ιδιότητα του Αθροίσματος. Παράδειγμα: περιγραφή της ομάδας $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Διάλεξη 8: Ημιευθέα γινόμενα. Παράδειγμα: περιγραφή της ομάδας $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. Διατύπωση του Θεωρήματος των Seifert-van Kampen (ΘSvK).

Διάλεξη 9: Δυο πρώτες εφαρμογές του ΘSvK: Απλή συνεκτικότητα του χώρου, δεδομένης της απλής συνεκτικότητας των κομματιών, και $\pi_1(\bigvee_\alpha X_\alpha) \cong \ast_\alpha \pi_1(X_\alpha)$. Απλή συνεκτικότητα των S^n και $\mathbb{R}^{n+1} - 0$ για $n \geq 2$. Συνδυαστικά και τοπολογικά graphs.

Διάλεξη 10: Trees, spanning trees, υπολογισμός της θεμελιώδους ομάδας ενός graph. Απόδειξη του πρώτου μέρους του ΘSvK. (συνεχίζεται)

Διάλεξη 11: Ολοκλήρωση της απόδειξης του πρώτου μέρους του ΘSvK. Απόδειξη του δευτέρου μέρους του ΘSvK. (συνεχίζεται)

Διάλεξη 12: Ολοκλήρωση της απόδειξης του ΘSvK. Κατηγορίες, (commutative) squares, pushout squares, παραδείγματα για σύνολα και χώρους.

Διάλεξη 13: Παραδείγματα pushouts σε ομάδες και διανυσματικούς χώρους. Το ΘSvK για δυο κομμάτια λέει «το π_1 διατηρεί pushouts» (εννοείται, ανοιχτά κομμάτια, ΚΔΣ διπλές τομές). Η «στάνταρ απόδειξη» ότι «ορισμοί μέσω universal properties είναι πάντα μοναδικοί έως κανονικού ισομορφισμού». Mapping cylinders και mapping cones. Απλά παραδείγματα με δίσκους και σφαίρες. Πιο ενδιαφέρον παράδειγμα: η ταινία του Möbius.

Διάλεξη 14: Ο χώρος που προκύπτει από τον X by attaching n-cells, CW-structures, the skeleton filtration, CW-complexes, παραδείγματα. Presentation μιας ομάδας με generators και relations, παραδείγματα.

Διάλεξη 15: Κάθε ομάδα είναι θεμελιώδης ομάδα. (συνεχίζεται)

Διάλεξη 16: (πρώτο μέρος) Κάθε ομάδα είναι θεμελιώδης ομάδα.

Μέρος Γ: Επικαλύπτοντες Χώροι

Διάλεξη 16: (δεύτερο μέρος) Άρτια Καλυμμένα (ΑΚ) υποσύνολα, Επικαλύπτοντες Χώροι (ΕΧ), παραδείγματα, τετριμμένοι ΕΧ.

Διάλεξη 17: «ΕΧ = τοπικά τετριμμένοι ΕΧ», πλήθος των πτυχών. The Homotopy Lifting Property (HLP), ανυψώσεις δρόμων, ανυψώσεις ομοτοπιών δρόμων. Ορίσαμε, δεδομένου ΕΧ $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to (X, x_0)$, την αντίστοιχη υποομάδα $H = \operatorname{Im} p_*$ της $G = \pi_1(X, x_0)$ (εννοείται $p_* : \widetilde{G} \to G$, όπου $\widetilde{G} = \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$). Είδαμε ότι ο p_* είναι ένα-προς ένα (άρα $H \cong \widetilde{G}$) και ότι η H αποτελείται ακριβώς από τις κλάσεις των loops των οποίων οι ανυψώσεις είναι πάλι loops. Ορίσαμε , δεδομένου $g = [\gamma] \in G$, το αντίστοιχο σημείο $\widetilde{x}_g$ στο νήμα $F = p^{-1}(x_0)$ ως $\widetilde{x}_g = \widetilde{\gamma}(1)$, και είδαμε ότι εξαρτάται μόνο από το g και όχι από το loop γ που αντιπροσωπεύει το g.

Διάλεξη 18: Είδαμε ότι, με το συμβολισμό της προηγούμενης διάλεξης, και υποθέτοντας τώρα ότι ο $\widetilde{X}$ είναι ΚΔΣ, τότε η απεικόνιση $g \mapsto \widetilde{x}_g$ δίνει ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση $H\backslash G \to F$, όπου το $H\backslash G$ συμβολίζει το σύνολο των δεξιών συμπλόκων της H στην G. Ειδικότερα τότε το πλήθος των πτυχών ταυτίζεται με το δείκτη $[G : H]$. Τέλος είδαμε ότι το «γεωμετρικό πρόβλημα» ύπαρξης ανύψωσης της $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ στο $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ είναι ισοδύναμο με το αντίστοιχο «αλγεβρικό πρόβλημα» που προκύπτει εφαρμόζοντας το π_1. (Αυτό χρειάζεται τον Y να είναι ΚΔΣ και τοπικά ΚΔΣ.) Το «αλγεβρικό πρόβλημα» επαναδιατυπώνεται πιο απλά, αφού η p_* είναι ένα-προς-ένα: είναι το «πρόβλημα» (του αν ισχύει ή όχι ότι) $\operatorname{Im} f_* \subseteq H$.

Διάλεξη 19: Είδαμε ότι (με την ορολογία της προηγούμενης διάλεξης) τα «γεωμετρικά και αλγεβρικά προβλήματα» της μοναδικότητας ανύψωσης είναι πάλι ισοδύναμα (αυτό απλώς χρειάζεται τον Y συνεκτικό). Παρατηρήστε ότι αλγεβρικά η μοναδικότητα ισχύει πάντα (αντιστοιχεί στο ότι ο p_* είναι ένα-προς-ένα), οπότε αυτό που λέμε εδώ είναι απλά ότι (και γεωμετρικά) η ανύψωση είναι μοναδική (αν υπάρχει). Ορίσαμε τον Universal ΕΧ και είδαμε το "universality" που έχει (ειδικότερα την μοναδικότητα έως κανονικού ισομορφισμού). Συμφωνήσαμε, μέχρι και τις επόμενες τρεις διαλέξεις, «καλός» να σημαίνει «συνεκτικός, τοπικά κατά δρόμους συνεκτικός, και ημιτοπικά απλά συνεκτικός». Κάθε «καλός» X έχει Universal ΕΧ. (συνεχίζεται)

Διάλεξη 20: Κάθε «καλός» X έχει Universal ΕΧ. Κάθε υποομάδα H της θεμελιώδους ομάδας G ενός καλού ΧΣΒ (X, x) είναι αντίστοιχη υποομάδα ενός καλού ΕΧ $(X_H, x_H) \to (X, x)$.

Διάλεξη 21: Ισομορφισμός ΚΔΣ-ΤΚΔΣ Επικαλυπτόντων Χώρων αντιστοιχεί με ισότητα αντίστοιχων υποομάδων. Η κατάταξη των καλών ΕΧ, με και χωρίς σημείο βάσης. Η κανονική δράση της G στο νήμα.

Διάλεξη 22: Ο κανονικός ΕΧ με νήμα το G-σύνολο F. Η κατάταξη των ΕΧ πάνω από καλό χώρο X, παραδείγματα με $X = S^1$ και $X = S^1 \vee S^1$. Επικαλύπτοντες Μετασχηματισμοί και η ομάδα $G(\widetilde{X})$ που σχηματίζουν. Κανονικοί ΕΧ. Η σχέση μεταξύ $G(\widetilde{X})$, G, και H.

Διάλεξη 23: Ο Χώρος Τροχιών $X = \widetilde{X}/G$ ενός G-χώρου $\widetilde{X}$. Ελεύθερες δράσεις, Δράσεις ΕΧ (ΔΕΧ). Η σχέση μεταξύ κανονικών ΕΧ και ΔΕΧ. Παραδείγματα, $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{R}P^\infty$, $K(G,1)$-χώροι.