

1: Περιγράψτε με πιο απλό τρόπο τα σύνολα A και B :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 2x = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 - 2x = 0\}$$

2: Ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις; Γιατί;

(I) Κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x^2 = 2$ είναι τέτοιο ώστε $x > 1$.

(II) Κάθε $x \in \mathbb{Q}$ με $x^2 = 2$ είναι τέτοιο ώστε $x > 1$.

3: Έστω A, B, C σύνολα. Να αποδείξετε ότι $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4: Δίνονται υποσύνολα A, B, C κάποιου χώρου U και $x \in U$. Δίνεται επίσης ότι $A \cap B \subseteq C$.

Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι πάντα αληθείς;

(I) $x \in A \cap B \Rightarrow x \in C$

(II) $x \in C \Rightarrow x \in A \cap B$

(III) $x \notin C \Rightarrow x \notin A \cap B$

(IV) $x \notin C \Rightarrow x \notin A$

(V) $x \notin C \Rightarrow (x \notin A \text{ ή } x \notin B)$

(VI) $x \notin C \Rightarrow (x \notin A \text{ και } x \notin B)$

(VII) $x \notin C \Rightarrow x \notin B$

Για τις υπόλοιπες, πάρτε $U = \{1, 2, 3, 4\}$ και βρείτε αντιπαράδειγμα τέτοιο ώστε κανένα από τα $A, B, C, A \cap B$ να μην είναι κενό (τα A, B, C να είναι τα ίδια για όλες τις προτάσεις).

5: Στην άσκηση αυτή θα επαληθεύσετε μια ειδική περίπτωση του επιμεριστικού νόμου

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

όπου A, B, C είναι τα εξής υποσύνολα του επιπέδου:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2\} \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3\}$$

A: Σχεδιάστε τα A, B , και C .

B: Σχεδιάστε τα $D = B \cup C$, $E = A \cap B$, και $F = A \cap C$.

Γ: Σχεδιάστε τα $A \cap D$ και $E \cup F$ και παρατηρήστε ότι ισούνται.

6: Για μια ελληνική εταιρεία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη η γνώση κάποιας από τις γλώσσες αγγλικά ή γερμανικά, και οι εργαζόμενοι που μιλούν κάποια από αυτές τις γλώσσες ονομάζονται «δίγλωσσοι» μέσα σε αυτήν την εταιρεία. Αυτοί που μιλούν και τις δύο αυτές γλώσσες ονομάζονται μέσα στην εταιρεία «τρίγλωσσοι».

Περιγράψτε όσο πιο σύντομα και ξεκάθαρα μπορείτε τους κανόνες του de Morgan

$$(A \cup \Gamma)^c = A^c \cap \Gamma^c \quad (A \cap \Gamma)^c = A^c \cup \Gamma^c$$

στην ειδική περίπτωση όπου το A είναι το σύνολο των εργαζομένων που μιλούν αγγλικά, και το Γ είναι το σύνολο των εργαζομένων που μιλούν γερμανικά (και ο χώρος U είναι το σύνολο των εργαζομένων).

7: Δίνονται τα σύνολα $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$, και $C = \{A, B\}$. Να απαντήσετε τις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

A: Ισούνται τα σύνολα A και $\{A\}$;

B: Ισούνται τα σύνολα B και $\{B\}$;

Γ: Ισούνται τα σύνολα C και $\{C\}$;