

Μάνος Λυδάκης

Ασκήσεις—Εργαστήριο 3

Για να ωφεληθείτε όσο το δυνατόν περισσότερο από τα προβλήματα 1, 2, και 3, μην χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανές για να τα λύσετε.

1: Έστω $n = 100$. Να υπολογίσετε $\text{mod } n$ τα $\overline{987654} + \overline{357}$, $\overline{11111} \cdot \overline{1111}$.

2: Έστω $n = 3$. Οι κλάσεις $\text{mod } n$ είναι οι $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$. Ποιά απ' αυτές τις τρεις κλάσεις είναι η κλάση του $x^2 + x + 1$, αν $x = 314159265358$;

3: Το ρολόι μου πάει κάθε ώρα είκοσι λεπτά μπροστά. Αν δείχνει τώρα ότι η ώρα είναι ακριβώς μεσημέρι, που θα βρίσκεται ο λεπτοδείκτης μετά από 123454321 ώρες;

4: Δίνεται μια διαμέριση του $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ που αποτελείται από τρία διαφορετικά υποσύνολα K, K', K'' . Δίνεται επίσης ότι $K = \{2, 5\}$. Αν \sim είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο S , και αν οι κλάσεις της \sim είναι η δεδομένη διαμέριση, είναι δυνατόν το 4 να είναι ισοδύναμο και με το 3 και με το 1; (Δηλαδή, είναι δυνατόν να ισχύει και ότι $4 \sim 3$ καθώς και ότι $4 \sim 1$;)

5: Έστω $S = \mathbb{R}$. Δίνεται η σχέση ισοδυναμίας στο S

$$x \sim y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}$$

Έστω x το κλάσμα $1/2$. Να περιγράψετε «με λόγια», όσο πιο απλά μπορείτε, την κλάση του x .

Υπόδειξη: Βρείτε ένα-δυό θετικά στοιχεία y της κλάσης εκτός του x , και μετά βρείτε και ένα-δυό αρνητικά στοιχεία. Χρησιμοποιήστε καλύτερα δεκαδικές παραστάσεις αντί για κλάσματα.

6: Έστω $S = \mathbb{Z}$ και έστω T το σύνολο των ακεραίων πολλαπλασίων του 3 (δηλαδή, $T = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$). Δίνεται η σχέση στο S

$$x \approx y \Leftrightarrow y - x \notin T$$

A: Είναι η \approx συμμετρική σχέση;

B: Είναι η \approx ανακλαστική σχέση;

Γ: Είναι η \approx μεταβατική σχέση;

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Σχόλιο: Για να γίνει ίσως πιο ενδιαφέρον το πρόβλημα, αναφέρω το εξής: Λίγη σκέψη θα σας πείσει ότι η σχέση στο S

$$x \sim y \Leftrightarrow y - x \in T$$

είναι η ισοδυναμία modulo 3 (δηλαδή $x \sim y \Leftrightarrow$ οι κλάσεις των x και y ισούνται στους ακεραίους modulo 3).