Μάνος Λυδάκης Ασκήσεις—Εργαστήριο 5

1: Έστω $B_1 = [4, 9], A_1 = [2, 5]$, και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $f(x) = (x - 3)^2$. Να βρείτε τα $f^{-1}(B_1), f(A_1)$.

Υπόδειξη: Σχεδιάστε πρόχειρα το γράφημα της f.

2: Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $f(x) = (x - 1)^2$. Έστω $A_1 = [-1, 1]$ και $A_2 = [0, 3]$.

Α. Να βρείτε το $A_1 \cap A_2$. Έπειτα να βρείτε το $f(A_1 \cap A_2)$.

Β. Να βρείτε τα $f(A_1), f(A_2)$. Έπειτα να βρείτε το $f(A_1) \cap f(A_2)$.

Γ. Ισχύει ότι $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$;

3: Να αποδείξετε ότι $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$, για μια (τυχαία) συνάρτηση $f : A \to B$ και (τυχαία) υποσύνολα A_1 και A_2 του A.

4: Δίνονται συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : B \to C$. Να αποδείξετε ότι, αν υπάρχουν οι f^{-1} και g^{-1}, τότε $g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = i_C$ και $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = i_A$. Τι λέει αυτό για την $(g \circ f)^{-1}$;

5: Α. Με βάση το πρόβλημα 3, να μαντέψετε πως υπολογίζεται η $(f_1 \circ f_2 \circ f_3)^{-1}$ και η $(f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4)^{-1}$ δεδομένων των $f_1^{-1}, f_2^{-1}, f_3^{-1}, f_4^{-1}$.

Β. Να βρείτε την f^{-1} χωρίς να υπολογίσετε την g^{-1}, αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δίνεται με $f(x) = (g^{-1}(x^7))^3$ όπου $g(x) = 2x + 5$.

Υπόδειξη: Το μέρος **Β** είναι ειδική περίπτωση του μέρους **Α**, όπου $f_1(x) = x^3, f_2(x) = g^{-1}(x), f_3(x) = x^7$.

6: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(x) = 2x$ και $g(x) = x + 3$.

Α. Υπολογίστε τις $f \circ g$ και $g \circ f$. Ισχύει ότι $f \circ g = g \circ f$;

Β. Να βρείτε $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που να μην είναι σταθερή ή ταυτοτική, και τέτοια ώστε $f \circ h = h \circ f$.

Γ. Να βρείτε $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που να μην είναι σταθερή ή ταυτοτική, και τέτοια ώστε $g \circ k = k \circ g$.

Υπόδειξη για τα Β και Γ: Η h να είναι «παρόμοια» με την f και η k να είναι «παρόμοια» με την g.

7: Δίνονται συναρτήσεις $f : A \to B$, $g : B \to C$ τέτοιες ώστε η $g \circ f$ είναι $1 - 1$.

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.

Β. Είναι απαραίτητο να είναι και η g ένα-προς-ένα;

8: Δίνονται συναρτήσεις $f : A \to B$, $g : B \to C$ τέτοιες ώστε η $g \circ f$ είναι επί.
Α. Να αποδείξετε ότι η g είναι επί.
Β. Είναι απαραίτητο να είναι και η f επί;

9: Επιλέγω ένα (τυχαίο) σύνολο $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ από n ανθρώπους, με (τυχαίο) $n > 1$. Αποδείξτε ότι τουλάχιστον δύο απ' αυτούς έχουν το ίδιο πλήθος γνωστών στο S. (Στο πρόβλημα αυτό, όταν λέμε «δυο άνθρωποι είναι γνωστοί» εννοούμε «ξέρουν, και οι δυο, ο ένας τον άλλο».)

Υπόδειξη για όσους τους αρέσουν τα δύσκολα προβλήματα: Θέτουμε $f(x_j)$ να είναι το πλήθος των $x \in S$ που είναι γνωστοί του x_j. Παίρνουμε συνάρτηση

$$f : \{x_1, x_2, \ldots x_n\} \to \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}.$$

Εφαρμόστε την Αρχή του Περιστεριώνα. **Μην** διαβάσετε παρακάτω, αλλιώς το πρόβλημα δεν είναι πια δύσκολο.

Υπόδειξη για τους υπόλοιπους: Για να καταλήξετε σε άτοπο, υποθέστε ότι όλα τα $f(x_j)$ είναι διαφορετικά. Τι λέει αυτό για την f; Τι λέει η Αρχή του Περιστεριώνα; Γίνεται όμως και το $y' = 0$ και το $y'' = n - 1$ να γράφονται ως $f(x')$, αντίστοιχα ως $f(x'')$; Τι λέει αυτό για τον «μοναχικό» άνθρωπο x' και τον «πολύ κοινωνικό» άνθρωπο x'';